

2009年

福建省高考总复习指导

(第二轮)



福州教育学院
福州市高考研究课题组

数学

(理科)

福建人民出版社

2009年

福建省高考总复习指导

(第二轮)

福州教育学院
福州市高考研究课题组

数学

(理科)

福建人民出版社

2009 年福建省高考总复习指导 (第二轮) 数学(理科)

2009NIAN FUJIANSHENG GAOKAO ZONGFUXI ZHIDAO (DI-ERLUN) SHUXUE(LIKE)

福州教育学院

福州市高考研究课题组

出 版: 福建人民出版社

地 址: 福州市东水路 76 号

邮政编码: 350001

电 话: 0591-87604366 (发行部)

87521386 (编辑室)

电子邮箱: zmnyssx@126.com

网 址: <http://www.fjpph.com>

发 行: 福建省新华书店

印 刷: 福建省地质印刷厂

地 址: 福州市塔头路 2 号

邮政编码: 350011

开 本: 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张: 15.75

字 数: 361 千字

版 次: 2009 年 1 月第 1 版

2009 年 1 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 978-7-211-05926-3

定 价: 26.70 元

本书如有印装质量问题, 影响阅读, 请直接向承印厂调换

版权所有, 翻印必究

编者的话

随着高中新课程的稳步推进和高考改革的不断深入，高考命题已从知识立意转向能力立意，更多地在知识的交汇点处命题，更多地反映时代的精神和新课程的理念。在这样的背景下，编写一套既能准确反映高考要求，又能符合高中毕业班总复习需要的高质量复习纲要，已成为提高我市高中教学质量的当务之急。为此，福州教育学院精心挑选福州一中、福州三中、福建师大附中、福州八中等名校多年从事高中毕业班复习指导工作的特级教师以及其他名师、优秀骨干教师和部分教研员，成立了福州市高考研究课题组。依托该课题组的最新研究成果，编写了这套“2009年福建省高考总复习指导（第二轮）”丛书，供高三学生进行第二轮复习使用。

与市面上林林总总的教辅材料相比，本丛书的显著特点主要体现在以下三个方面：

一、针对性

针对性首先体现在对高考要求和高考改革趋势的把握上。高中新课程标准的实施和高考分省自行命题，必然对高考命题的形式和内容产生重大影响。作为省会城市，福州在名师和信息等方面有着不言而喻的优势，而且本次我们也吸收了一些福州之外的名师参与。

针对性还体现在对学科教学特点和学生认知特点的把握上。本丛书无论在学习内容、学法指导以及对应试能力的培养上都更符合我省、我市学科教学的传统和学生学习的需求。

二、科学性

高考第二轮复习是考生在能力上获得本质提升的关键阶段，本丛书的科学性既体现在对学科知识体系和高考考点的准确把握上，也体现在对该阶段学生认知规律的准确预判上。

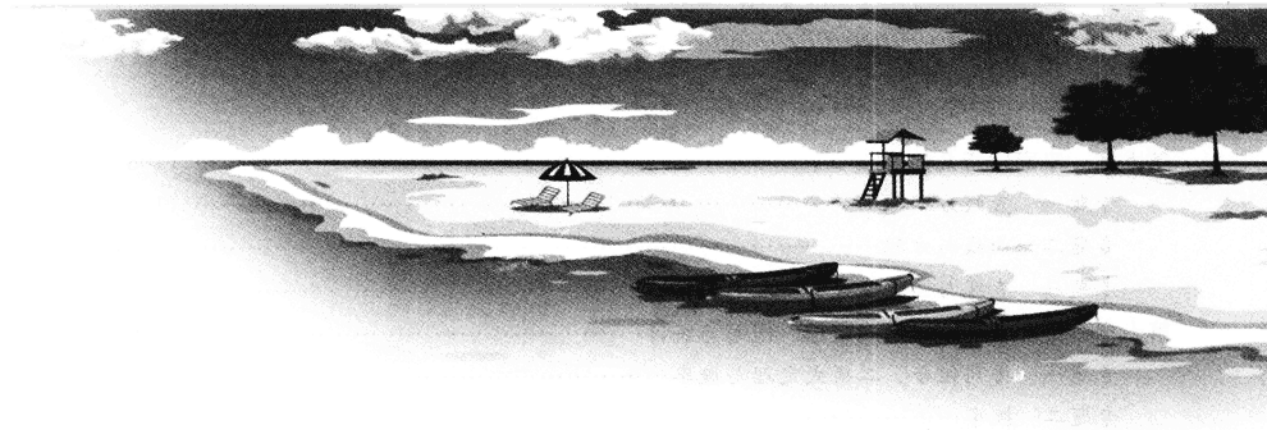
本丛书在专题的编排上力求体现学科知识点间的内在联系，吸收高中课程标准各模块编排的精神实质，以学科基本思想和方法贯穿各专题。在内容的编写上突出学生的学习主体地位，特别强调按学生学习过程中的思维发展为线索组织复习内容，促进学生构建良好的知识体系，真正实现学习能力的发展。

