解析幾何學講義

解析幾何學講義

匡文濤編譯
壽孝天校訂

商務印書館發行

民國二十一年一月二十九日
敝公司突遭國難總務處印刷
所編譯所書棧房均被炸燬附
設之涵芬樓東方圖書館尚公
小學亦遭殃及盡付焚如三十
五載之經營隳於一旦迭蒙
各界慰問督望速圖恢復詞意
懇摯銜感何窮敝館雖處境艱
困不敢不勉爲其難因將需用
較切各書先行覆印其他各書
亦將次第出版惟是圖版裝製
不能盡如原式事勢所限想荷
鑒原謹布下忱統祈垂詧

上海商務印書館謹啓

中華民國七年一月初版
十九年四月六版
中華民國二十二年六月國難後第一版
(一四七八)

解析幾何學講義一冊
每冊定價大洋貳元
外埠酌加運費匯費

編譯者 匡文濤
校訂者 壽孝天
發行兼印刷者 上海河南路 商務印書館
發行所 上海及各埠 商務印書館

四七四三上大

序

解析幾何學(*Analytic Geometry*)者。幾何學與代數學相連鎖。爲研究幾何學之第一良法。而學微分積分學者萬不可少之階級也。蓋天下事有常有變。萬象之變。尤爲繁賾。微分積分者。正推算各種變量之數學也。攷其自變因變之理。詳其續變飛變之法。以及變之形狀有大有小。變之速率有增有損。皆可以比例求之。然任其變性之所至。而原性究不滅。故其反也。變性漸減。原性漸見。消長盈虛。變化萬千。此則微積分之大觀也。習算者靡不以此爲登峰造極。望而却步。聞而心悸。然茍得馭變之方。通變之術。亦易如反掌。解析幾何學。其馭變通變之不二法門乎。其法以二坐標爲主。一切幾何學之性質。均可推求其所含變數之各次方程式。有代數學之各次方程式。即可踵求其軌跡。任天下變化無窮之量。都可按其迹象以求之。就其圖形以推之。求得之位置不爽毫釐。推得之狀態不差累黍。所謂萬變不離其宗者非耶。是以代加德氏 *Descartes*(法人西歷1596年生1650年歿)發明斯學以來。爲數學界開一新紀元。前之所謂百思不得其解者。今則有術可求矣。風靡一世。幾有不脛而走無翼而飛之概。雖十九世紀之初。使用組織幾何新法之學者。輩出如鯽。如法人可魯氏 *Carnot* 著位置幾何學(*Geometry of Position*)。設正負線以擴張一般之證明。法人旁士勒氏 *Poncelet* 與英人查理氏 *Charles* 及德人士突拿氏 *Steiner* 等相繼闡發。終不能破其藩籬。而成完善之專門學科。我國科學幼稚。惟數學尙有一線光明。解析幾何學。亦有譯本可讀。如謝譯代形合參。李譯代微積拾級之代數幾何。華譯代數術之方程界線。

各雖不同。實則一也。至於今日。繙譯之本。充斥坊間。若龔君元凱所譯斯密氏改勒氏合著之原理。彭君覲圭所譯長澤氏之講義。鄭君家斌及仇君毅所譯温特渥斯及查理斯密之教科書等。皆有可觀。但對於平面部。應有盡有。對於立體部。大都簡約難悟。日人宮本藤吉所著之講義。平面部略人所詳。然亦簡而該。頗得撮要之旨。立體部詳人所略。然亦淺而明。尙無繁碎之弊。以之爲專門研究。雖不無盈朒之可言。而采爲高等教科。頗適於用。故特譯之。以公同好。奈鄙人中文和文。均少研究。學力時日。亦屬有限。不達之辭。訛謬之點。自知不免。尙乞海內同志進而匡正之。幸甚。

民國五年夏泰和匡文濤自識於江右高等師範學校

上卷平面部

頁

下卷 立體部

解析幾何學講義

上卷平面部

第一篇 緒論

第一章 解析幾何學之意義

1. 定義 解析幾何學(*Analytical Geometry*)。爲數學之一科。據代數學之研究。以論圖形之性質之學也。

此代數學之研究。大體云何。卽通常組織幾何學(*Synthetic Geometry*)。直接證明圖形諸性質。而在解析幾何學。則設某規約。用以作代表線及面之方程式。以證明其性質。而此方程式有一般之形狀。故用一般通有代數學上之法則。以研究之。所得之結果。亦得通用於一般。

