全国百所重点中学经验荟萃

高考命题热点与规律探析

高中数学

孙学昌　张自重　主编

中国致公出版社

全国百所重点中学经验荟萃·
高考命题热点与规律探析

高中数学

主　编　孙学昌　张自重
副主编　张志明　丁善勇
杨　环　狄　刚

中国数公出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考命题热点与规律探析:高中数学/孙学昌,张自重主编.
—北京:中国致公出版社,1996.2

ISBN 7-80096-170-2

Ⅰ.高… Ⅱ.①孙… ②张… Ⅲ.数学-高中-命题-升学
参考资料 Ⅳ.G634.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 20770 号

全国百所重点中学经验荟萃

高考命题热点与规律探析

高中数学

孙学昌 张自重 主编

*

中国致公出版社出版发行

(北京市西城区太平桥大街4号 邮编:100034)

新华书店经销

中国人民大学出版社印刷厂印刷

*

开本:787×1092 1/32 印张:8 字数:192千字

1996年2月第1版 1997年2月第2次印刷

印数:20 002—30 010册

ISBN 7-80096-170-2/G·107

定价:7.20元

前　言

一年一度的高考牵动着千百万考生和家长的心。如何既能减轻学生的学习负担、又能切实提高他们的应考能力而在高考中取得优秀成绩？这是广大师生共同关心的问题。为此，我们从全国100所重点学校中邀请了一批具有丰富教学经验的特级、高级和全国知名的骨干教师，在有关专家的组织和指导下，密切结合当前的教学实际和升学考试实际，开展教学研究和教育测量研究，对全国和"三南"、上海历年高考试卷、试题进行了深入的分析研究，现将研究成果荟集成册，编写成《高考命题热点与规律探析丛书》正式出版发行，奉献给那些想摆脱题海又苦于无门的教师和同学们。

本丛书共五册，包括数学、物理、化学、语文和英语五科，各册均依据历届考纲考情并按现行新教材内容、顺序和知识块精心设计，分成若干考点，每个考点分考题解析、命题热点与规律、复习指导和应考训练等项，紧扣现行教学大纲并密切结合当前高考实际编写。由于本书将高考命题跟高中教与学密切联系起来，并注重给规律、教方法、传技巧，所以学生在新课学习和总复习中使用本书作辅导读物，可以紧紧抓住考点，突破难点，强化热点，提高学习的针对性、自觉性和有效性，取得"事半功倍"的学习效果。

这套丛书既适用于高中各年级学生作同步辅导和同步练习，又适用于毕业班学生作第一轮复习使用，亦可供教师作教学参考书。

本册为高中数学，与现行教材内容和顺序相对应，全书分十五章，书后附高考模拟试题五套和全部参考答案或简明解答。

参加本书编审工作的同志有：孙学昌、张自重（以上为主编）、张志明、丁善勇、杨环、狄刚（以上为副主编）、叶家振、侯荣、苏洞、冯长河、汪京怀、李广宏、李家山、杨柏龙、冯克永、赵孝陵、王爱忠、杜圣利、毛吉高、周广健、李云生、李忠炎、刘先胜、张元贵等。

由于时间有限，疏漏甚至错误之处在所难免，望读者同志大力斧正。

《高考命题热点与规律探析丛书》编委会

目　　录

第一章　函数

Ⅰ.考题解析

例1　(1987年高考题)设S、T是两个非空集合,且$S\not\subseteq T$,$T\not\subseteq S$,令$X=S\cap T$,那么$S\cup X$等于 ……………………………………… (　　)

(A)X　(B)T　(C)$\varnothing$　(D)S

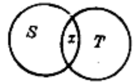

图1—1

解析　本题的特点是题意叙述比较抽象,考查学生的理解能力,用文氏图解比较容易。

如图1—1所示,可得$S\cup X=S$,选(D)。

例2　(1983年高考题)设$M=\{x|x\leqslant\sqrt{12}\}$,$a=\sqrt{11}$,则下列关系式中正确的是…………………………………………………………… (　　)

(A)$a\subset M$　(B)$a\notin M$　(C)$\{a\}\in M$　(D)$\{a\}\subset M$

解析　本题考查元素与集合、集合与集合之间关系以及$\in$、$\subset$、$\notin$、$\not\subset$等符号的意义。学习中有关符号使用上的错误应予充分注意,特别是$\in$与$\subset$的混淆。

