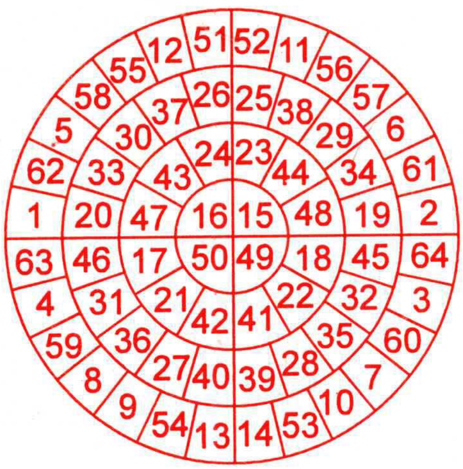
幻圆新说

（增修版）

江 健 著

8 阶 幻 圆



S=260

香港天马图书有限公司

目 录

上篇 序数幻圆

下篇 素数幻圆

幻 圆 新 说

上篇　序数幻圆①

幻圆图是从幻方变形来的，它与幻方一样能用1-n^2个连续自然数既不重复又不遗漏地填满幻图，且幻和与同阶幻方的幻和相等。探索的是幻圆数图的编制与规律。

概念与定义

幻圆图　在（n+1）/2（奇）、n/2（偶）个同心圆中，过圆心的x、y直角坐标轴将同心圆分成四个象限，设过圆心直径线的辅轴将直角坐标轴分成45角。每象限从2圆起以2、4、6、8……偶序数递增给每一圆弧段分格，外圆是n-1格，1圆作1格共n^2个格（n为奇数）；每象限从1圆起以1、3、5、7……奇序数递增给每一圆弧段分格（辅轴被相应格包含填有实数），外圆是n-1格共n^2个格（n为偶数）。奇、偶阶同心圆都是n^2个格，能填满n^2个连续自然数这就是幻圆图。

对顶互补数　幻圆图少有直径夹角，但所有格都是同圆对顶夹角格。我们把同圆对顶夹角格所填两数和定为1+n^2的和，称同圆对顶互补数（简称互补数，符号R）。这是幻圆数图的基本要素。（图1、2、3）是3阶幻圆对顶互补数的示例。

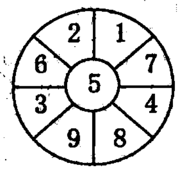


图1

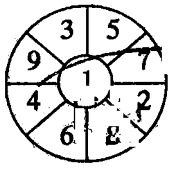


图2

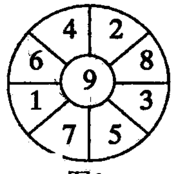


图3

幻和

幻和是幻圆的根本要素

偶阶幻圆n/2对顶互补数的和等于幻和；奇阶幻圆（n-1）/2对顶互补与n×n连续自然数的中心数（1圆数）和等于幻和这不定形的幻和称圆上幻和，即第一定义幻和。

偶阶幻圆中有一个全圆、两个半圆（同圆）的格数是n个；奇阶幻圆中有一个全圆，两个半圆（同圆）的格数是n-1个，四象限内有两个（或三个）圆弧段内格数相加，分别与1圆是n个格。它们填数是n个数，亦是n阶幻和。凡全圆、半圆、四象限内格数等于或相加等于n个数，且和等于幻和称圆内幻和，即第二定义幻和。

近似互补数　编制幻圆数图以一小一大两数填于同象限同圆相邻两格或主辅轴对称位，两数和大于、小于对顶互补数（1+n^2）和的数称近似互补数（简称近似数，符号∽）。近似数与互补数差是1、2、3。近似数是编制幻圆的便利要素。

幻和、互补数、近似数是编制幻圆数图的三要素。幻和要素不动摇、互补要素不能变、近似要素在用近似数编制的幻圆中可生出准近似数、次近似数(图1、2、3)也是近似数的示例。

幻圆图制作原理　幻圆图是幻方图的变形。从8阶、9阶幻方、幻圆（图4、5、6、7）比照图来看：8阶幻方两条对角线上数相交于中心点四格四数，一格一数。幻方中心四格正方形

① 序数指连续自然数

外，每一个正方形格数是12、20、28；幻圆2、3、4圆也是12、20、28格，所以能既不重复又不遗漏地填入64个数。9阶幻方两条对角线上数相交于中心一格一数，9阶幻圆一圆一个数。幻方中心格外每一个正方格数是8、16、24、32，幻圆2、3、4、5圆也是8、16、24、32格，也能既不重复又不遗漏地填入81个数。偶阶幻圆每圆格数成奇数等比递增数列，公比4；奇阶幻圆图从2圆起成偶数递增等比数列，公比4。当n偶阶大于3、奇阶大于2时，都可以制作成幻圆图。据此这就是幻圆图制作的原理。

1	2	62	61	60	59	7	8
9	10	54	53	52	51	15	16
24	23	19	45	44	22	42	41
32	31	38	28	29	35	34	33
40	49	30	36	37	27	26	25
48	47	43	21	20	46	18	17
49	50	11	12	13	14	55	56
57	58	3	4	5	6	63	64

图4

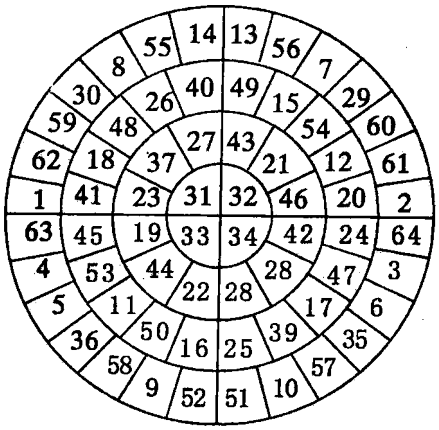


图5

5	46	15	56	25	66	35	76	45
54	14	55	24	65	34	75	44	4
13	63	23	64	33	74	43	3	53
62	22	72	32	73	42	2	52	12
21	71	31	81	41	1	51	11	61
70	30	80	40	9	50	10	60	20
29	79	39	8	49	18	59	19	69
78	38	7	18	17	58	27	68	28
37	6	47	16	57	26	67	36	77

图6

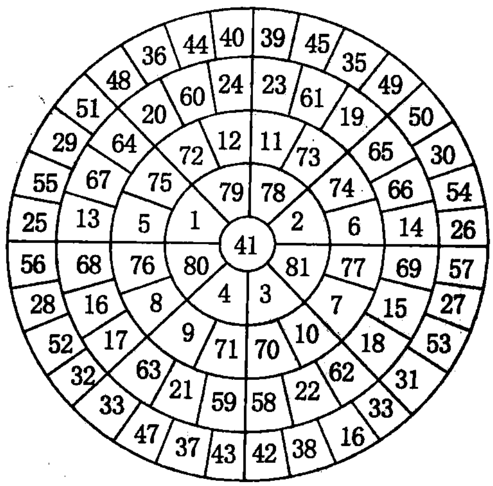


图7

幻圆定义：

幻圆图用于幻方图其理成其形，用其形变数、位生两幻和，用幻方的互补数、又实践出近似数。据此图此幻和给幻圆定义：在n/2（偶）、（n+1）/2(奇)个同心圆，由垂轴分成四象限（辅轴将每象限分成45角，偶阶虚线）中，从内2圆起，奇按偶（2），偶按奇（3）起，偶、奇递增至n-1的对顶格中（奇1圆1数，偶1圆1象限1数），既不重复，又不遗漏地填入1-n^2个连续自然数。全圆、半圆、四象限中两（或三）圆，任意对互补格（奇加$1\odot_1$数）的n个数之和相等，且等于同阶幻方和，我们称之为幻圆。

第一章　奇数阶幻圆

奇数阶幻圆1圆填连续自然数的中心数；圆上幻和、圆内幻和都要加1圆数，这是奇数阶幻圆的特异点。奇数阶幻圆编制用双轴组合法、近似互补法，以近似互补法为主。近似互补法也是笔者探索较为方便成熟的编制幻圆的步法。

一、奇数阶双轴组合幻圆

双轴组合由四象限图分位、数分段、段位相应。主辅轴两侧为双轴位，双轴位相夹为四象限位。因取1-n^2中段数先填双轴位数，故称双轴组合法。四象限位取中心数段的前沿后续数填入。双轴组合必须双轴位、四象限位共存的情况下（n≥9）才能使组合成立。