三、有效性

高考第二轮复习时间短、要求高，复习资料应能使学生在这段时间内达到高考对知识和能力的要求，本丛书的编写特别强调教学目标的实现途径，对每一专题的“讲、析、练、考”都明确要求与高考目标一致，每一目标都制定具体的训练措施。同时特别注重“讲、析、练、考”一体化，真正实现高效复习。

复习备考正如翻越一座座高山，本丛书愿成为莘莘学子翻越高山的天梯，祝同学们梦想成真。

福州教育学院
福州市高考研究课题组
二〇〇八年十二月



目录

CONTENTS

第一章 集合与常用逻辑用语	(1)
专题一 集合及其应用	(1)
专题二 简单的逻辑联结词	(6)
第二章 推理证明及算法初步	(13)
专题一 推理与证明	(13)
专题二 算法初步	(20)
第三章 函数与导数	(28)
专题一 函数的图象与性质	(28)
专题二 基本初等函数	(34)
专题三 导数与定积分	(40)
第四章 三角函数	(47)
专题一 三角函数的图象与性质	(47)
专题二 三角函数的恒等变换	(52)
专题三 三角函数的综合应用	(58)
第五章 数列	(63)
专题一 等差数列与等比数列	(63)
专题二 数列的综合应用	(69)
第六章 平面向量与复数	(78)
第七章 不等式	(82)
专题一 不等式的解法	(82)
专题二 不等式的证明	(88)
第八章 立体几何	(93)
专题一 空间几何体及其性质	(93)
专题二 空间的角与距离	(100)

第九章 平面解析几何	(108)
专题一 直线方程与圆	(108)
专题二 曲线与方程	(114)
专题三 直线与圆锥曲线的位置关系	(121)
第十章 排列组合、二项式定理、概率与统计	(129)
专题一 排列组合、二项式定理与概率	(129)
专题二 概率	(133)
专题三 统计	(139)
第十一章 选修系列	(147)
专题一 矩阵与变换	(147)
专题二 参数方程与极坐标	(152)
专题三 不等式选讲	(157)
第十二章 客观题解题策略	(162)
专题一 选择题解题策略	(162)
专题二 填空题解题策略	(167)
数学(理科)综合检测卷(一)	(171)
数学(理科)综合检测卷(二)	(175)
参考答案	(179)

第一章 集合与常用逻辑用语

专题一 集合及其应用

要点提示

关键：集合概念及其运算是进一步学习现代数学的基础，每年全国各地的高考都要进行考查，从试题难度上看，以中低档题为主，多以选择题或填空题的形式出现，主要考查集合的相关概念与运算。一般以两种形式考查：一是集合本身的知识，近年试题加强了对集合的计算化简的考查，并向无限集发展，考查抽象思维能力，在解决这些问题时，要注意利用几何的直观性，注意运用 Venn 图解题方法的训练，注意利用特殊值法解题，加强集合表示方法的转换和化简的训练，考试形式多以一道选择题为主；二是考查集合语言与集合思想的运用，如函数的定义域、值域，方程与不等式的解集，排列与组合的问题，解析几何曲线相交问题等，即考查集合在其他数学问题中的应用，所以集合试题设计都会结合其他数学基础知识展开。

