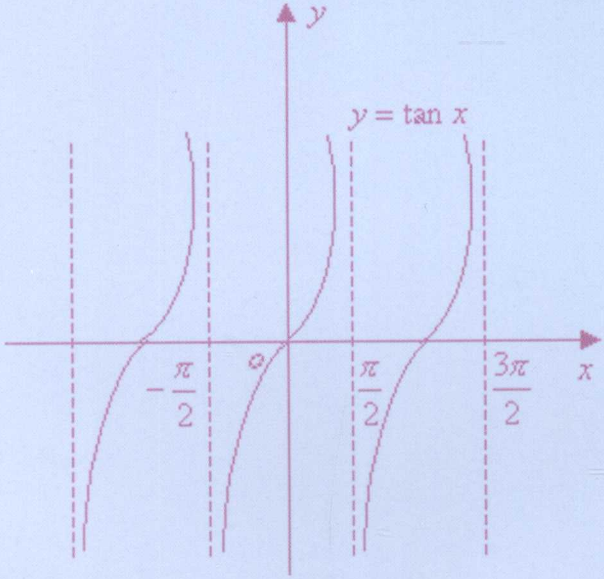
《高等数学》学习指导与作业设计丛书

丛书主编　周之虎

丛书副主编　董　毅　张裕生　梅　红



微积分学习指导与作业设计

张裕生　主编

安徽大学出版社

《高等数学》学习指导与作业设计丛书

安徽省精品课程《高等数学》建设成果

安徽省省级教学研究项目成果

微积分
学习指导与作业设计

张裕生 主编

梅红 张迎秋 孙礼俊 副主编

安徽大学出版社

内容提要

本书按照高等学校数学课程教学指导委员会制定的《高等数学课程教学基本要求》及硕士研究生入学考试大纲和专升本考试大纲编写。全书按同济大学《高等数学(第五版)》顺序编写,分为 12 章。各章主要分为教学要求、知识要点、答疑解惑、范例解析、基础作业题、综合作业题、自测题、参考答案与提示等 8 个模块。

本书可作为本科生及各类专科生学期考试及考研、专升本考试复习的辅导教材,也可供教师与科技人员参考。

图书在版编目(C I P)数据

微积分学习指导与作业设计 / 张裕生主编. —合肥:安徽大学出版社,2009.8

(高等数学学习指导与作业设计/周之虎主编)

ISBN 978—7—81110—600—8

Ⅰ.微... Ⅱ.张... Ⅲ.微积分—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 155739 号

微积分学习指导与作业设计

张裕生 主编

出版发行	安徽大学出版社	**经　销**	各地新华书店
	(合肥市肥西路 3 号　邮编 230039)	**印　刷**	合肥创新印务有限公司
联系电话	编辑室 0551-5106428	**开　本**	710×1000　1/16
	发行部 0551-5107716　5108397	**印　张**	16.75
责任编辑	李镜平	**字　数**	408 千
特约编辑	罗季重	**版　次**	2009 年 9 月第 1 版
封面设计	孟献辉	**印　次**	2009 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 978—7—81110—600—8　　**定价 28.80 元**

如有影响阅读的印装质量问题,请与出版社发行部联系调换

前　言

微积分、线性代数、概率统计是高等学校三门重要的基础课,它为今后的专业课的学习提供了基础和理论依据。同时,数学课程在训练学生的抽象思维、提高学生认识问题和解决问题的能力方面起到了不可估量的作用。

为了帮助学生学好微积分,在总结多年教学经验的基础上,我们组织具有丰富教学经验的一线骨干教师,参照高等数学的教学大纲,编写了辅助教材《高等数学学习指导与作业设计丛书》的《微积分学习指导与作业设计》。

本书以流行的《高等数学》教材为基础,与同济大学《高等数学(第五版)》教材同步,每章分为 8 个模块:教学基本要求、知识要点、答疑解惑、范例解析、基础作业题、综合作业题、自测题、参考答案与提示。

本书的特点是:

第一,方便教学与学生自学。每章都有"教学要求"和"知识要点"、"串讲小结"模块,并通过串讲、小结,说明重点,分散难点,使读者做到区分主次,心中有数,达到更好学习的目的。