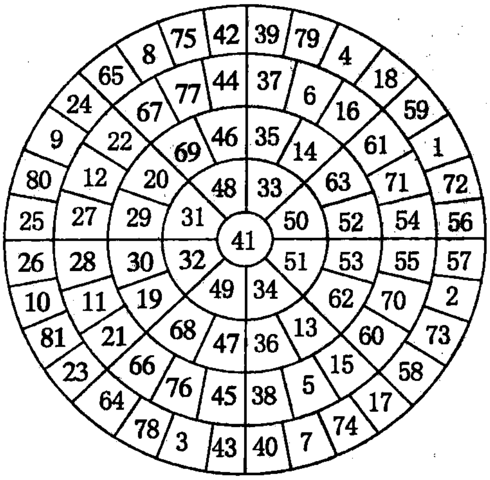


图1-1

9阶双轴组合段位相应式

图1-1　n=9 R=82 S=369 取数：1-81连续自然数　$1\odot$：41 幻和组：1、任意对顶互补数4组$+1\odot_1=S$（以下圆上幻和均以$n/2\cdot R$、$(n-1)/2\cdot R+1\odot_1$表示）。2、全圆：$2\odot_8+1\odot_1=S$　半圆(X轴上下或Y轴左右)$3\odot_8+1\odot_1=S$四象限：$2\odot_2+4\odot_6+1\odot_1=S$ $5\odot_8+1\odot_1=S$

编制步法：1、双轴位56格取13-40、69-42两数一对和82的28个互补数，从X轴左段外圆、Y轴右侧，25、26始步，上下奇偶相续；X轴右段、Y轴左侧同步填各数对顶互补数。辅轴先右外后左内（与X轴相夹为内、与Y轴相夹为外）从$3\odot$起上偶下奇续填到外圆转步到左内$3\odot$相续填到外圆，对顶互补数同步填。双轴位填结束，$2\odot_8+4\odot_1=S$ X轴上下半圆$3\odot_8+4\odot_1=S$。

2、四象限位$4\odot$取70-73、12-9. 4对互补数，70、71填4、1象限，互补数12、11同步填。这时9、10填4、1象限，$4\odot_6+2\odot_2+41$不等于369。取5、6填4、1象限，对顶互补数77、76填2、3象限对顶互补格位。四象限$4\odot_6+2\odot_2+41=$

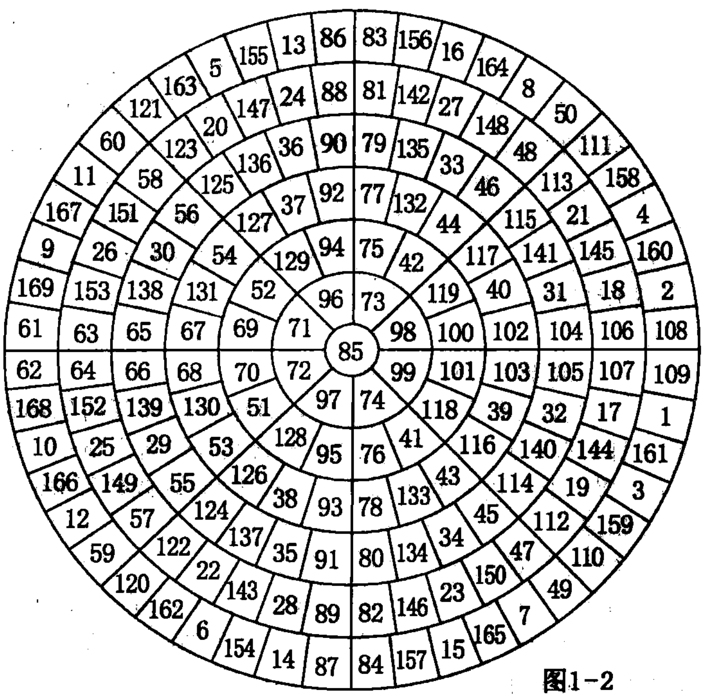


图1-2

S。9、10与72、73推向5⊙与未用的互补对子数按各象差额组合，不讲排列，只要达到5⊙每象限8数与41的和等于幻和。数图填入的各数符合$5\odot_8+41=S$。圆内幻和规范。

2、3、4、5⊙同圆对顶格两数都是互补数，和等于82。圆上幻和也符合规范。

13阶双轴组合段位全相应式

图1-2　n=13 R=170 S=1105 取数1-169连续自然数　1⊙：85

幻和组：1、6R+85=S　2、半圆：X轴上下$4\odot_{12}+85=S$　四象限$2\odot_2+6\odot_{10}+85=S$　$3\odot_4+5\odot_8+85=S$　$7\odot_{12}+85=S$（若4⊙37与38互换、互补同步则$2\odot_2+3\odot_4+4\odot_6+85=S$）

编制步法：1、双轴位取中心段数41-84与129-86两组44个互补数对子，换步与9阶相同。2、四象限位4⊙取40-37与130-133列表1，依X轴上下$4\odot_{12}+85=S$配对。5⊙取36-29与134-141列表2依$5\odot_8+3\odot_4+85=S$配对。6⊙取28-17与142-153依$6\odot_{10}+2\odot_2+85=S$配对。7⊙取16-1与154-169依$7\odot_{12}+85=S$配对。用线段相连表示的两数一对近似数，分别填1、4象限各圆内位，2、3象限同步填各数同列的互补数。各幻和均成立。

表1（4⊙）37　38　39　40

133　132　131　130

表2（5⊙）29　30　31　32　33　34　35　36

141　140　139　138　137　136　135　134

表3（6⊙）17　18　19　20　21　22　23　24　25　26　27　28

153　152　151　150　149　148　147　146　145　144　143　142

表4（7⊙）1　2　3　4　5　6　7　8　9　10　11　12　13　14　15　16

169　168　167　166　165　164　163　162　161　160　159　158　157　156　155　154

线段标示数及同列互补数；表1、表2、表4　172、168，表3　169、171，都大于、小于互补数1、2，近似数就是从这里产生的（大于、小于互补数4以上是准近似数）。

双轴组合法特征：1、双轴位取中心段数不变。2、四象限位组合可调用前沿后续数，有一定灵活性。3、以互补数为基准数派生出近似数，省略计算。4、近似数引伸出近似互补法，可谓水到渠成。

二、奇数阶近似数幻圆

一个幻圆都用近似数编制，且圆上幻和圆内幻和都符合规范，称近似互补法。用近似数编制奇数阶幻圆分4m+1、4m+3（m≥1）两类。4m+1用两对近似数，4m+3用4对近似数可编制成幻和规范的幻圆。

4m+1近似数幻圆

图1-3　m=1 n=5 R=26 S=65 ∽：24、28　取数：1-25　1⊙：13　幻和组：1、$2R+1\odot_1=S$　2、半圆：y轴左右$2\odot_4+1\odot_1=S$　四象限：$3\odot_4+1\odot_1=S$

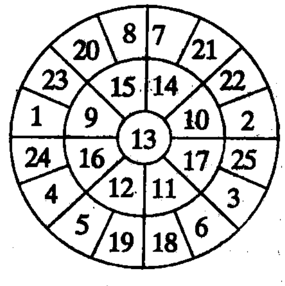


图1-3

编制步法：1、从外圆小数1始步，X轴上左右，下右左顺时针向，互补数同步一轮循环，近似数X轴上24、下28。

2、5相续4邻格，变步变逆时针向，互补数同步，一轮循环。近似数X轴上28、下24。外圆数填满，四象限各相同两对近似数24、28，与1⊙13和等于幻和。

3、9-12从2⊙X轴左上始步。顺时针向，互补数同步一轮循环。近似数X轴上24、下28。所以Y轴左右$2\odot_4$与$1\odot_1$数和等于幻和。圆内幻和规范，圆上幻和也规范。