考点：(1) 理解集合、子集、补集、交集、并集的概念，了解空集和全集的意义，了解属于、包含、相等关系的意义，掌握有关的术语和符号，并会用它们正确地表示一些简单的集合；

(2) 能使用 Venn 图表示集合的关系及运算，体会直观图示对理解抽象概念的作用。

误区：(1) 在集合表示中，忽视代表元素，而混淆集合表示的是数集（解集、定义域、值域等）还是点集；

(2) 遇到 $A \cap B = A$, $A \cup B = B$ 或 $A \subseteq B$, 勿丢 $A = B$ 和 $A = \emptyset$ 的情况；

(3) 在集合的解题中忽视运用 Venn 图、数轴或其他方法来直观显示各集合的元素；

(4) 在含字母的集合问题中，忽视对字母的讨论与检验。

范例精析

特别关注 1：集合的运算及其性质。

【例 1】 已知全集 $S = \{1, 3, x^3 - x^2 - 2x\}$, $A = \{1, |2x - 1|\}$, 若 $\complement_S A = \{0\}$, 问这样的实数 x 是否存在？若存在，求出 x ；若不存在，说明理由。

【解】 方法一： $\because \complement_S A = \{0\}$, $\therefore 0 \in S$ 且 $0 \notin A$, 即 $x^3 - x^2 - 2x = 0$, 解得 $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$.

当 $x = 0$ 时, $|2x - 1| = 1$, 这与集合中的元素互异性矛盾；

当 $x = -1$ 时, $|2x - 1| = 3 \in S$;

当 $x=2$ 时, $|2x-1|=3 \in S$.

$\therefore$ 这样的实数 x 存在, 是 $x=-1$ 或 $x=2$.

方法二: $\because \complement_s A = \{0\}$, $\therefore 0 \in S$ 且 $0 \notin A$, $3 \in A$.

$\therefore x^3 - x^2 - 2x = 0$ 且 $|2x-1|=3$. $\therefore x=-1$ 或 $x=2$.

【评注】 本题考查集合间的关系以及集合的性质, 分类讨论的过程中“当 $x=0$ 时, $|2x-1|=1$ ”不能满足集合中元素的互异性, 此题的关键是理解符号 $\complement_s A = \{0\}$ 是两层含义: $0 \in S$ 且 $0 \notin A$.

【活学活用 1】 已知集合 $A = \{m, m+d, m+2d\}$, $B = \{m, mq, mq^2\}$, 其中 $m \neq 0$, 且 $A=B$, 求 q 的值.

特别关注 2: 含参数的集合问题.

【例 2】 已知 $A = \{x \mid x^2 + 4x = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0\}$, 其中 $a \in \mathbf{R}$, 如果 $A \cap B = B$, 求实数 a 的取值范围.

【解】 化简得 $A = \{0, -4\}$, 由 $A \cap B = B$, 得 $B \subseteq A$.

(i) 当 $B = \emptyset$ 时, $\Delta = 4(a+1)^2 - 4(a^2 - 1) < 0$, 解得 $a < -1$;

(ii) 当 $B = \{0\}$ 时, $\begin{cases} a^2 - 1 = 0, \\ \Delta = 4(a+1)^2 - 4(a^2 - 1) = 0, \end{cases}$ 解得 $a = -1$;

(iii) 当 $B = \{-4\}$ 时, $\begin{cases} (-4)^2 + 2(a+1)(-4) + a^2 - 1 = 0, \\ \Delta = 4(a+1)^2 - 4(a^2 - 1) = 0, \end{cases}$ 无解;

(iv) 当 $B = \{0, -4\}$ 时, $\begin{cases} \Delta = 4(a+1)^2 - 4(a^2 - 1) > 0, \\ -2(a+1) = -4, \\ a^2 - 1 = 0, \end{cases}$ 解得 $a = 1$.