如是。解析幾何學一般研究圖形之性質。且用幾何學同一之方法。得擴張其觀念。又解諸種計算問題。便益之處甚夥。

2. 歷史 導出圖形研究之新法者。係法國有名之數學家兼哲學家代加德(*Descartes*)。自西歷1637年以來。多數幾何學家。均歡迎此方法。漸漸開拓之。以貢獻於世界。爲數學之一大進步。

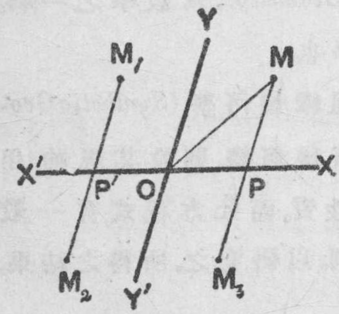
然當第十九世紀之初。使用組織幾何學新法之學者。輩出如鲫。如法人可魯(*Carnot*)。先著位置幾何學(*Geometry of Position*)設正負線以擴張一般之證明。繼之者爲法人旁士勒氏(*Poncelet*)與查理氏(*Charles*)。及德人士突拿氏(*Steiner*)等。更用豐富之材料。爲貴重之研究。至使當時數學界大爲風靡。

然解析幾何學。不僅不因此少呈退步之狀態。且反因此而增加新奇之方法。由是大加發展。漸達於今日完成之域。

3. 分類 解析幾何學。分爲二部。卽平面解析幾何學。及立體解析幾何學是也。而前者硏究在一平面上之圖形。後者乃硏究在空間內之圖形也。

第二章 坐標

4. 定義 表一點之位置者。爲之該點之坐標(*Co-ordinates*)。



用〔代加德〕坐標。其法如次。

取相交二直線XX', YY'。其交點爲O。含此二線之平面上。任意一點謂M。從M引一與YY'平行線MP。

其XX', YY'稱爲坐標軸(*Co-ordinate-Axes*)。O稱爲原點(*Origin*)。OP與PM之長。稱爲M點之坐標。又特名XX'爲橫軸。或x軸(*Axis of Abscissa or Axis of x*)。YY'爲縱軸。或Y軸(*Axis of ordinate or Axis of y*)。OP(OP長度之略。以下仿此)爲M點之橫坐標(*Absissa*)。PM爲M點之縱坐標(*Ordinate*)。$X\hat{O}Y$爲坐標軸之交角

一般表橫坐標用x。縱坐標用y。坐標之交角(交角θ大之略。以下仿此)爲θ。

注意　θ在$0°$與$180°$之間。

5. 直線之正負 於前節之圖。$OP=2$, $PM=3$。取x軸上$P'O=OP$。通過P',P。引與y軸平行線。此所引之線。令$PM=M_3P=P'M_1=M_2P'$。然只云求橫坐標2,縱坐標3之點。則解此問題當爲M, M_1, M_2, M_3之四點。換言之。與有坐標之點者。不僅一而已。故生

不便。爲欲避此不便且使各得區別起見。吾人得設次之規約。

測 XX′ YY′ 之方向之任何長爲正。測此等反對之方向之任何長爲負。

據此規約。則上述之四點。得區別之如次。

就 M 點言。則 $x=2, \quad y=3;$

就 M_1 點言。則 $x=-2, \quad y=3;$

就 M_2 點言。則 $x=-2$。 $y=-3;$

就 M_3 點言。則 $x=2$。 $y=-3$。

6. 直角坐標 坐標軸互爲垂線。則稱直交軸互爲斜線則稱斜交軸。

關於直交軸之點之坐標。稱直角坐標(*Rectangular co-ordinates*)。關於斜交軸之點之坐標。稱斜角坐標(*Oblique co-ordinates*)。