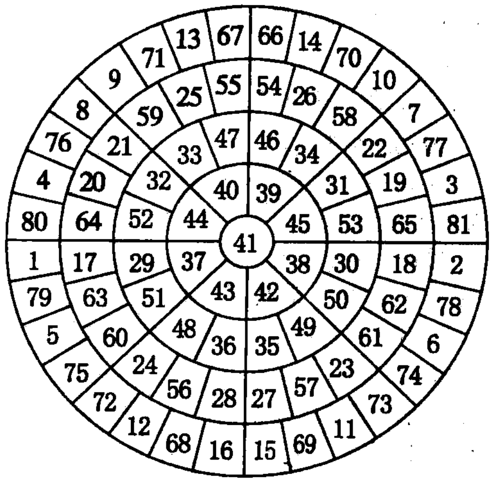


图1-4

图1-4 m=2 n=9 R=82 S=369 ∽：80、84 取数：1-81 1⊙：41 幻和组：1、$4R+1\odot_1=S$ 2、全圆$2\odot_8+1\odot_1=S$ 半圆：X轴上下、Y轴左右$3\odot_8+1\odot_1=S$ 四象限：$2\odot_2+4\odot_6+1\odot_1=S$ $5\odot_8+1\odot_1=S$

编制步法：1、外圆始步在X轴左下逆时针向，辅轴内二轮循环，互补数同步。近似数X轴上84下80。辅轴外9相续8，变步变顺时针向二轮循环，互补数同步。变步变顺时针向二轮循环，互补数同步，近似数X轴上80、下84。

2、4⊙始步一轮循环与外圆相同，辅轴内21相续20邻格，变步变向二轮循环，互补数同步，近似数1、2象限，1对84、2对80，3、4象限1对80、2对84。四象限$4\odot_8+2\odot_2+1\odot_1=S$。$2\odot_2$近似数X轴上必须是84，X轴下80。

3、3⊙、2⊙与外圆相同。近似数3⊙四象限84、80各1对，2⊙X轴上84、下80。所以X轴上下、Y轴左右$3\odot_8+1\odot_1$都等于幻和，四象限$2\odot_2+4\odot_6+1\odot_1=S$。

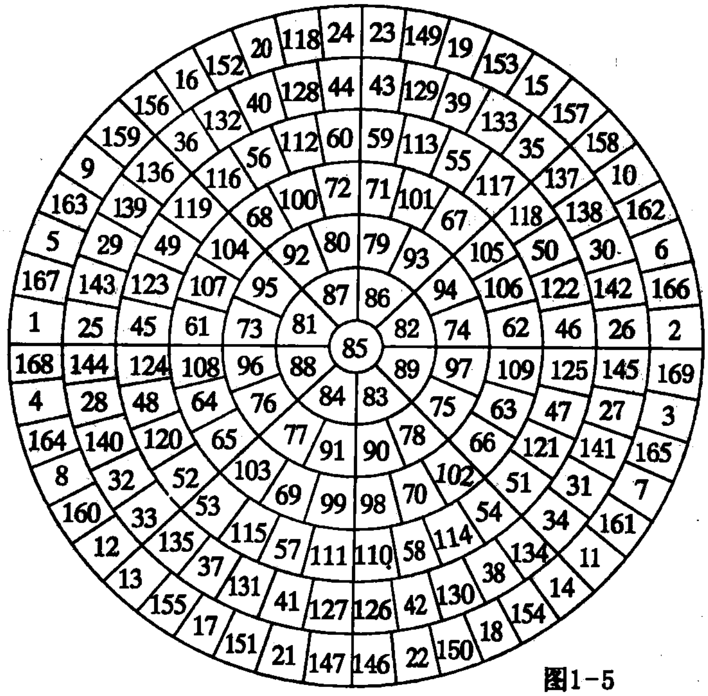


图1-5

图1-5 m=3 n=13 R=170 S=1105 ∽：172、168取数：1-169 1⊙：85 幻和组：1、$6R+1\odot_1=S$ 2、半圆：Y轴左右$2\odot_4+3\odot_8+1\odot_1=S$ $4\odot_{12}+1\odot_1=S$ 四象限$2\odot_2+6\odot_{10}+1\odot_1=S$ $3\odot_4+5\odot_8+1\odot_1=S$ $7\odot_{12}+1\odot_1=S$

编制步法：1、7⊙、5⊙、3⊙、2⊙循环变步、变向与5阶相同，从1、45、73、81始步序

数相续，各互补数同步。7⊙三轮顺循环，2⊙一轮顺循环。近似数X轴上辅轴内168、下172，辅轴外上172、下168。

2、6⊙、4⊙始步25、61相续7⊙、5⊙，6⊙二轮循环、4⊙一轮循环后（互补数同步），辅轴内33相续32、65相续64变步、变向逆循环。近似数变步、变向前，X轴上168、下172，变化、变向后辅轴两侧，辅轴外上172、下168。所以Y轴左右，$2\odot_4+3\odot_8+1\odot_1=S$　$4\odot_{12}+1\odot_1=S$四象限$6\odot_{10}+2\odot_2+1\odot_1=S$。3⊙、5⊙、7⊙辅轴内外两对近似数相等，故$3\odot_4+5\odot_8+1\odot_1=S$　$7\odot_{12}+1\odot_1=S$。圆内幻和规范，圆上幻和也自然规范。

4m+3近似数幻圆

n=4m+3幻圆不存在全圆、半圆幻和。m=1时7阶幻圆要用6对近似数。

图1-6 m=1 n=7 R=50 S=175 ∽：51、52、53＞R＞47、48、49　取数：1-49 1⊙：25　幻和组：1、$3R+1\odot_1=S$ 2、四象限：$2\odot_2+3\odot_4+1\odot_1=S$ $4\odot_6+1\odot_1=S$

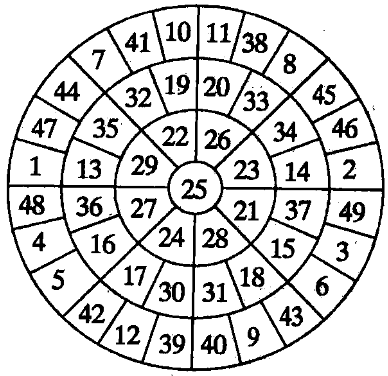


图1-6

编制步法：1、始步与4m+1相同。一轮循环近似数48、52。5、6在辅轴内与4、3相续。7、8、9、10与始步同步同向，11、12虽变步变逆向，但12与10要换位，互补数同步，才能使$4\odot_6+1\odot_1=S$。近似数47、49、51、53。

2、3⊙始步、变步与4m+1相同，互补数同步，二轮循环。2⊙则要换位，21、23、22、24X轴对称，互补数同步。四象限$2\odot_2+3\odot_4+1\odot_1=S$才能成立。2⊙、3⊙近似数与4⊙各象限相同。

说明：若不换位不变向则会出现相邻两数和是50。50是互补数，它不能出现在X、Y轴同侧，又是幻圆基本要素不能变，换位、变向近似数与互补差1、2、3不变。

图1-7 m=2 n=11 R=122 S=671∽：123、124＞R＞120、121取数：1-121、1⊙：61　幻和组：1、5R+61=S 2、四象限：$2\odot_2+5\odot_8+1\odot_1=S$ $3\odot_4+4\odot_6+1\odot_1=S$ $6\odot_{10}+1\odot_1=S$

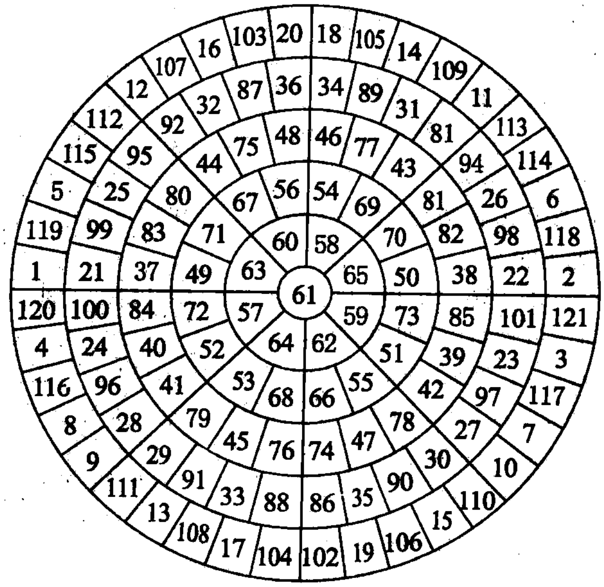


图1-7

编制步法：1、始步6⊙小数1-8二轮循环，互补数同步，近似数X轴上120、下124。9、10相续8、7邻格，变步变逆时针向一轮循环，互补数同步，再变数不变步、不变向二轮循环，互补数同步。X轴下变奇数、Y轴上变偶数。二轮循环近似数奇数序相续121、偶数序相续123。辅轴两侧近似数124、120。两侧另8数四对近似数120、123，124、121各居上下，与61构成规范的幻和。