$\because\sqrt{11}<\sqrt{12}$,　$\therefore a\in M$,　$\therefore\{a\}\subset M$,　故选(D)。

例3　(1984年高考题)数集$X=\{(2n+1)\pi,n$是整数$\}$,与数集$Y=\{(4k\pm1)\pi,k$是整数$\}$之间的关系是 ……………………………… (　　)

(A)$X\subset Y$　(B)$X\supset Y$　(C)$X=Y$　(D)$X\neq Y$

解析　可从讨论$2n+1$(n是整数)与$4k\pm1$(k是整数)的等价性而判定数集X与Y是否相等。

$$\because 2n+1=\begin{cases}4k+1(n\text{为偶数,即}n=2k)\\4k-1(n\text{为奇数,即}n=2k-1)\end{cases}(k\text{是整数})$$

$\therefore X=Y$,选(C)。

例4　(1994年高考题)定义在$(-\infty,+\infty)$上的任意函数$f(x)$都可以表示成一个奇函数$g(x)$和一个偶函数$h(x)$之和,如果$f(x)=\lg(10^x+1)$,$x\in(-\infty,+\infty)$,那么……………………………………………… (　　)

(A)$g(x)=x$,$h(x)=\lg(10^x+10^{-x}+2)$

(B) $g(x)=\frac{1}{2}[\lg(10^x+1)+x]$, $h(x)=\frac{1}{2}[\lg(10^x+1)-x]$

(C) $g(x)=\frac{x}{2}$, $h(x)=\lg(10^x+1)-\frac{x}{2}$

(D) $g(x)=-\frac{x}{2}$, $h(x)=\lg(10^x+1)+\frac{x}{2}$

解析 由已知，有 $f(x)=g(x)+h(x)$，$f(-x)=-g(x)+h(x)$ 可解得 $g(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$，$h(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$，由 $g(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$ $=\frac{1}{2}\lg\frac{10^x+1}{10^{-x}+1}=\frac{1}{2}\lg 10^x=\frac{x}{2}$，可否定(A)、(B)、(D)。选(C)。

例5 (1989年高考题)已知 $f(x)=8+2x-x^2$，如果 $g(x)=f(2-x^2)$，那么 $g(x)$ …………………………………………………………（　　）

(A)在区间(−1,0)上是减函数　(B)在区间(0,1)上是减函数

(C)在区间(−2,0)上是增函数　(D)在区间(0,2)上是增函数

解析 这是讨论复合函数单调性的题目，有一定难度，错误率较高。

由 $g(x)=8+2(2-x^2)-(2-x^2)^2=-x^4+2x^2+7=-(x^2-1)^2+7$，知 $g(x)$ 在(−1,0)上是减函数，选(A)。

例6 (1982年高考题)设 $0<x<1$，$a>0$，$a\neq1$，比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小(要写出比较过程)

解析 本题考查绝对值概念、对数函数的性质及两个实数比较大小的方法，可考虑作差比较或作商比较。

(1)当 $a>1$ 时，$|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|=-\log_a(1-x)-\log_a(1+x)=-\log_a(1-x^2)>0$，即 $|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$

(2)当 $0<a<1$ 时，$|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|=\log_a(1-x)+\log_a(1+x)=\log_a(1-x^2)>0$，$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$

由(1)(2)，当 $a>0$，$a\neq1$ 时，$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$

例7 (1990年高考题)设全集 $I=\{(x,y)|x,y\in R\}$，集合 $M=\{(x,y)|\frac{y-3}{x-2}=1\}$，$N=\{(x,y)|y\neq x+1\}$，那么 $\overline{M}\cap N$ 等于

(A)$\varnothing$　(B)$\{(2,3)\}$　(C)(2,3)　(D)$\{(x,y)|y=x+1\}$

解析 本题考查集合的基本概念和运算，全集 I 表示平面直角坐标系，M 表示直线 $y=x+1$，但除去点(2,3)，N 表示直角坐标系中除去直

1. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ 2. $2\sqrt{13}$. 3 $(\sqrt{5},\sqrt{13})$. 4. 14, 10, 16. 5 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$
6. $\frac{2}{3}\sqrt{5}$

线 $y=x+1$ 的平面区域，$M\cap N$ 表示平面上的点(2,3)，但如果选 C 是错误的，因为集合与集合运算的结果是集合，应当表示为 $\{(2,3)\}$，故选 B。