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $a = 1$ 或 $a \leq -1$.

【评注】 弄清集合中的元素, 遇到复杂的集合一定应先化简. 本题由 $A \cap B = B$ 的条件转化为 $B \subseteq A$, 进而对集合 B 分类讨论是解题的关键. 条件为 $B \subseteq A$ 时, 在讨论中不要遗忘 $B = \emptyset$ 的情况.

【活学活用 2】 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - ax + a^2 - 19 = 0\}$, $B = \{x \mid \log_2(x^2 - 5x + 8) = 1\}$, $C = \{x \mid x^2 + 2x - 8 = 0\}$, 求 a 的值, 使 $A \cap B \neq \emptyset$ 且 $A \cap C = \emptyset$ 同时成立.

特别关注 3: 数轴、Venn 图在解题中的应用.

【例 3】 设 $A = \{x \mid -2 < x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$, $B = \{x \mid x^2 + ax + b \leq 0\}$, 已知 $A \cup B = \{x \mid x > -2\}$, $A \cap B = \{x \mid 1 < x \leq 3\}$, 求 a, b 的值.

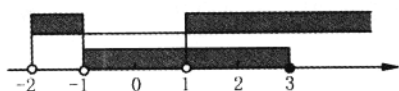


图 1-1-1

【解】 如图 1-1-1 所示, 设想集合 B 所表示的数集在数轴上移动, 显然当且仅当 B 覆盖集合 $\{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$, 才能使 $A \cup B = \{x \mid x > -2\}$, 且 $A \cap B = \{x \mid 1 < x \leq 3\}$. 根据二次不等式与二次方程的关系, 可知 -1 与 3 是方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的两根, $\therefore a = -(-1+3) = -2$, $b = (-1) \times 3 = -3$.

【评注】 在集合问题中, 有一些常用的方法如数轴法取交并集, Venn 图法等, 借助于数轴上的区间图形表示进行处理, 采用数形结合的方法, 会得到直观、明了的解题效果. 解答本题的闪光点在于考生能由题目所给的比较错综复杂、一时理不清头绪的数量关系中, 想到用数轴法, 直观形象地表示出各数量关系间的联系.

【活学活用 3】 向 50 名学生调查对 A, B 两事件的态度, 有如下结果: 赞成 A 的人数是全体的 $\frac{3}{5}$, 其余的不赞成; 赞成 B 的比赞成 A 的多 3 人, 其余的不赞成; 另外, 对 A, B 都不赞成的学生数比对 A, B 都赞成的学生数的 $\frac{1}{3}$ 多 1 人. 问对 A, B 都赞成的学生和都不赞成的学生各有多少人?



直击高考

1. (2008 · 山东) 满足 $M \subseteq \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, 且 $M \cap \{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_2\}$ 的集合 M 的个数是 ().

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. (2008 · 天津) 设集合 $S = \{x \mid |x-2| > 3\}$, $T = \{x \mid a < x < a+8\}$, $S \cup T = \mathbf{R}$, 则 a 的取值范围是 ().

- A. $-3 < a < -1$ B. $-3 \leq a \leq -1$
C. $a \leq -3$ 或 $a \geq -1$ D. $a < -3$ 或 $a > -1$

3. 已知集合 $A = \{(x, y) \mid x^2 + mx - y + 2 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{(x, y) \mid x - y + 1 = 0, 0 \leq x \leq 2\}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 求实数 m 的取值范围.