2、5⊙始步与6⊙相同，互补数同步，二轮循环，近似数120、124。后小数相续在辅轴内

外，互补数同步。一轮循环，下奇上偶序相续一轮循环，互补数同步，近似数奇序121、偶序123。

3、4⊙始步近似数120、124一轮循环，互补数同步。后小数相续变步变向变换近似数120、124一轮循环后再变奇、偶相续近似数123、121一轮循环。3⊙小数顺、逆向相续在辅轴两侧，并变数各一轮循环。近似数辅轴内120、124，辅轴外123、121。2⊙近似数1、2象限必须123。3、4象限必须121。奇、偶相续一轮循环，互数同步。这样四象限$2\odot_2+5\odot_8+1\odot_1=S$ $3\odot_4+4\odot_6+1\odot_1=S$构成规范的幻和。

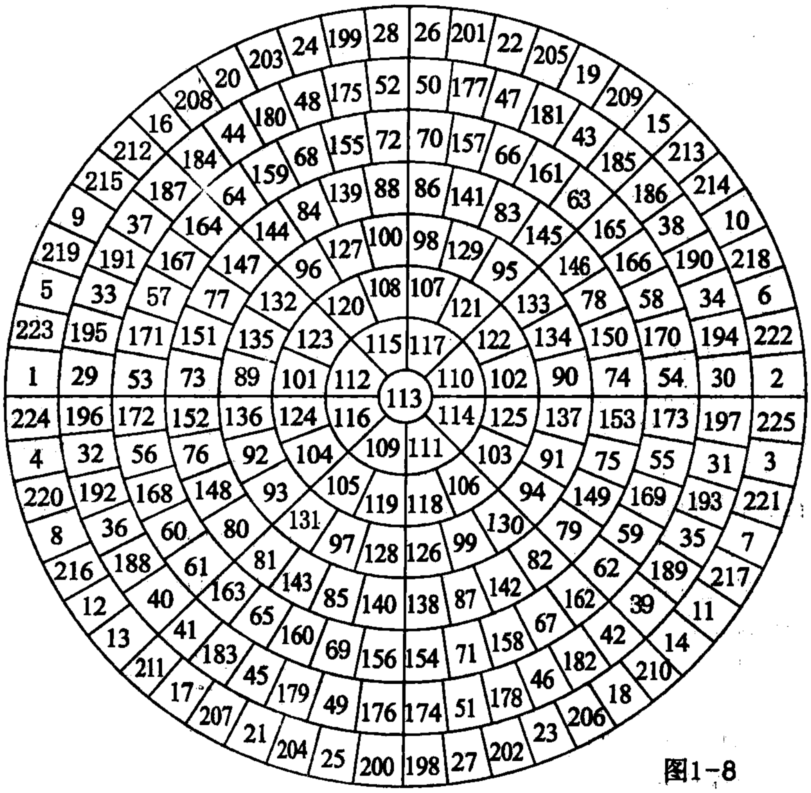


图1-8

图 1-8　m=3　n=15　R=226　S=1695　∽：224、225<R<227、228　取数：1-225　1⊙：113　幻和组：1、$7R+1\odot_1=S$　2、四象限：$2\odot_2+7\odot_{12}+1\odot_1=S$　$3\odot_4+6\odot_{10}+1\odot_1=S$　$4\odot_6+5\odot_8+1\odot_1=S$　$8\odot_{14}+1\odot_1=S$

15阶幻圆与11阶编制相同。由外圆向内圆，从小数1起，大数互补同步，先顺时针向循环，后逆时针向循环。当四象限位数是单偶时，小数相续在辅轴内侧，变步变向变近似数二轮、一轮循环后，变奇续奇、偶续偶，互补数同步二轮一轮循环。四象限位数是双偶数时，小数相续在辅轴两侧，仍是二轮、一轮循环后，变奇续奇、偶续偶，互补数同步。1、2象限幻和组近似数依次是3对224、2对228、2对227，3、4象限则是3对228、2对224、2对225。225是奇数相续与偶数合成，227是偶数相续与奇数合成。

N=4m+3阶幻圆编制（7阶特例），因幻和位在四象限单偶位数，两对近似数与$1\odot_1$是无法组合幻和的。在大于、小于互补数2的两对近似数后，必须用大于小于互补数1的近似数的组才能成立。这就是先变奇数序相续、后变偶数序相续不变向循环。奇偶分序相续，近似数><互补数1概念，用4对近似数是近似数><互补数1而得出的。

奇数阶4m+1、4m+3幻圆特征：1、由外圆向内圆、小数始步、大数互补，大小数互补两段与各圆位呼应，没有越位数。2、小数始步循环大数同步互补，小数顺向、大数逆向。反之亦然。3、小数、大数相续，四象限位数是单偶时在辅轴内、双偶时在辅轴两侧。4、由连续数序变先奇后偶循环，一轮循环而生变数概念。

第二章　偶数阶幻圆

偶数阶幻圆图辅轴位填有实数辅轴为制图方便而设的虚轴。偶数阶幻圆编制仍分双轴组合法与近似互补法。

一、偶数阶双轴组合幻圆

偶数阶双轴组合与奇数阶有两点区别：1、1⊙先不定数。2、外圆四象限（n-1）个数与Y轴左右一数组合幻和组。双轴四象限位组合方式相同。

图2-1 8阶双轴组合R=65 S=260，幻和组：1、4R=S 2、半圆：X轴上下$2\odot_6+1\odot_2=S$ 四象限：$2\odot_3+3\odot_5=S$ $4\odot_7$+Y轴左右1数=S

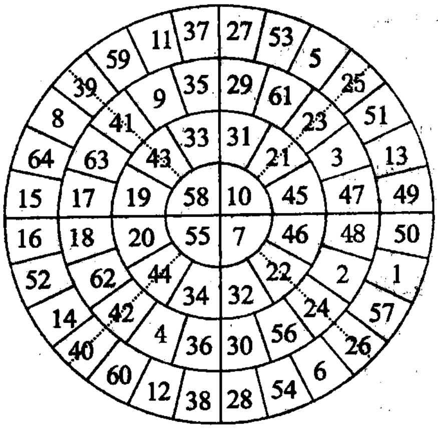


图2-1

编制方法：1、双轴位取15-50数段18对互补数。始步从X轴外圆左段上奇（15）下偶（16）序数向内圆，到2⊙转Y轴右辅轴2⊙奇偶数相续到4⊙；再转到Y轴右4⊙，仍奇、偶相续到2⊙。然后填各数互补数。双轴位奇、偶数分别在上下半圆。

2、四象限位依据每象限$2\odot_3+3\odot_5=S$　$4\odot_7$+Y轴左右一数与双轴位数的差，以1-14与64-51互补数，列表依位配对定数。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
64	63	62	61	60	59	58	57	56	55	54	53	52	51

1象限取2对64、1对58填3⊙、4⊙，2象限取2对72、1对70填3⊙、4⊙后，各幻和规范。10、58一对填1⊙X轴上，3、4象限各填互补数，这样四象限半圆各幻和组幻和规范。全数图没有重复、没有遗漏，同圆对顶位互补数准确，是规范的偶阶双轴式幻圆。

12阶双轴组合段位相应式幻圆

图2-2 12阶双轴组合不定心式幻圆编制步法与8阶相同。（列表配对略）不同点是四象限位数的布局，6⊙几个数的换位。四象限从3⊙到6⊙，各数段在各圆，没有越位，段位相应。