例 8 (1985 年高考题)设 a,b 是两个实数，

$A=\{(x,y)\mid x=n,y=na+b,n$ 是整数$\}$，

$B=\{(x,y)\mid x=m,y=3m^2+15,m$ 是整数$\}$，

$C=\{(x,y\mid x^2+y^2\leqslant 144\}$ 是平面 xoy 内的点集合，讨论是否存在 a 和 b，使得(1) $A\cap B\neq\varnothing$，(2) $(a,b)\in C$，同时成立。

解析 本题考查集合的基本知识，不等式的证明，以及分析问题的能力，通过将集合语言转化为几何语言，明确点集 A、B、C 所表示的图形以及条件(1) $A\cap B\neq\varnothing$ (2) $(a,b)\in C$ 的几何意义，进而转入运用解几及代数知识分析研究。如果实数 a 和 b 使得(1)成立，那么存在整数 m 和 n 使得 $(n,na+b)=(m,3m^2+15)$

即 $\begin{cases} n=m \\ na+b=3m^2+15 \end{cases}$

由此得出，存在整数 n 使得 $na+b=3n^2+15$，或写成 $na+b-(3n^2+15)=0$

这个等式表明 $P(a,b)$ 在直线 $l: nx+y-(3n^2+15)=0$ 上，记从原点到直线 l 的距离为 d，于是

$$d=\frac{3n^2+15}{\sqrt{n^2+1}}=6\left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{2}+\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}\right)\geqslant 12\text{(因为当 } x>0 \text{ 时，} x+\frac{1}{x}\geqslant 2\text{)}$$

当且仅当 $\frac{\sqrt{n^2+1}}{2}=1$，即 $n^2=3$ 时上式中等号成立。由于 n 是整数，因此 $n^2\neq 3$，所以上式中等号不可能成立。即 $d>12$。

因为点 P 在直线 l 上，点 P 到原点的距离 $\sqrt{a^2+b^2}$ 必满足 $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant d>12$，而(2)成立要求 $a^2+b^2\leqslant 144$，即 $\sqrt{a^2+b^2}\leqslant 12$。由此可见使得(1)成立的 a 和 b 必不能使(2)成立。

所以，不存在实数 a 和 b 使得(1)、(2)同时成立。

另解：如果实数 a 和 b 使得(1)、(2)同时成立，由(1)得 $na+b=3n^2+15$，即 $b=3n^2+15-na$ (※)，由(2)成立，即 $a^2+b^2\leqslant 144$。

把(※)式代入上式，得关于 a 的不等式

$a^2+(3n^2+15-an)^2\leqslant 144$ 整理得

$(1+n^2)a^2-2n(3n^2+15)a+(3n^2+15)^2-144\leqslant 0$,它的判别式$\Delta=4n^2(3n^2+15)^2-4(1+n^2)[(3n^2+15)-144]=-36(n^2-3)^2$

但 n 是整数,$n^2-3\neq 0$ 因而$\Delta<0$

又$\because 1+n^2>0$,故(※)式不可能有实数解 a,这就表明,不存在实数 a 和 b 使得(1)、(2)同时成立。这是解(1)、(2)混合组来确定其存在性的。

例 9 (1986 年高考题)已知集合 A 和集合 B 各含有 12 个元素,$A\cap B$ 含有 4 个元素,试求同时满足下面两个条件的集合 C 的个数。

(1)$C\subset A\cup B$,且 C 中含有 3 个元素;(2)$C\cap A\neq\varnothing$,

解析 本题考查排列组合、集合对知识与分析问题的能力。将集合概念与排列组合有机结合,题型新颖,博得一片赞美声。解题时首先要明确由 $A\cap B$ 含有 4 个元素,因此,A、B 中有 4 个相同元素,故 $A\cup B$ 的元素为:$8+8+4=20$,其次要知道条件(1)就是要求集合 C 是 $A\cup B$ 的含有 3 个元素的子集,条件(2)就是 C 中至少含有 1 个 A 中的元素。直接法解分为三类:一类是含有 1 个 A 中元素的集合 C 有 $C_{12}^1\cdot C_8^2$ 个;第二类是含有 2 个 A 中元素的集合有 $C_{12}^2C_8^1$ 个;第三类是含有 3 个 A 中元素的集合有 C_{12}^3个。据加法原理,符合条件的集合 C 共有 $C_{12}^1\cdot C_8^2+C_{12}^2\cdot C_8^1+C_{12}^3=1084$(个)或用间接法(去杂法)$C_{20}^3-C_8^3=1084$(个)