演练评估

A 组

- 已知集合 $A \subseteq \{2, 3, 7\}$, 且 A 中至多有一个奇数, 则这样的集合共有 () 个.
A. 2 B. 4 C. 5 D. 6
- 已知全集 $S = \{x \mid 0 < x \leq 9, x \in \mathbf{N}^*\}$, $A, B \subseteq S$, 且 $B \cap \complement_S A = \{1, 9\}$, $A \cap B = \{2\}$, $\complement_S A \cap \complement_S B = \{4, 6, 8\}$, 那么 A, B 分别为 ().
A. $\{2, 3, 5, 7\}, \{1, 2, 9\}$ B. $\{1, 2, 9\}, \{2, 3, 5, 7\}$
C. $\{2, 3, 5, 7\}, \{2, 9\}$ D. $\{2, 5, 7\}, \{1, 2, 9\}$
- 若集合 $A = \{-1, 1\}$, $B = \{x \mid mx = 1\}$, 且 $A \cup B = A$, 则 m 的值为 ().
A. 1 B. -1 C. 1 或 -1 D. 1 或 -1 或 0
- 已知集合 $A = \{x \mid x < a\}$, $B = \{x \mid 1 < x < 2\}$, 且 $A \cup (\complement_{\mathbf{R}} B) = \mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围是 ().
A. $a \leq 1$ B. $a < 1$ C. $a \geq 2$ D. $a > 2$
- 设集合 $M = \{a \mid a = (1, 2) + \lambda(3, 4), \lambda \in \mathbf{R}\}$, $N = \{a \mid a = (2, 3) + \lambda(4, 5), \lambda \in \mathbf{R}\}$, 则 $M \cap N =$ _____.
- 设集合 $A = \{x \mid x^2 - (3+a)x + 3a = 0, a \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x \mid x^2 - 5x + 4 = 0\}$, 求 $A \cup B$, $A \cap B$.



7. 集合 $A = \{x | x^2 - ax + a^2 - 19 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $C = \{x | x^2 + 2x - 8 = 0\}$.

(1) 若 $A \cap B = A \cup B$, 求 a 的值;

(2) 若 $\emptyset \subsetneq A \cap B$, $A \cap C = \emptyset$, 求 a 的值.

B 组

8. 若 A, B, C 为三个集合, $A \cup B = B \cap C$, 则一定有 ().

A. $A \subseteq C$

B. $C \subseteq A$

C. $A \neq C$

D. $A = \emptyset$

9. 设 P 和 Q 是两个集合, 定义集合 $P - Q = \{x | x \in P, \text{ 且 } x \notin Q\}$, 如果 $P = \{x | \log_2 x < 1\}$, $Q = \{x | |x - 2| < 1\}$, 那么 $P - Q$ 等于 ().

A. $\{x | 0 < x < 1\}$

B. $\{x | 0 < x \leq 1\}$

C. $\{x | 1 \leq x < 2\}$

D. $\{x | 2 \leq x < 3\}$

10. 已知集合 $A = \{x | x(x+1)(x+2) > 0\}$, $B = \{x | x^2 + ax + b \leq 0\}$, 且 $A \cap B = \{x | 0 < x \leq 2\}$, $A \cup B = \{x | x > -2\}$, 求 a, b 的值.

11. 设集合 $A = \left\{ x \mid \frac{1}{32} \leq 2^{-x} \leq 4 \right\}$, $B = \{ x \mid x^2 - 3mx + 2m^2 - m - 1 < 0 \}$.

(1) 当 $x \in \mathbb{Z}$ 时, 求 A 的非空真子集的个数;

(2) 若 $B = \emptyset$, 求 m 的取值范围;

(3) 若 $A \supseteq B$, 求 m 的取值范围.

12. 已知集合 $A = \{-4, 2a-1, a^2\}$, $B = \{a-5, 1-a, 9\}$.

(1) 若 $A \cap B = \{9\}$, 求 $A \cup B$;

(2) 是否存在实数 a , 使得 $\text{card}(A \cup B) = 4$? 若存在, 求出所有的实数 a ; 若不存在, 请说明理由.

专题二 简单的逻辑联结词



关键: 逻辑是研究思维形式及其规律的一门基础学科. 学习数学, 需要全面地理解概念, 正确地进行表述、推理和判断, 这就离不开对逻辑知识的掌握和运用. 更广泛地说, 在日常生活、学习、工作中, 基本的逻辑知识也是认识问题、研究问题不可缺少的工具, 是人民文化素质的组成部分. 从近几年的高考来看, 大多数试题涉及本部分的内容, 多以选择题、填空题为主要形式考查, 由此可见, 逻辑关系在高考中举足轻重, 在复习中要高度重视. 四种命题的关系和全称量词、存在量词成为常考内容, 而充要条件的判断几乎每年必考, 或直接考查, 或以其他数学知识为载体进行考查, 这是命题的趋势.