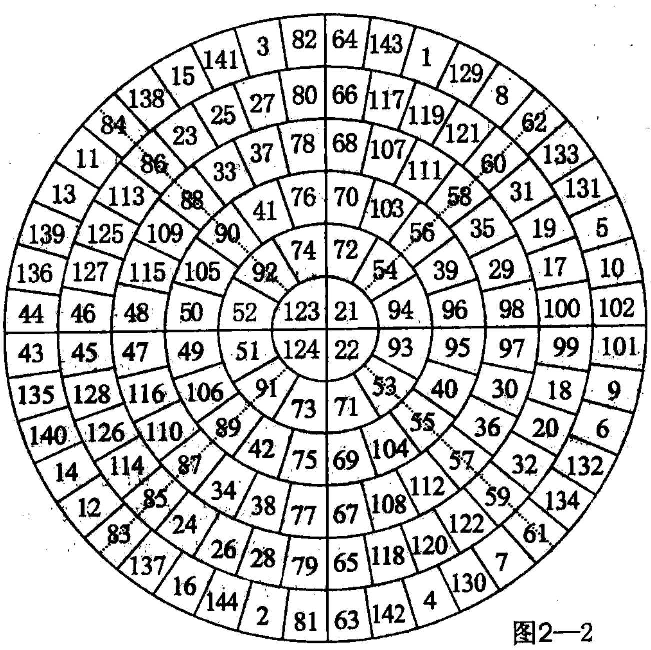


图2—2

值得一提的是幻圆数图的奇妙美，奇：6⊙ Y轴对称位两奇数和144、两偶数和146，与互补数145成

序数列，一奇；X轴对称位两数都是序数（1、4、141、144因换位）二奇；X轴上下双轴夹角内，偶夹奇、奇夹偶，1⊙上奇下偶，仍能组成规范的圆内幻和，三奇。大小数分别置于一夹角内谓之美。6⊙135、136、1、3换位（互补数同步）135、136与9、10奇偶对称两数和144、146不变；1、143、3、141原来对称位和144，换位后两数和144成两组对称谓之妙，（不换位幻和不准确）换位后，6⊙上半圆都是两偶数夹三奇数下半圆两奇数夹三偶数，也可谓之美。纵观整幻圆数圆，有规有序的互补、序续、三角扇形可谓和谐的对称美。此幻圆的特征尽显在奇妙美中。

二、偶数阶近似数幻圆

用近似数编制偶数阶幻圆数图分4m、4m+2（m≥1）两类。4m用两对近似数、4m+2用4对近似数（6阶特例6对近似数）可编制成幻和规范的偶数阶幻圆。

4m阶近似数幻圆

图2-3 m=1 n=4 R=17 S=34 ∽：15、19　取数1-16幻和组：1、2R=S　2、全圆：$1\odot_4=S$四象限：$1\odot_1+2\odot_3=S$

编制步法：1、从2⊙始步与4m+1相同从1起4个小数（互补数同步）顺时针向一轮循环。近似数X轴上15、下19。2、5相续4邻格变步连同1⊙5-8（互补数同步）逆时针向一轮循环。近似数Y轴左右上19、下15。二轮循环16个数填满幻圆。各幻和组是规范幻和。

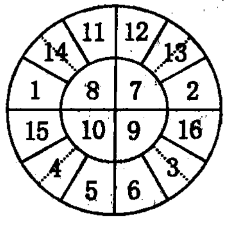


图2—3

图2-4 m=2 n=8 R=65 S=260 ∽：63、67　幻和组：1、4R=S　2、半圆：Y轴左右$2\odot_6+1\odot_2=S$　四象限：$1\odot_1+4\odot_7=S$　$2\odot_3+3\odot_5=S$

编制步法：1、从外圆X轴上始步，1—4、5—8（互补数同步）顺时针向二轮循环。近似数X轴上下63、67。2、9—16（互补数同步）9相续8邻格，变步变逆时针向，二轮向循环并跨步至1⊙。近似数X轴上下67、63（Y轴左右）1⊙与4⊙两数合成近似数。3、17—32从3⊙X轴上始步（互补数同步），顺时针向二轮循环，25、26续填23、24邻格，再次变向并跨步到2⊙二轮循环。近似数顺向X轴上63下67　逆向X轴67下63。小数始步大数互补。填满全幻圆圆内幻和，圆上幻和是规范幻和。

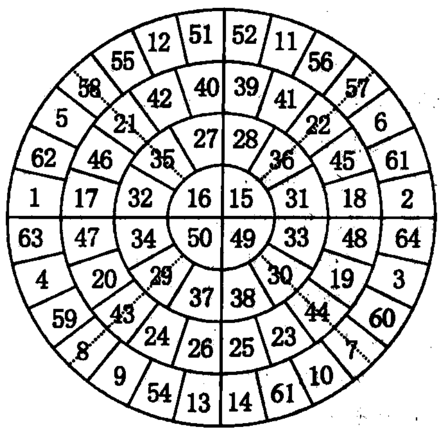


图2-4

图2-5 m=3 n=12 R=145 S=870 ∽：143、147 幻和组：1、6R=S。2、全圆：$2\odot_{12}=S$　半圆：Y轴左右$3\odot_{10}+1\odot_2=S$　四象限：$1\odot_1+6\odot_{11}=S$　$2\odot_3+5\odot_9=S$　$3\odot_5+4\odot_7=S$

编制步法：四象限每象限3组幻和，四象限同一幻和组48个数，小数、互补大数各24数。由此从X轴左上6⊙、5⊙、4⊙ 1、25、49始步与4m+1相同，顺时针向同时进行三轮循环（互补数同步）；近似数X轴上下都是143、147。（2）三轮循环结束13续12、37续36、61续60变步变逆时针向，仍是4小数一循环（互补数同步）到Y轴左右跨眯到1⊙、2⊙、3⊙，仍逆时针向循环，三轮循环（互补同步）。近似数X轴上下都是147、143。144个数填满幻圆图没有重复、没有遗漏。两对近似数先后各半，各幻和组都是规范的幻和。

值得注意的是：原Y轴左右$3\odot_{10}$+Y轴右左$1\odot_{2}$等于幻和，变化为Y轴左右$3\odot_{10}+1\odot_{2}$=S。只需将21、22与23、24同时换位，互补数同步。$1\odot_{1}+6\odot_{11}$=S不变。不换位是保持近似数的对称美、奇偶序列不变，又不变步。请读者留意：X轴上外3圆同等差24递增，内3圆同等差24递减，X轴下则相反，Y轴外3圆左右相续、上下同尾。同等差20。难之求得的序数、等差、同尾自然美。加之说明相信读者是可以理解的。

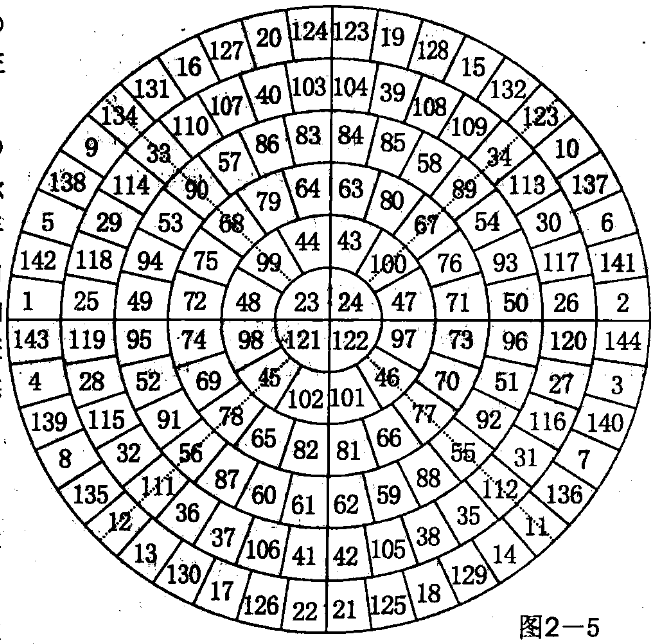


图2—5

4m+2阶近似数幻圆

4m+2是单偶阶幻圆，当m=1时用6对近似数。m＞1时用4对近似数，但近似数与互补数的差仍是1、2、3。单偶幻圆第（n+2）/4圆是两个半圆幻和组单独组合。它的始步，变步不尽相同。近似数与其它幻和组一样也不断变化。但由此而出现的新概念，令人拍手称欢。

图2-6　m=1　n=6　R=37　S=111　∽：40、39、38＞36、35、34　幻和组：（1）3R=S（2）半圆 X轴上下$2\odot_{6}$=S 四象限：$1\odot_{1}+3\odot_{5}$=S。