例 10 (1991 年上海高考题)如图 1—2,在$\triangle ABC$ 中,$BC=a$,$AC=b$,$AB=c$,$\angle ACB=\theta$,现将$\triangle ABC$ 分别以 BC、AC、AB 所在的直线为轴旋转一周,设所得三个旋转体的体积依次为 V_1、V_2、V_3。

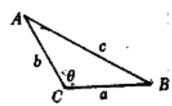

图 1—2

(1)求 $T=\dfrac{V_3}{V_1+V_2}$(用 a、b、c、θ 表示)

(2)若 θ 为定值,并令$\dfrac{a+b}{c}=x$,将 T 表示为 x 的函数,写出这函数的定义域,并求这函数的最大值 u。

(3)当 θ 在$[\dfrac{\pi}{3},\pi)$的变化时,求 u 的最大值。

解析 本题集合了三角、立体几何的有关知识,最后转化为研究函数定义域及最值问题。

(1)在$\triangle ABC$ 中,设 BC、AC、AB 上的高依次为 h_1、h_2、h_3,则 $h_1=b\sin\theta$,

$h_2=a\sin\theta, h_3=\frac{ab\sin\theta}{c}$，故 $V_1=\frac{1}{3}\pi h_1^2a=\frac{\pi}{3}ab^2\sin^2\theta, V_2=\frac{1}{3}\pi h_2^2b=\frac{\pi}{3}a^2b\sin^2\theta$，$V_3=\frac{1}{3}\pi h_3^2c=\frac{\pi}{3}\frac{a^2b^2}{c}\sin^2\theta, T=\frac{V_3}{V_1+V_2}=\frac{ab}{(a+b)c}$.

(2) $\because c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta=(a+b)^2-2ab(1+\cos\theta)$，$\frac{a+b}{c}=x$，$\therefore ab=\frac{(a+b)^2-c^2}{2(1+\cos\theta)}=\frac{[(\frac{a+b}{c})^2-1]c^2}{2(1+\cos\theta)}$ $\therefore T=\frac{1}{2(1+\cos\theta)}(x-\frac{1}{x})$，显然 $x=\frac{a+b}{c}>1$，$\because c^2=(a+b)^2-2ab(1+\cos\theta)\geqslant(a+b)^2-2(\frac{a+b}{2})^2(1+\cos\theta)=\frac{1-\cos\theta}{2}(a+b)^2$，$\therefore x=\frac{a+b}{c}\leqslant\sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta}}$，当 $a=b$ 时等式成立，故函数 T 的定义域为 $(1,\sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta}}]$，因为 T 在 $(1,\sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta}}]$ 上单调递增，故当 $x=\sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta}}$，即 $a=b$ 时，T 取得最大值 $T_{max}=\frac{1}{2(1+\cos\theta)}(\sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta}}-\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}})=\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{1-\cos\theta}}$。即 $u=\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{1-\cos\theta}}$；

(3) $\because\sqrt{1-\cos\theta}$ 在 $[\frac{\pi}{3},\pi)$ 上单调递增，$\therefore u$ 在 $[\frac{\pi}{3},\pi)$ 上单调减少，从而当 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时，u 有最大值 $u_{max}=\frac{1}{2}$.

例 11 (1988 年高考题)给定实数 a，$a\neq0$ 且 $a\neq1$，设函数 $y=\frac{x-1}{ax-1}$ $(x\in R$，且 $x\neq\frac{1}{a})$ 证明：(1)经过这个函数图象上任意两个不同的点的直线不平行于 x 轴；(2)这个函数的图象关于直线 $y=x$ 成轴对称图形。

解析 本题主要考查在正确理解函数图象和轴对称图形概念基础上进行推理的能力，以及灵活运用学过的代数和解析几何知识(互为反函数的图象之间的关系，两条直线平行的条件等)解决问题的能力。

欲证(1)，设 $M_1(x_1,y_1)$，$M_2(x_2,y_2)$ 是这个函数图象上任意两个不同的点，则 $x_1\neq x_2$，且

$$y_2-y_1=\frac{x_2-1}{ax_2-1}-\frac{x_1-1}{ax_1-1}=\frac{(x_2-x_1)(a-1)}{(ax_2-1)(ax_1-1)}$$