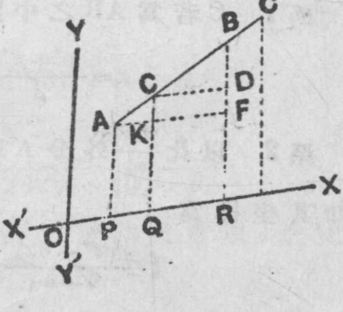
注意1. 一點之直角坐標。爲其點與坐標軸之距離。

注意2. 一點與原點相連之直線。名爲此點之動徑。故一點之直角坐標。等於該點之動徑向坐標軸上所投之正射影。

7. 記法 表橫坐標 x 縱坐標 y 之點 M。用 $M(x,y)$ 號記之。

注意. 於第四節之圖。其原點 O。以 $O(0,0)$ 記之。又坐標軸之兩端。令爲 X, X′, Y, Y′。則表此四點之記號,爲 $X(+\infty,0)$, $X'(-\infty,0)$, $Y(0,+\infty)$, $Y'(0,-\infty)$。

8. 有二點之坐標爲 $A(x', y')$, $B(x'', y'')$。試依二正數量 m, n 之比。求其內分點 C 之坐標。



自 A, B, C 引線與縱軸平行。又自 A 引線與橫軸平行。然由幾何學之比例

定理。得
$$\frac{AK}{KF}=\frac{AC}{CB}=\frac{m}{n}。$$

令C之坐標爲x, y。則

$$AK=PQ=OQ-OP=x-x'$$
$$KF=QR=OR-OQ=x''-x。$$

代入上之比例式。則

$$\frac{x-x'}{x''-x}=\frac{m}{n}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\alpha)$$

又自C引線與橫軸平行。則

$$\frac{FD}{DB}=\frac{AC}{CB}=\frac{m}{n}。$$

然
$$FD=RD-RF=y-y',$$
$$DB=RB-RD=y''-y,$$

代入上之比例式。則

$$\frac{y-y'}{y''-y}=\frac{m}{n}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\beta)$$

解(α),(β)。則得所求之坐標如次。

$$x=\frac{mx''+nx'}{m+n},\qquad y=\frac{my''+ny'}{m+n}$$

注意. 上述之研究。爲A,B在$X\hat{O}Y$內。然任何位置。施同樣之研究。可得同一之結果。以下準此。

系1. C若爲AB之中點。則$m=n$。其坐標爲

$$x=\frac{x'+x''}{2},\qquad y=\frac{y'+y''}{2}。$$

系2. 以比$\frac{m}{n}$外分AB之點爲$C'(\xi,\eta)$。則與上同法研究之。知其坐標爲

$$\xi=\frac{mx''-nx'}{m-n},\qquad \eta=\frac{my''-ny'}{m-n}$$

例題. 三角形之頂點。令爲 $A(x', y')$, $B(x'', y'')$, $C(x''', y''')$。則其重心之坐標如何。

(解) 令 BC 之中點爲 $M(\xi, \eta)$。則由系1得

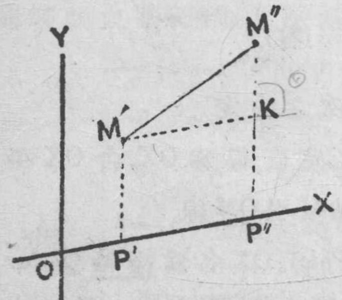
$$\xi = \frac{x'' + x'''}{2}, \qquad \eta = \frac{y'' + y'''}{2},$$

重心爲比 $\frac{1}{2}$ 內分 MA 之點。令其坐標爲 x, y。則由上之公式。得

$$x = \frac{x' + 2\dfrac{x'' + x'''}{2}}{1+2}, \qquad y = \frac{y' + 2\dfrac{y'' + y'''}{2}}{1+2}$$

即 $$x = \frac{x' + x'' + x'''}{3}, \qquad y = \frac{y' + y'' + y'''}{3} \text{............(答)}.$$

9. 求二點 $M'(x', y')$, $M''(x'', y'')$ 之距離。



作縱坐標 $P'M'$, $P''M''$。自 M' 引線與橫軸平行。

所求之距離 $M'M''$ 令爲 δ。則應用 Δ, $M'KM''$ 三角法之公式。

$$\delta^2 = \overline{M'K}^2 + \overline{KM''}^2 - 2M'K \cdot KM'' \cos M'KM''.$$

然 $$M'K = P'P'' = x'' - x',$$

$$KM'' = P''M'' - P''K = y'' - y'.$$

又令坐標軸之交角爲 θ。則

$$M'\hat{K}M'' = 180^\circ - \theta, \qquad \therefore \quad \cos M'KM'' = -\cos\theta$$

$$\therefore \quad \delta^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + 2(x'' - x')(y'' - y')\cos\theta$$

$$\therefore \quad \delta = \pm\sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + 2(x'' - x')(y'' - y')\cos\theta}.$$