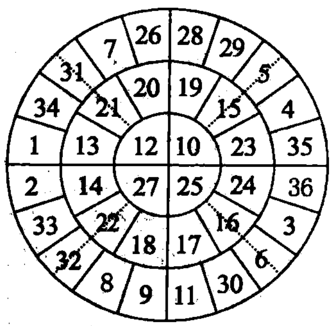


图2-6

编制步法：（1）始步从3⊙X轴左上下、右下上1-4（互补数同步）一轮循环。5、6相续4、3邻格，7、8却变步与5、6同序向（互补数同步）。9相续8邻格，Y轴右又变数为11。跨步到1⊙是两偶数10、12（各互补数同步），幻和组$1\odot_{1}+3\odot_{5}$=S 却成立。（2）13-16与始步相同，同上下序（互补数同步），17、18又变步为Y轴左右，19、20互补数同步。6对近似数尽现在2⊙，但X轴上下$2\odot_{6}$数却等于幻和。

小小6阶幻、频频变花样，6组幻和数，6对近似数，又生奇（9、11）偶（10、12）序续。漫道豫章之小，已具梁栋之观。（前面的奇、偶分别相序续是从6阶而来的）。

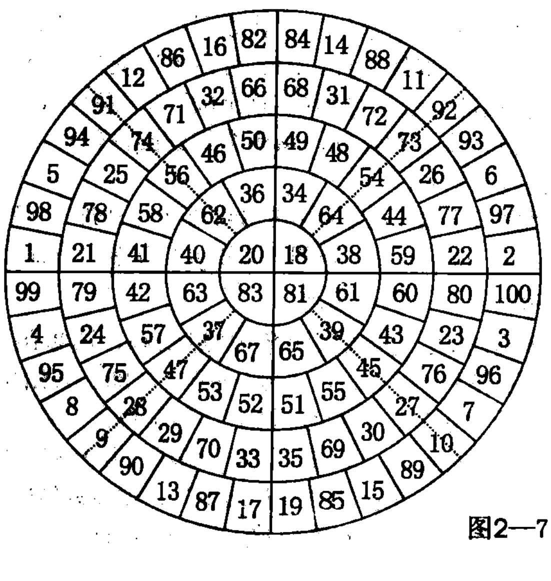


图2—7

图2-7　m=2　n=10　R=101　S=505　∽：103、102＞R＞100、99　幻和组：（1）5R=S (2)半圆:X轴上下$3\odot_{10}$=S 四象

限$1\odot_1+5\odot_9=S$ $2\odot_3+4\odot_7+S$

编制步法：（1）5⊙始步与前相同1-8顺时针向两轮循环（互补数同步）。从9相续8起变步变逆时针向一轮循环，近似数99、103换位。（2）第4、5轮循环变数不变步不变向。小数先奇后偶相序续循环。（互补数则偶奇同步），近似数100、102,两轮循环，到Y轴则跨步到1⊙填18、20。1、2象限近似数两对99、一对103、两对102。3、4象限近似数互补两对103、一对99、两对100。（3）四象限$4\odot_7+2\odot_3=S$填法与（1）、（2）始步、变步、变数、近似数相同，（4）3⊙X轴上下10数和要等于幻和，就要与5⊙四象限近似数相同。始步数序向变X轴对称，逆时针向一轮循环，近似数99、103。一轮循环后变步顺时针向，变数45、47相序续43邻格及Y轴对称位，46、48在X轴上，互补数同步。50、49（99）左右，互补数51、52同步，这样X轴上近似数两对99、两对102、一对103,与5⊙1、2象限近似数相同，X轴上下近似数互补，与3、4象限相同，X轴上下$3\odot_{10}=S$。圆内幻和5R=S自然规范。

奇偶数各相序续循环、各合成近似数，这是变数的概念。

图2-8 m=3 n=14 R=197 S=1379 ∽：199、198＞R＞196、195幻和组：1、7R=S 2、半圆 X轴上下$4\odot_{14}=S$ 四象限：$1\odot_1+7\odot_{13}=S$ $2\odot_3+6\odot_{11}=S$ $3\odot_5+5\odot_9=S$。

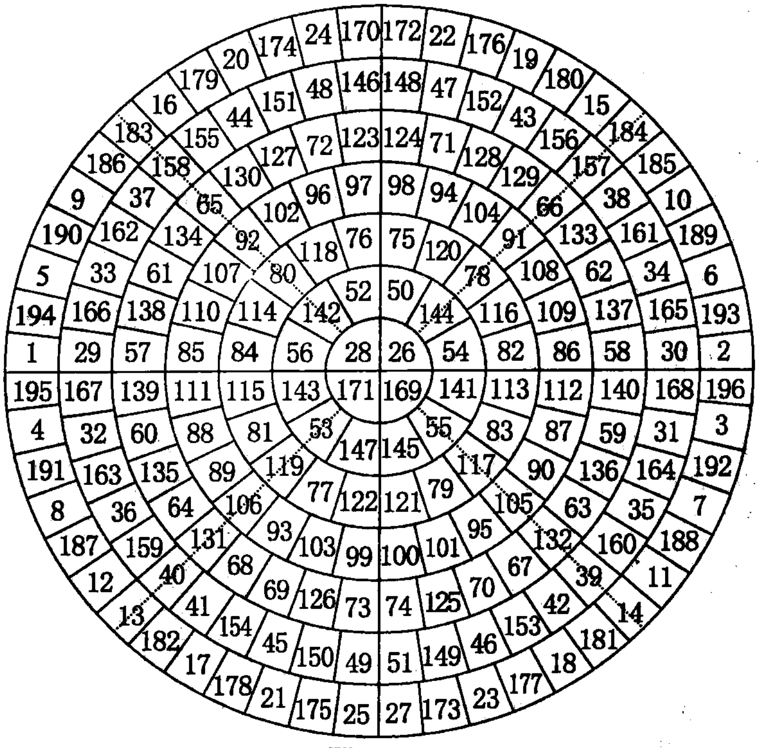


图2—8

14阶幻圆与10阶幻圆编制法相同，四象限幻和组的近似数195、199从X轴左7⊙、6⊙、5⊙、1、29、57同时始步，4小数一循环，互补数同步，三轮循环。三轮循环后，小数13相续12、41相续40、69相续68变步变数序向不变近似数（195、199）换位二轮逆时针向循环、二轮循环后，变数不变步，变近似数，7⊙、6⊙、5⊙填数到Y轴跨步到1⊙、2⊙、3⊙，近似数196、198二轮循环，四象限幻和组都成立。4⊙自成体系近似数195、199一轮循环，变步变数序向199、195再一轮循环，变数奇、偶分相续不变步、不变向近似数196、198一轮循环。97、98（和195）填X轴上Y轴左右，互补数99、100（和199）同步。这样X轴上近似数3对195、2对199、2对198，X轴下则3对199、2对195、2对196。半圆X轴上下$4\odot_{14}=S$。同样圆内幻和圆上幻和都是规范幻和。

三、偶数阶准近似数与近似数幻圆

准近似数是幻圆图中近似数值大于、小于互补数4以上的近似数。

准近似数辅助轴式幻圆

准近似辅轴式是先用中心数段填辅轴位而称辅轴式。

图2-9、10　8阶幻圆互补数、幻和、幻和组、近似数与前面同阶幻圆相同不变。准近似数出现在四象限圆内幻和组合成内。

准近似数8阶幻圆编制步法：（1）取25-40数段互补数8对，4⊙X轴上起辅轴位起先左后右相续填奇数，X轴下辅轴位互补数都是偶数。近似数上64、下66。（2）2⊙取20-24与41-45（22、43推向3⊙）互补数4对，X轴下上同向，Y轴左右对称位合成近似数66、64。各两对。X轴上下$2⊙_6+1⊙_2=S$。（3）四象限$2⊙_3+3⊙_5=S$要等于幻和，1、2象限辅轴位35+37=72、27+29=56它们是准近似数，取13-19与52-46连同22、43，8对互补数，合成近似数68、67、63、62。3、4象限互补数同步，则$2⊙_3+3⊙_5=S$成立。（4）四象限$1⊙_1+4⊙_7$要等于幻和。25+31=56　33+39=72是准近似数，故辅轴上下对称位合成近似数。2象限3对68。1象限2对64；1对60。60是准近似数，各互补数同步，则四象限$4⊙_7+1⊙_1=S$成立。