$\because a\neq 1$，且 $x_1\neq x_2$，$\therefore y_2-y_1\neq 0$

从而直线 M_1M_2 的斜率 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\neq 0$　因此，M_1M_2 不平行于 x 轴。

(2)只须证明，当点 $P(x_0,y_0)$ 是这个函数的图象上任意一点，则 $x_0\neq \frac{1}{a}$，即有 $y_0=\frac{x_0-1}{ax_0-1}$　①

易知点 $P(x_0,y_0)$ 关于直线 $y=x$ 的对称点 $P'(y_0,x_0)$。

由①式得 $y_0(ax_0-1)=x_0-1$　　即 $x_0=\frac{y_0-1}{ay_0-1}$(可证 $ay_0-1\neq 0$)

这说明点 $P'(y_0,x_0)$ 在已知函数图象上。因此这个函数的图象关于直线 $y=x$ 成轴对称图形。

另一证法是：证明函数 $y=\frac{x-1}{ax-1}$ 的反函数就是它自身。

例12　(1989 年高考题)设 $f(x)$ 是定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上以 2 为周期的函数，对 $k\in z$，用 I_k 表示区间 $(2k-1,2k+1]$，已知当 $x\in I_0$ 时，$f(x)=x^2$.

(1)求 $f(x)$ 在 I_k 上的解析式；

(2)对自然数 k，求集合 $M_k=\{a\mid$ 使方程 $f(x)=ax$ 在 I_k 上有两个不相等的实数根$\}$。

解析　本题考查周期函数的概念及解不等式的能力。由于题目的表述极不通俗，增加了题目的抽象性和难度。要注意命题的转换，将原问题表述成等价的易于求解的新命题，数形结合及数形转化就是重要的转换。

(1) $\because f(x)$ 是以 2 为周期的函数，当 $k\in z$ 时，$2k$ 是 $f(x)$ 的周期，又 $\because$ 当 $x\in I_k$ 时，$x-2k\in I_0$，$\therefore f(x)=f(x-2k)=(x-2k)^2$，即对 $k\in z$，当 $x\in I_k$，　$f(x)=(x-2k)^2$

(2)当 $k\in N$，且 $x\in I_k$ 时，利用(1)的结论可得方程 $(x-2k)^2=ax$，整理得 $x^2-(4k+a)x+4k^2=0$。

它的判别式是 $\triangle=(4k+a)^2-16k^2=a(a+8k)$。

上述方程在区间 I_k 上恰有两个不相等的实根的充要条件是 a 满足

$$\begin{cases} a(a+8k)>0 \\ 2k-1<\frac{1}{2}[4k+a-\sqrt{a(a+8k)}] \\ 2k+1\geqslant\frac{1}{2}[4k+a+\sqrt{a(a+8k)}] \end{cases}$$ 化简得

$$\begin{cases} a(a+8k)>0 & ① \\ \sqrt{a(a+8k)}<2+a & ② \\ \sqrt{a(a+8k)}\leqslant 2-a & ③ \end{cases}$$

由①知 $a>0$ 或 $a<-8k$

1 当 $a>0$ 时，因 $2+a>2-a$，故从②，③可得 $\sqrt{a(a+8k)}\leqslant 2-a$

即 $\begin{cases} a(a+8k)\leqslant(2-a)^2 \\ 2-a>0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} (2k+1)a\leqslant 1 \\ a<2 \end{cases}$ 即 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2k+1}$

2 当 $a<-8k$ 时，$2+a<2-8k<0$，易知 $\sqrt{a(a+8k)}<2+a$ 无解。

综上所述 a 应满足 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2k+1}$，故所求集合 $M_k=\{a\,|\,0<a\leqslant\dfrac{1}{2k+1}\}$

另解：将原题转化为：求使直线 $y=ax$ 与曲线 $y=(x-2k)^2$ 在 $x\in(2k-1,2k+1]$ 上有两个不同交点时 a 的取值范围。运用数形结合的方法，在 $(2k-1,2k+1]$ 上画出抛物线 $y=(x-2k)^2$ 的一段 ABC，如图 1—3。直线 OC 的斜率为 $\dfrac{1}{2k+1}$，直线 $y=ax$ 与这段抛物线有两个交点时，有 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2k+1}$，