- 考点:** (1) 理解必要条件、充分条件与充要条件的意义, 会分析四种命题的相互关系;
 (2) 了解逻辑联结词“或”“且”“非”以及理解全称量词与存在量词的含义;
 (3) 对含有一个量词的命题能正确地加以否定.

误区: (1) 关于命题的判断忽视依据命题的定义“可以判断真假的语句”;

(2) 对表面上没有“或”“且”“非”字样的复合命题, 误认为它是简单命题;

(3) 在构成否定命题时, 简单地把原来命题中的“是”改成“不是”, “多”改成“少”等, 而没有注意到构成两个命题间的矛盾关系;

(4) 解决问题要抓实质, 从整体进行考虑, 而不要单纯地从形式上加以否定.



范例精析

特别关注 1: 命题的概念及四种命题之间的关系.

【例 1】 分别写出命题“若 $m \leq 0$, 或 $n \leq 0$, 则 $m+n \leq 0$ ”的逆命题、否命题和逆否命题, 并判断真假.

【解】 逆命题: 若 $m+n \leq 0$, 则 $m \leq 0$, 或 $n \leq 0$. 逆命题为真.

否命题: 若 $m > 0$, 且 $n > 0$, 则 $m+n > 0$. 否命题为真.

逆否命题: 若 $m+n > 0$, 则 $m > 0$, 且 $n > 0$. 逆否命题为假.

【评注】 本题需搞清楚“ $>$ ”的否定是“ $\leq$ ”, 不要将“ $=$ ”漏掉, 真假性需要利用不等式的相关性质及它们之间的关系来判断. 由于互为逆否的两个命题是等价的命题, 它们同真同假, 所以当一命题不易判断其真假时, 可通过其逆否命题的真假来判断原命题的真假.

【活学活用 1】 判断命题“若 $m > 0$, 则方程 $x^2 + x - m = 0$ 有实数根”的逆否命题的真假.

特别关注 2: 判断充要条件的四种方法.

【例 2】 指出下列各组命题中, p 是 q 的什么条件. (在“充分而不必要”“必要而不充分”“充要”“既不充分也不必要”中选一种作答)

(1) 在 $\triangle ABC$ 中, $p: A > B$, $q: \sin A > \sin B$;

(2) 对于实数 x, y , $p: x+y \neq 8$, $q: x \neq 2$ 或 $y \neq 6$;

(3) 在 $\triangle ABC$ 中, $p: \sin A > \sin B$, $q: \tan A > \tan B$;

(4) 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, $p: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$, $q: (x-1)(y-2) = 0$.

【解】(1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理知道: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$.

$\therefore \sin A > \sin B \Leftrightarrow a > b$. 又由 $a > b \Leftrightarrow A > B$,

$\therefore \sin A > \sin B \Leftrightarrow A > B$, 即 p 是 q 的充要条件.

(2) 因为命题“若 $x=2$ 且 $y=6$, 则 $x+y=8$ ”是真命题, 故 $p \Rightarrow q$.

命题“若 $x+y=8$, 则 $x=2$ 且 $y=6$ ”是假命题, 故 q 不能推出 p .

$\therefore p$ 是 q 的充分而不必要条件.

(3) 取 $A=120^\circ$, $B=30^\circ$, p 不能推导出 q ; 取 $A=30^\circ$, $B=120^\circ$, q 不能推导出 p .

$\therefore p$ 是 q 的既不充分也不必要条件.

(4) $\because P = \{(1, 2)\}$, $Q = \{(x, y) | x=1 \text{ 或 } y=2\}$, $P \subsetneq Q$,

$\therefore p$ 是 q 的充分而不必要条件.