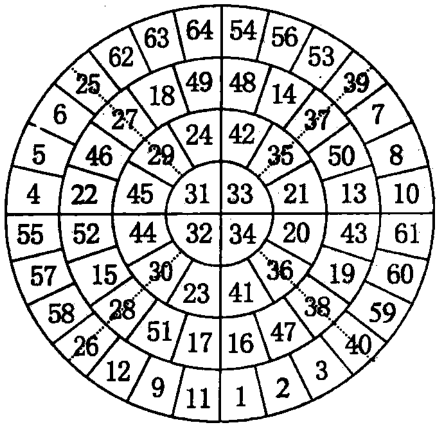


图2-9

准近似数辅轴中心式幻圆

图2-10 准近似辅轴中心式10阶幻圆是从1⊙开始由内向外段位相应。1⊙、2⊙、3⊙仍以Y轴对称位合成近似数。四象限$1⊙_1+5⊙_9=S$、$2⊙_3+4⊙_7=S$，以辅轴位两段合成准近似数；4⊙辅轴上下对称位、5⊙辅轴上下相领两格合成准近似数。1⊙、2⊙并无特色，有意趣的是从3⊙起将33、68推向4⊙，3⊙X轴上下半圆10数和等于幻和。33、31填1、2象限辅轴位，使1、2象出现意想不到的奇趣。33+47=80　31+53=84是准近似数，46+58=104　44+56=100近似数。准近似数与近似数和相等。所以19-30与82-71段位相应以辅轴上下对称位合成准近似数，X轴上107、X轴下95。大小数排列有序。25-30与互补数76-71都在辅轴内。77、78、79、80、81、82与25、26、27、28、29、30都向Y轴递呈增序数。互补数则相反，都合成准近似数。可谓是辅轴、Y轴对称美的数

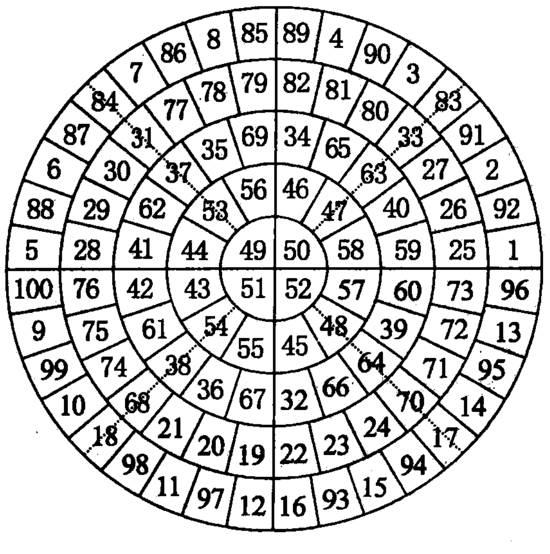


图2-10

列。再看$5\odot$，将83、84置于1、2象限辅轴位上，83+50=84+49=133，与互补数差32。用4对准近似数93。3、4象限准近似数互补：辅轴位69、4对准近似数109。更意想不到的是1-4、5-8、9-12、13-16分别有序在1-4象限，与各互补数自然合成93、109辅轴上下相邻两格准近似数。奇哉美也。

偶数阶4m、4m+2幻圆特征：1、由外圆向内与内圆相应圆合成幻和组，所以有一步跨步，跨步后由Y轴向X轴续填。2、互补大小数两段与幻和位相应，没有越位数。3、辅轴准近似数式与双轴组合样依幻和合成没有循环序向。可将数段内数推向外圆的灵活性。4、准近似式数与位变化多样，以技巧、美观为宜。

第三章　接力加减法幻圆

互补数、近似数是编制幻圆数图的基本、便利要素。若互补数、近似数的小数是递增序数列、大数是递减序数列不间断连续填叫接力，通过交换近似数，两对近似数对相等并等于幻和，主轴同侧四象限相同并成序列的叫循环。统称循环接力法。若交换近似数后近似数不等、再变化近似数，三对近似数不同，对数又不等但等于幻和的叫异近似接力法。

无论是循环接力、异近似接力，先填幻圆图外圆四象限幻和位（偶阶含$1\odot1$数，奇阶不含$1\odot$数）并等于幻和（奇阶和加$1\odot$数），向内逐圆依据前一外圆各填数次序，小数加2n、大数减2n与外圆一一相应，直止填满全圆，圆内幻和和全圆、半圆、四象限幻和位内的数和均等于幻和，这种循环接力加减法、异近似接力加减法（简称接力加减法）2n是外圆全圆接力小数序数列最大数。向内以外圆幻和位数为基准数用的加减数。

双偶循环接力加减法圆内幻和主轴同侧有两个半圆位，等于幻和的需调换相应数，一般以同近似数调换。

循环接力加减法适用于双偶类幻圆，异近似接力加减法适用单偶类幻圆：奇数阶（n-1）双偶、单偶属于双偶类、单偶幻圆。具体填数各阶幻圆各有特殊不同特征，这部分只详细介绍特殊不同特征，循环接力、加减法则简略叙述。

一、双偶类循环接力加减法

1、双偶循环接加减法幻圆

圆3-1 8阶幻圆R=65, S=260 四象限外圆$4\odot_7+1\odot_1=S$ ∽64、66各两对，两轮大循环（小循环对顶象限互补近似数，幻和近似数互补）。$3\odot_5+2\odot_3$以$4\odot_7+1\odot_1=S$数为基准数，按所填数次序小数加16、大数减16一一相应。24+42与28+38相调换（互补数同步），y轴左右半圆$2\odot_6+1\odot_2=S$（不调换X、y轴上下左右$2\odot_6+1\odot_2$都不等于幻和）。

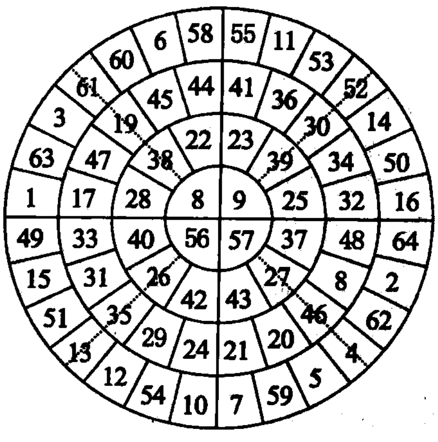


图3-1 S=260

图3-2　12阶幻圆　R=145, S=870, ∽：144、146　四象限$6\odot_{11}+1\odot_1$各3对接力同是近似数互补两大循环，$6\odot_{11}+1\odot_1=S$。$5\odot_9+2\odot_3$以$6\odot_{11}+1\odot_1$、$4\odot_7+3\odot_5$以$5\odot_9+2\odot_3$数为基准数小数加24, 大数减24，$5\odot_9+2\odot_3=S$无变化。近似数

90+56与84+62相调换，y轴左右$3\odot_{10}+1\odot_2=S$，全圆$2\odot_{12}=S$。

图3-3　16阶幻圆　R=257, S=2056, ∽：256、258四象限$8\odot_{15}+1\odot_1$各四对，接力同近似数互补两轮大循环，$8\odot_{15}+1\odot_1=S$。四象限$7\odot_{13}+2\odot_3$以$8\odot_{15}+1\odot_1$为基准数，$6\odot_{11}+3\odot_5$以$7\odot_{13}+2\odot_3$为基准数，$5\odot_9+4\odot_7$以$6\odot_{11}+3\odot_5$为基准数的次序，小数加32，大数减32，$7\odot_{13}+2\odot_3=S$，并且$2\odot_{12}+1\odot_4=S$（两个全圆数和等于幻和）不再变化，$6\odot_{11}+3\odot_5$，y轴左182+76与172+86相调换，并将182与170单独调换（互补数同步调）88+170与互补数169+87仍为近似数对，这时y轴左右半圆$3\odot_{10}+2\odot_6=S$成立。同时$4\odot_{14}+1\odot_2$调换152+106与144+114同近似数对（互补数同步调），y轴左右半圆$4\odot_{14}+1\odot_2=S$成立。

从三幅数图看，外圆呈2、3、4对同近似数，交换近似数对，由2象限进入1象限刚好是交换近似数对，故$1\odot$上都是两个小数，y轴左右是两对不同近似数，这就使两个半圆幻和位在y轴左右，也存在了必须要调换相应数