注意. 單云距離。則規定取正值。故最後之結果,當取 δ 之正值。

系1. 求原點與$M'(x',y')$之距離。則可於上式令$x''=y''=0$。卽得所求之距離爲

$$\delta'=\sqrt{x'^2+y'^2+2x'y'\cos\theta}.$$

系2. 關於直交軸之公式。則甚簡單。卽以$\theta=90°$, $\cos\theta=0$。

$$\therefore\quad \delta=\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2},\qquad \delta'=\sqrt{x'^2+y'^2}.$$

例題. 通過三點A$(-1,1)$, B$(1,2)$, C$(1,-2)$之圓(圓周之略以下仿此)。求其中心之坐標。但此爲直交軸。

〔解〕 令中心爲D(x,y)。則$\overline{DA}^2=\overline{DB}^2=\overline{DC}^2$

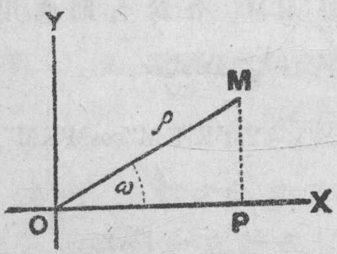
卽 $(x+1)^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(y-2)^2=(x-1)^2+(y+2)^2$.

解此聯立方程式。得

$$x=\frac{3}{4},\qquad y=0,\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(答)}.$$

10。極坐標

點之位置。更得如次之決定



過定點O之定直線爲OX。含OX平面上任意一點M引OM線。

O名爲極(*Pole*)。OX名爲極軸(*Polar Axis*)。OM爲M點之動徑(*Radius Vector*)。$X\hat{O}M$爲M點之動角(*Vectorial Angle*)。

一點之動徑及動角。云爲該點之極坐標(*Polar Co-ordinates*)。

一般表動徑爲ρ。動角爲ω。

表動徑ρ動角ω之點M。與代加德坐標同樣。亦得$M(\rho,\omega)$之號記之。

注意. 動徑之長。規定在0與$+\infty$之間。動角之大。規定在$0°$與$360°$之間。故有動徑與動角。點之位置。當可確定。

11. 直角坐標與極坐標之關係。

原點與極爲一致。橫軸之正方向與極軸爲一致。M點之直角坐標及極坐標。令爲x, y, 及ρ, ω(參照前節之圖)。

則 $$x=\rho\cos\omega,\qquad y=\rho\sin\omega;$$

$$\frac{y}{x}=\tan\omega,\qquad \rho=\sqrt{x^2+y^2}.$$

前二公式。供由極坐標求直角坐標之用。後二公式。供由直角坐標求極坐標之用。

例題. 試求二點A(ρ', ω'), B(ρ'', ω'')之距離。

〔解〕 令A, B之直角坐標爲x', y'及x'', y''。(原點與極及橫軸與極軸之關係。如上所述。此種關係。通常已默許矣)。則

$$\begin{aligned}\delta^2&=(x'-x'')^2+(y'-y'')^2\\&=(\rho'\cos\omega'-\rho''\cos\omega'')^2+(\rho'\sin\omega'-\rho''\sin\omega'')^2\\&=\rho'^2+\rho''^2-2\rho'\rho''\cos(\omega'-\omega'').\end{aligned}$$

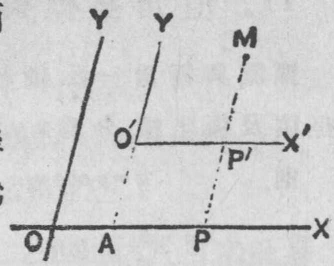
$$\therefore\quad \delta=\sqrt{\rho'^2+\rho''^2-2\rho'\rho''\cos(\omega'-\omega'')}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\text{答}).$$