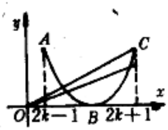

图 1—3

$\therefore M_k=\{a\,|\,0<a\leqslant\dfrac{1}{2k+1},k\in N\}$

例 13 （1983 年高考题）在圆心为 O，半径为常数 R 的半圆板内画内接矩形（如图 1－4），当矩形的长和宽各取多少时，矩形面积最大？求出这个最大面积。

解析 本题考查利用已知条件列函数式，用配方法或利用三角函数求极值的能力。利用二次函数的性质求函数最值问题是一种重要的常用方法，而利用三角函数 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$ 在解决一些与角有关的最大（小）值问题有时更简捷。首先设 $OB=x$，则 $BC=\sqrt{R^2-x^2}$

矩形面积 $S=2x\sqrt{R^2-x^2}$

配方得 $S=2\sqrt{-x^4+R^2x^2}=2\sqrt{-(x^2-\dfrac{R^2}{2})^2+\dfrac{R^4}{4}}$

当 $x^2=\frac{R^2}{2}$ 即 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}R$ 时，S 最大，

此时矩形长为 $\sqrt{2}R$，宽为 $\frac{\sqrt{2}}{2}R$，最大面积是 R^2

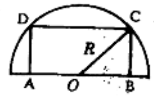

图 1—4

另解：设 $\angle COB=\alpha$，则 $AB=2R\cos\alpha$，$BC=R\sin\alpha$，$S=2R\cos\alpha R\sin\alpha=R^2\sin2\alpha$，

当 $2\alpha=\frac{\pi}{2}$ 即 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，长为 $\sqrt{2}R$、宽为 $\frac{\sqrt{2}}{2}R$，最大面积为 R^2。

例 14 （1981 年高考题）设 1980 年底我国人口以 10 亿计算。

（1）如果我国人口每年比上年平均递增 2%，那么到 2000 年底将达到多少？

（2）要使 2000 年底我国人口不超过 12 亿，那么每年比上年平均递增率最高是多少？

解析 本题是复利公式的一个应用题，$A=a(1+x)^n$，A：本利和，a：本金，x：利率，n：年或月，应用对数方法处理连续增长（或降低）的实际问题十分有效，可以解决高次运算所带来的困难。高考中 n 搞错的人很多。

（1）$A=10\times(1+2\%)^{20}$，$\lg A\doteq1+20\lg1.02$ $\therefore A\doteq14.859$（亿）

（2）设人口每年比上年平均增长率最高为 x，则 $12=10(1+x)^{20}$，解得 $x=0.92\%$

例 15 （1984 年高考题）设 c、d、x 为实数，$c\neq0$，x 为未知数，讨论方程 $\log_{(cx+\frac{d}{x})}x=-1$ 在什么情况下有解？有解时求出它的解。

解析 本题综合考查对数函数的基本概念，对数方程的解法和分析问题的能力。解对数方程，必须保证每一变形过程的同解性，否则就有可能产生增根，因此必须检验，本题也是最早出现的含参数问题，原方程有解的充要条件是

$$\begin{cases} x>0 & ① \\ cx+\frac{d}{x}>0 & ② \\ cx+\frac{d}{x}\neq1 & ③ \\ (cx+\frac{d}{x})^{-1}=x & ④ \end{cases}$$

由④，得 $cx^2+d=1$，而 $c\neq0$，$\therefore x^2=\frac{1-d}{c}$

又由④及 $x>0$，知 $cx+\frac{d}{x}>0$。即②包含在①及④中，再由③及 $x(cx+\frac{d}{x})=1$ 知 $x\neq 1$ 于是得

$$\begin{cases} x>0 & ① \\ x\neq 1 & ⑥ \\ x^2=\frac{1-d}{c} & ⑦ \end{cases}$$

由①、⑥知 $\frac{1-d}{c}>0$，即 $\begin{cases} 1-d>0 \\ c>0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1-d<0 \\ c<0 \end{cases}$ 且 $\frac{1-d}{c}\neq 1$　$\therefore 1-d\neq c$

故当 $c>0, d<1$ 且 $c\neq 1-d$ 或 $c<0, d>1$ 且 $c\neq 1-d$ 时原方程有解，其解为 $x=\sqrt{\frac{1-d}{c}}$，经检验原方程的解是 $x=\sqrt{\frac{1-d}{c}}$

例16　（1985年广东高考题）设函数 $f(x)=\log_3(x^2-4mx+4m^2+m+\frac{1}{m-1})$，其中 $m\in R$，又用 M 表示集合 $\{m|m>1\}$