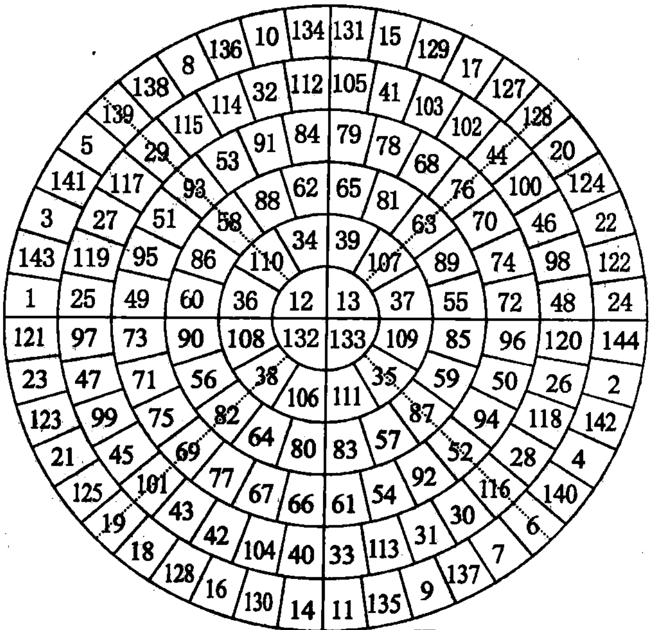


图3-2　$S_{12}=870$

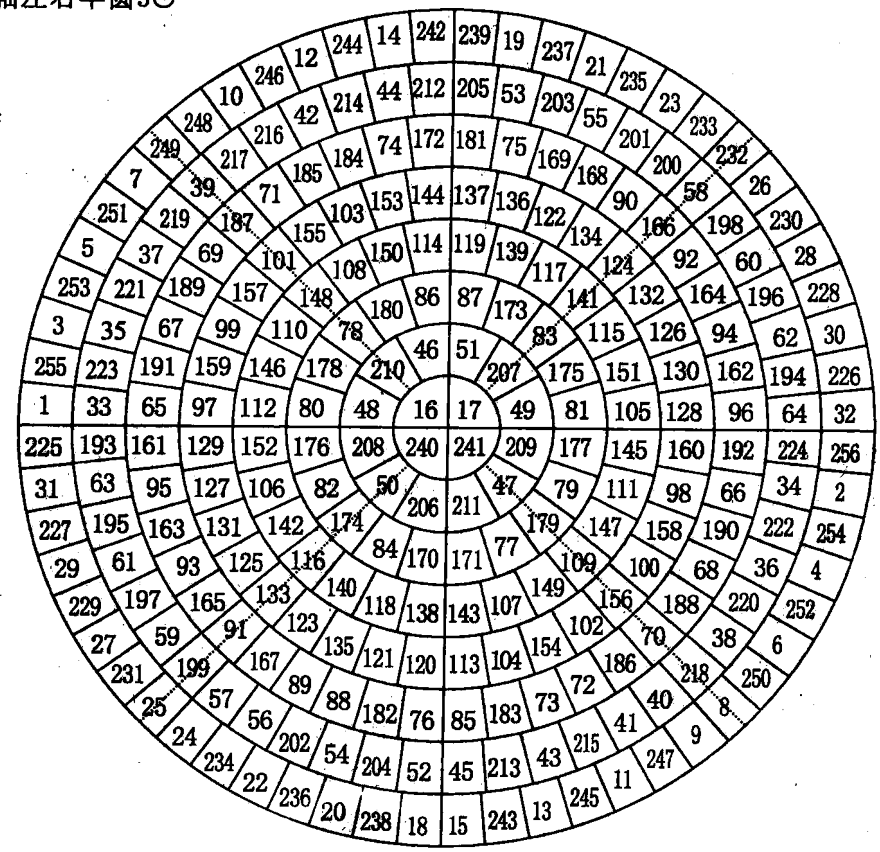


图3-3　$S_{16}=2056$

才能使幻和位上的数等于幻和，而奇阶（n-1)等于双偶只需变化交换近似数对而不需调换数了。

2、奇阶（n-1）双偶类循环接力加减法

当奇阶幻圆先搁置1⊙数时，圆内双偶数幻和位填数只需要交换近似数一次，两对互补近似数对多少对都相等并等于S-1$\odot_1$数。外圆、内圆内的幻和，半圆、四象限位两圆从x轴一侧起按照外圆所填数次序一一相应，加减填到另一侧转入内另一圆填到原一侧，四象限半圆和等于S-1$\odot_1$。若不等只须变化交换近似数，但幻和位（S-1$\odot_1$）两对近似仍然相等。下面请从图3－4～6具体填数数圆中体会。

图3-4　9阶（n-1）幻圆1⊙41、S=369　R:82　∽:81、83。5⊙3次交换近似数两轮大循环，填满全5⊙。四象限4$\odot_6$+2$\odot_2$按5⊙所填数次序，小数加16，大数减16，全圆接力循环到近似数70-16=54+27=81交换69-16=53+30=83转入2⊙继续按原次序加减到16+16=32，66-16=50，全圆2$\odot_8$+41=369。3⊙X轴上下8数依照4⊙一轮接力大循环序数加减16一轮大循环，3$\odot_8$+41=369。

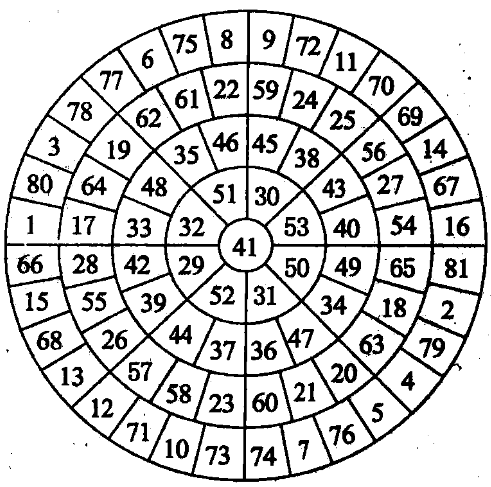


图3-4　S=369

圆3-5　13阶（n-1）幻圆1⊙：85　S=1105　R=170　∽:169、171。7⊙3对近似数互补3次交换近似数，全圆接力两轮大循环填满7⊙，四象限6$\odot_{10}$+2$\odot_2$、5$\odot_8$+3$\odot_4$按照1、2象限7$\odot_{12}$数，次序从1、24起两次小数加24，大数减24，到y轴同转入2⊙、3⊙填到x轴，12+24=36+24=60、13+24=37+24=61。3、4象限从169、146起，两次大数减24、小数加24到y轴，同转入2⊙填到x轴或用上面1、2象限数互补数，结果各数位格内相同。4⊙X轴上下半圆与1$\odot_1$是幻和组位，以第2象限49-60所填数顺序及对顶互补数同时小数加大数（互补）减24，同时接力、交

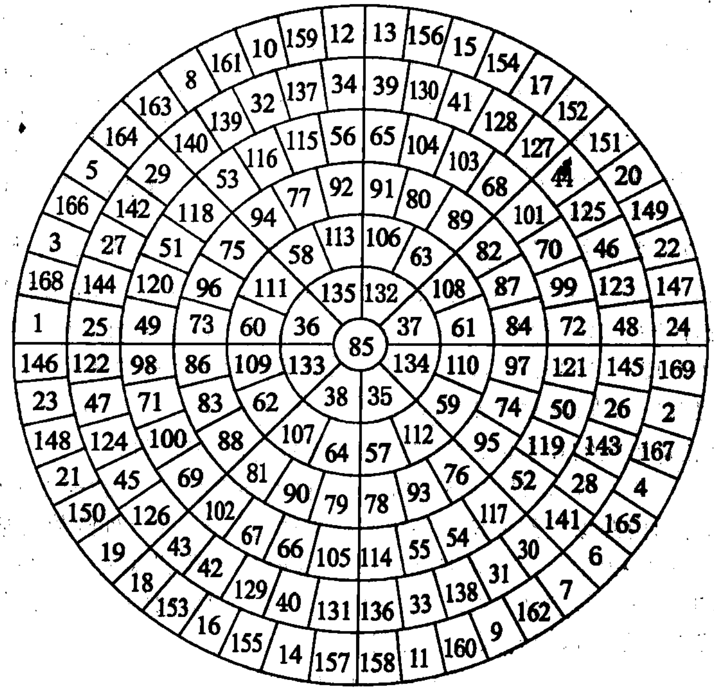


图3—5　S=1105