【评注】在考查充要条件时, 实际上需要考查“ $p \Rightarrow q$ ”及“ $p \Leftarrow q$ ”两方面的真假. 在推理的具体内容上往往涉及其他章节的知识. 在判断充要条件时, 当不易判断 $p \Rightarrow q$ 真假时, 也可从集合角度入手, 判其真伪, 所以结合集合知识, 对解决与逻辑有关的问题是大有益处的.

【活学活用 2】判断是否存在实数 m , 分别使得下列结论成立:

(1) $2x+m < 0$ 是 $x^2-2x-3 > 0$ 的充分条件?

(2) $2x+m < 0$ 是 $x^2-2x-3 > 0$ 的必要条件?

特别关注 3: 正确理解“或”“且”“非”的含义.

【例 3】指出下列复合命题的形式及构成它的简单命题:

(1) 96 是 48 与 16 的倍数;

(2) 方程 $x^2-3=0$ 没有有理根;

(3) 两个内角是 45° 的三角形是等腰直角三角形;

(4) 若 $xy < 0$, 则点 $P(x, y)$ 的位置在第二、三象限;

(5) π 不是无理数.

【解】(1) 这个命题是“ $p \wedge q$ ”形式的复合命题, 其中 p : 96 是 48 的倍数, q : 96 是 16 的倍数.

(2) 这个命题是“ $\neg p$ ”形式的复合命题, 其中 p : 方程 $x^2-3=0$ 有有理根.

(3) 这个命题是“ $p \wedge q$ ”形式的复合命题, 其中 p : 两个角是 45° 的三角形是等腰三角形, q : 两个角是 45° 的三角形是直角三角形.

(4) 这个命题是“ $p \vee q$ ”形式的复合命题, 其中 p : 若 $xy < 0$, 则点 $P(x, y)$ 的位置在第二象限; q : 若 $xy < 0$, 则点 $P(x, y)$ 的位置在第三象限.

(5) 这个命题是“ $\neg p$ ”形式的复合命题, 其中 p : π 是无理数.



【评注】对表面上没有“或”“且”“非(不)”字样的复合命题,不要误认为它是简单命题,要根据语句所表达的含义进行命题结构的判断;对“或”“且”“非(不)”的理解要与集合中的“并集”“交集”“补集”的概念结合起来,特别是“否命题”要对命题中的关键词进行否定.

【活学活用 3】已知命题 p : 方程 $a^2x^2+ax-2=0$ 在 $[-1, 1]$ 上有解, 命题 q : 只有一个实数 x 满足不等式 $x^2+2ax+2a \leq 0$. 若命题 “ $p \vee q$ ” 是假命题, 求 a 的取值范围.

特别关注 4: 含有一个量词的命题的否定.

【例 4】 写出下列全称命题的否定, 并判断其真假:

(1) $p: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0$;

(2) q : 等圆的面积相等, 周长相等.

【解】 (1) $\neg p: \exists x \in \mathbf{R}$, 使 $x^2 - x + \frac{1}{4} < 0$.

$\because x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$, 恒成立, $\therefore \neg p$ 是假命题.

(2) $\neg q$: 存在两个等圆, 其面积不相等或周长不相等, 由平面几何知识知, $\neg q$ 是假命题.

【评注】先转化为“标准的”特称或全称命题, 再对关键词语进行否定. 值得我们高度注意的是, 解决问题要抓实质, 从整体进行考虑, 而不要单纯地从形式上加以否定.

【活学活用 4】 写出下列命题的否定形式:

(1) 任意一个锐角三角形的三个内角都为锐角;

(2) 菱形的对角线互相垂直;

(3) 面积相等的三角形是全等三角形.



直击高考

1. (2008 · 山东) 给出命题: 若函数 $y=f(x)$ 是幂函数, 则函数 $y=f(x)$ 的图象不过第四象限. 在它的逆命题、否命题、逆否命题的三个命题中, 真命题的个数是 ().

A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

2. (2008 · 福建建考) 设集合 $A = \left\{x \mid \frac{x}{x-1} < 0\right\}$, $B = \{x \mid 0 < x < 3\}$, 那么 “ $m \in A$ ” 是 “ $m \in B$ ” 的 ().