第三章 坐標軸之變換

12. 目的 變換坐標軸。在關於舊坐標軸一點之坐標。以關於新坐標軸同點之坐標表之。

如是之變換。用關於舊坐標軸已成立之方程式。變爲關於新坐標軸而選擇適當之新坐標軸之方程式。簡單之。因之所代表之圖形。容易研究。

關於坐標軸變換之公式。從舊新坐標軸之位置。有種種區別。分敍如次。



13. 坐標軸之方向不變。而原點之位置變。

OX, OY 爲舊坐標軸。O′X′, O′Y′ 爲新坐標軸。一點 M 之舊坐標爲 x, y。新坐標爲 x', y'。

又新原點 O′ 之坐標爲 a, b。

即　$a=\mathrm{OA},\ b=\mathrm{AO'},\ x=\mathrm{OP},\ y=\mathrm{PM},\ x'=\mathrm{O'P'},\ y'=\mathrm{P'M}.$

然　$$\mathrm{OP}=\mathrm{OA}+\mathrm{AP}=\mathrm{OA}+\mathrm{O'P'},$$

$$\mathrm{PM}=\mathrm{PP'}+\mathrm{P'M}=\mathrm{AO'}+\mathrm{P'M}.$$

即　$$x=a+x',\quad y=b+y'.$$

是即所求之公式也。

例題　坐標軸之方向不變。而原點移至新點(2,−1)。則方程式 $x^2+y^2-4x+2y-1=0$ 之變移若何。

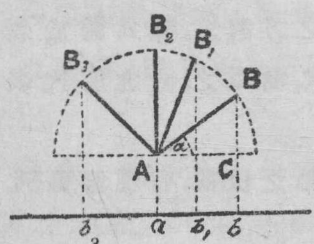
〔解〕　$(x'+2)^2+(y'-1)^2-4(x'+2)+2(y'-1)-1=0$

令簡單之。則　$x'^2+y'^2=6.$

通例省略 x, y 之記號 ′ 而爲 $x^2+y^2=6$..............(答)。

但此 x, y 爲新坐標。切記勿忘。

14. 豫備定理　A 爲中心。AB 爲定長之直線。在一平面上旋轉。投此線之正射影於其平面定直線 b_3b 之上。令爲 ab, ab_1 等。



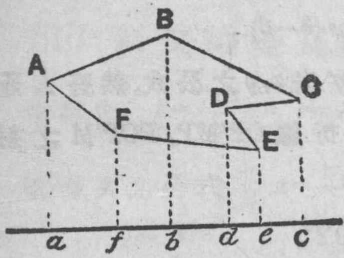
此 b_3b 稱射影軸(*Axis of Projection*)。AB 在此軸之正方向所成之角。稱AB與射影軸所成之角。

定理 令AB與b_3b所成之角爲α。AB之長之正數爲l。正射影之長爲p。則AB不論位置如何。恆爲$p=l\cos\alpha$。

證 過A引射影軸之平行線。則

$$ab=AC=AB\cos CAB=l\cos\alpha.$$

定理 多角形之各邊。取繞其周之一方向。令皆同號。則此等邊投影於一射影軸之上。其正射影之代數和爲0。



證 AB, BC,......,FA之正射影令爲$ab, bc, \ldots\ldots, fa$。則$ab+bc+\ldots\ldots+fa=0$。

注意 AB, BC,......,FA之長代以$a', b', \ldots\ldots, f'$。此等之邊與射影軸所成之角代以$\alpha, \beta, \ldots\ldots, \phi$。則表此定理如次。

$$a'\cos\alpha+b'\cos\beta+\ldots\ldots+f'\cos\phi=0$$

或略爲

$$\Sigma a'\cos\alpha=0.$$

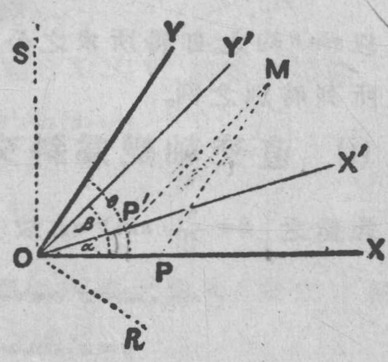
今變其形如次

$$a'\cos\alpha+b'\cos\beta+\ldots\ldots+e'\cos\xi=-f'\cos\phi.$$

此等式右邊AF之正射影爲af。故折線AF名ABCDEF之結局線(*Resultant*)。由是得陳述如次

折線各邊正射影之代數和。等於其結局線之正射影。

15. 原點之位置不變而變坐標軸之方向。



OX, OY及OX', OY'代同有原點O之舊坐標軸及新坐標軸。

OX', OY'與OX所成之角代以α, β。x, y及x', y'代一點M之舊坐標及新坐標。