(1)求证，当 $m\in M$ 时，$f(x)$ 对所有实数 x 都有意义；反之，如果 $f(x)$ 对所有实数 x 都有意义，那么 $m\in M$。

(2)当 $m\in M$ 时，求函数 $f(x)$ 的最小值。

(3)求证：对每一个 $m\in M$，函数 $f(x)$ 的最小值都不小于 1。

解析　本题综合考查对数函数的基本知识，充要条件，不等式的基本知识，解不等式的能力及分析问题的能力。考查的知识点较多，涉及的面较广，给出的函数是二次函数和对数函数的复合函数，且含有参数 m，要正确而完整地解好本题，需要有较强的思维能力和应变能力。

(1)当 $m\in M$ 时，有 $m>1$，从而对任意实数 x 有 $x^2-4mx+4m^2+m+\frac{1}{m-1}=(x-2m)^2+m+\frac{1}{m-1}>0$，因此 $f(x)=\log_3(x^4-4mx+4m^2+m+\frac{1}{m-1})$ 对所有实数 x 都有意义；

反之，如果 $f(x)$ 对所有实数 x 都有意义，则 $x^2-4mx+4m^2+m+\frac{1}{m-1}>0$　特别地当 $x=2m$ 时，$m+\frac{1}{m-1}>0$，即 $\frac{m^2-m+1}{m-1}>0$

$\because m^2+m+1>0$　$\therefore m-1>0$，故 $m>1$。　从而 $m\in M$.

(2) $\because$ 以 3 为底的对数函数是增函数，

$\therefore f(x)=\log_3[(x-2m)^2+m+\frac{1}{m-1}]\geqslant\log_3(m+\frac{1}{m-1})$

又$\because f(2m)=\log_3(m+\frac{1}{m-1})$,

$\therefore$当 $m\in M$ 时,$f(x)$的最小值是 $\log_3(m+\frac{1}{m-1})$

(3)证明当 $m\in M$ 时,有 $m>1,m-1>0$,

$\therefore m+\frac{1}{m-1}=(m-1)+\frac{1}{m-1}+1\geqslant 2\sqrt{(m-1)\cdot\frac{1}{m-1}}+1=3$ 故 $\log_3(m+\frac{1}{m-1})\geqslant\log_3 3=1$.

因此,根据(2)的结果可知,对于每一个 $m\in M$,$f(x)$的最小值都不小于 1。

评注:1. $f(x)$对所有实数 x 都有意义和 $m\in M$(即 $m>1$)的充要关系的证明:当 $m>1$ 时,$x^2-4mx+4m^2+m+\frac{1}{m-1}=(x-2m)^2+m+\frac{1}{m-1}\geqslant m+\frac{1}{m-1}>0$,反之,证 $m>1$ 并非利用上述过程的可逆性,而是利用取 x 的特定值 $2m$,使条件转化为 $m+\frac{1}{m-1}>0$,然后证得 $m>1$ 的;

2. 要正确区分第(2)小题中的 $f(x)$的最小值与第(3)小题中 $f(x)$的最小值的最小值,第(2)问最小值含有参数 m,而第(3)小题的最小值才是真正的数值。

例 17 (1989 年高考题)已知 $a>0,a\neq 1$,试求使方程 $\log_a(x-ak)=\log_{a^2}(x^2-a^2)$有解的 k 的取值范围。

解析 本题考查对数函数的性质和解对数方程的能力,对含有代表常数的字母的处理能力和解不等式的能力,讨论对数方程有解的 k 的范围,必须将它转化为代数方程。由对数函数的性质可知,原方程的解 x 满足

$$\begin{cases}(x-ak)^2=x^2-a^2 & ①\\ x-ak>0 & ②\\ x^2-a^2>0 & ③\end{cases}$$

当①、②同时成立,③显然成立,

只需解$\begin{cases}(x-ak)^2=x^2-a^2 & ①\\ x-ak>0 & ②\end{cases}$

由①得 $2kx=a(1+k^2)$ ④

当 $k=0$ 时，由 $a>0$ 知④无解。因而原方程无解。

当 $k\neq 0$ 时，④的解 $x=\dfrac{a(1+k^2)}{2k}$ ⑤ 将⑤代入②得，$\dfrac{1+k^2}{2k}>k$，解得 $k\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$ 此时原方程有解。