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

3. (2008·广东) 已知命题 p : 所有有理数都是实数, 命题 q : 正数的对数都是负数, 则下列命题中为真命题的是 ().

- A. $(\neg p) \vee q$ B. $p \wedge q$ C. $(\neg p) \wedge (\neg q)$ D. $(\neg p) \vee (\neg q)$



演练评估

A 组

1. 已知命题 p : 若实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 = 0$, 则 x, y 全为 0; 命题 q : 若 $a > b$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

给出下列四个复合命题: ① $p \wedge q$; ② $p \vee q$; ③ $\neg p$; ④ $\neg q$. 其中真命题的个数为 ().

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. 若命题 A 的否命题是 B , 命题 B 的逆命题是 C , 则 C 是 A 的逆命题的 ().

- A. 逆否命题 B. 逆命题 C. 否命题 D. 以上判断都不对

3. 条件 “ $m = \frac{1}{2}$ ” 是 “直线 $(m+2)x + 3my + 1 = 0$ 与直线 $(m-2)x + (m+2)y - 3 = 0$

相互垂直” 的 ().

- A. 充要条件 B. 充分而不必要条件
C. 必要而不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 设 α, β 为两个不同的平面, l, m 为两条不同的直线, 且 $l \subset \alpha, m \subset \beta$, 有如下两个命题: ① 若 $\alpha \parallel \beta$, 则 $l \parallel m$; ② 若 $l \perp m$, 则 $\alpha \perp \beta$. 那么 ().

- A. ①是真命题, ②是假命题 B. ①是假命题, ②是真命题
C. ①②都是真命题 D. ①②都是假命题

5. 对下列命题的否定:

- ① p : 能被 3 整除的整数都是奇数, $\neg p$: 存在一个能被 3 整除的整数不是奇数;
② p : 每一个四边形的四个顶点共圆, $\neg p$: 存在一个四边形的四个顶点不共圆;
③ p : 有的三角形为正三角形, $\neg p$: 所有的三角形都不是正三角形;
④ p : $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2 \leq 0$, $\neg p$: 当 $x^2 + 2x + 2 > 0$ 时, $x \in \mathbf{R}$.

其中正确说法的序号是 _____.

6. 已知 $c > 0$, 设 p : 函数 $y = c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上递减, q : 不等式 $x + |x - 2c| > 1$ 的解集为 $\mathbf{R}$, 如果 “ $p \vee q$ ” 为真, 且 “ $p \wedge q$ ” 为假, 求 c 的取值范围.



7. 已知条件 $p: 2x^2 - 9x + a < 0$, 条件 $q: \begin{cases} x^2 - 4x + 3 < 0, \\ x^2 - 6x + 8 < 0, \end{cases}$ 且 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分条件,

求实数 a 的取值范围.

B 组

8. 在 $\triangle ABC$ 中, 设条件 $p: \frac{a}{\sin B} = \frac{b}{\sin C} = \frac{c}{\sin A}$, 条件 $q: \triangle ABC$ 是等边三角形, 那么条件 p 是条件 q 的 ().

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

9. 已知集合 $A = \left\{ x \mid \frac{x-1}{x+1} < 0 \right\}$, $B = \left\{ x \mid |x-b| < a \right\}$, 若 “ $a=1$ ” 是 “ $A \cap B \neq \emptyset$ ” 的充分条件, 则 b 的取值范围是 ().

- A. $-2 \leq b < 0$ B. $0 < b \leq 2$
C. $-3 < b < -1$ D. $-1 \leq b < 2$

10. 平面内的一个四边形为平行四边形的充要条件有多个, 如两组对边分别平行. 类似地, 写出空间中的一个四棱柱为平行六面体的两个充要条件:

- (1) _____;
(2) _____.

(写出你认为正确的两个充要条件)

11. 已知 $a \geq \frac{1}{2}$, 函数 $f(x) = -a^2x^2 + ax + c$, 求证: 对任意的 $x \in [0, 1]$, $f(x) \leq 1$

的充要条件是 $c \leq \frac{3}{4}$.