评注：1. 解①②③混合组经分析，可省去③，简化了运算，要掌握好这种技巧。

2. 解混合组①、②的方法，是以等量代入不等量，即①代入②，从而解出 k 值。

3. 得到④后，不能糊里糊涂得到 $x=\dfrac{a(1+k^2)}{2k}$ 而是假设 $k=0$ 时，④式不成立，从而知 $k\neq 0$，这是一个小反证，也应引起重视小反证在解题中的应用。

例 18 （1993 年高考题）已知 $f(x)=\log_a\dfrac{1+x}{1-x}(a>0,a\neq 1)$。

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的定义域；

（Ⅱ）判断 $f(x)$ 的奇偶性并予以证明；

（Ⅲ）求使 $f(x)>0$ 的 x 取值范围。

解析 本题考查函数的奇偶性，对数函数的性质，不等式的性质和解法等基本知识及运算能力。

（Ⅰ）由对数函数的定义知 $\dfrac{1+x}{1-x}>0$，$-1<x<1$，故 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$。

（Ⅱ）$\because f(-x)=\log_a\dfrac{1-x}{1+x}=-f(x)$，$\therefore f(x)$ 是奇函数。

（Ⅲ）(i) 对 $a>1$，$\log_a\dfrac{1+x}{1-x}>0\Leftrightarrow\dfrac{1+x}{1-x}>1\Leftrightarrow x>0$，故对 $a>1$，当 $x\in(0,1)$ 时 $f(x)>0$。

(ii) $0<a<1$，$\log_a\dfrac{1+x}{1-x}>0$，解得 $-1<x<0$ 即 $x\in(-1,0)$ 时 $f(x)>0$

例 19 解方程：

(1)（1989 年高考题）$9^{-x}-2.3^{1-x}=27$

(2)（1986 年高考题）$\log_4(3-x)+\log_{0.25}(3+x)=\log_4(1-x)+\log_{0.25}$

$(2x+1)$。

解析 指数方程、对数方程的解法是学生必须掌握的技能，历年高考都要从不同角度考查。因此对于这些方程的基本类型的解法及变形技巧必须掌握。另外，解对数方程应注意验根。

(1)原方程可化为$(\frac{1}{3^x})^2-6\cdot\frac{1}{3^x}-27=0$，$\therefore\frac{1}{3^x}=9$或$\frac{1}{3^x}=-3$(舍)

$\therefore x=-2$。

(2)由原方程得$\log_4\frac{3-x}{1-x}=\log_{0.25}\frac{2x+1}{3+x}$即$\log_4\frac{3-x}{1-x}=-\log_4\frac{2x+1}{3+x}$

$\therefore\log_4\frac{3-x}{1-x}=\log_4\frac{3+x}{2x+1}$　$\therefore\frac{3-x}{1-x}=\frac{3+x}{2x+1}$解得$x=0$或$x=7$，经检验$x=0$是原方程的根，$x=7$是增根，舍去。

Ⅱ．命题热点与规律探析

函数是贯穿中学数学全部内容的主线，是初等数学与高等数学衔接部分，是承上启下的必备知识，自然就成为高考命题的热点。历年高考函数部分试题占有很大比重，平均达15%，1989年甚至高达29%。所考查的内容覆盖中学函数部分的所有知识点，即定义域、值域、反函数、奇偶数、单调性、幂函数、指数函数、对数函数、换底公式、指数方程、对数方程等，利用函数的理论和方法处理式、方程、不等式、数列、以至立体几何、解析几何等各种类型的问题，并进行综合性考查的试题几乎每一年的高考题中都有体现。

函数这一章，几乎涉及到中学数学里所有的数学思想方法。例如，数形结合的思想，函数与方程的思想，分类讨论的思想和等价转化的思想。函数的解题方法，用到了很多典型的基本方法，例如，配方法、待定系数法、数学归纳法、换元法、消元法、反证法、比较法、代入法、分类讨论和数形结合等很多方法。因此学好中学数学，函数是基础，函数是重点。

1995年高考在函数方面命题与往年相似，即面广题多、重基础考能力。要注意灵活运用和综合运用知识的能力，1994年高考题的一个突出特点就是加强了对数学语言的考查，这是一个重要的导向。例如第(20)题，是联系实际的应用题，求最佳近似值a的表达式，这个题目设计了物理中的背景，考查学生用数学的意识，在将文字语言转化为符号语言得