第二,"答疑解惑"、"范例解析"模块,注重阐述现代数学的思想与方法,通过疑难问题、典型题型的分析及解答,为读者答疑解惑,提供基本思路及解题的常用方法。

第三,吸收了作者与很多优秀教师的教学研究新成果。

第四,注重作业设计。针对不同层次的学生设计作业,既有紧扣教材的基础作业题,又有利于学生知识深化、拓展的综合作业题。

本书适合于高等院校工科、经济管理等专业的本、专科生选用。

本书由张裕生任主编,梅红、张迎秋、孙礼俊任副主编。参加编写的有:刘娟(第 1 章),赵衍才(第 2 章),梅红(第 3 章),张裕生(第 4

章)，陶桂秀(第 5、6 章)，吴丽芳(第 7 章)，鲍宏伟(第 8 章)，张迎秋(第 9 章)，高汝召(第 10 章)，王晶(第 11 章)，孙礼俊(第 12 章)。全书最后由主编、副主编修改定稿，院长周之虎教授主审。

由于编者水平有限，书中难免存在谬误之处，请使用本书的老师、学生不吝指教。

编者

2009 年 5 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　次

第 1 章　函数与极限

1.1　教 学 要 求

【教学基本要求】

1. 理解函数的概念，了解函数的性质，会建立简单应用问题的函数关系式.

2. 理解数列极限与函数极限的概念. 理解函数的左、右极限概念，了解极限存在和左、右极限的关系. 了解极限的 $\varepsilon-N$、$\varepsilon-\delta$ 定义(不要求学生会做给出 ε 求 N 或 δ 的习题).

3. 掌握极限的有理运算法则，会用变量替换求某些简单复合函数的极限.

4. 了解极限的性质(唯一性、有界性、保号性)和极限存在的两个准则，并会利用它们求极限.

5. 了解无穷小、无穷大、高阶无穷小和等价无穷小的概念，会利用等价无穷小求极限.

6. 理解函数在一点连续和在一段区间连续的概念，了解函数间断点的概念，会判别函数间断点的类型.

7. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的介值定理与最大值、最小值定理.

【教学重点内容】

函数与极限的概念，极限四则运算法则，两个重要极限，无穷小的比较，函数的连续性与间断点.

1.2　知 识 要 点

【知识要点】

1. 函数的概念

设数集 $D \subset R$，则称映射 $f: D \to R$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为

$$y = f(x), x \in D,$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域.

2. 数列极限的定义

设 $\{x_n\}$ 为一数列，如果存在常数 a，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

都成立，那么就称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

或

$$x_n \to a(n \to \infty).$$

3. 收敛数列的性质

（1）唯一性：如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么它的极限唯一.

（2）有界性：如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

（3）保号性：如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，且 $a > 0$（或 $a < 0$），那么存在正整数 $N > 0$，当 $n > N$ 时，都有 $x_n > 0$（或 $x_n < 0$）.

（4）收敛数列与其子数列间的关系：如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是 a.

4. 函数极限的定义

（1）自变量趋于有限值时的函数极限

① 定义：设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 δ，使得当 x 满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

那么常数 A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \text{或 } f(x) \to A(\text{当 } x \to x_0).$$

② 几何意义：当 x 在 x_0 的某一去心邻域时，函数 $y = f(x)$ 图形完全落在以直线 $y = A$ 为中心线，宽为 2ε 的带形区域内.

③ 左极限：$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，使当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立，A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的左极限.

④ 右极限：$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，使当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立，A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的右极限.

（2）自变量趋于无穷大时的函数极限

① 定义：设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 X，使得当 x 满足不等式 $|x| > X$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么常数 A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A,\text{或 } f(x)\to A(\text{当 } x\to\infty).$$

② 几何意义：当 $x<-X$ 或 $x>X$ 时，函数 $y=f(x)$ 图形完全落在以直线 $y=A$ 为中心线，宽为 2ε 的带形区域内.

5. 函数极限的性质

(1) 唯一性：如 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，那么这极限唯一.

(2) 局部有界性：如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

(3) 局部保号性：如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，而且 $A>0$(或 $A<0$)，那么存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

(4) 函数极限与数列极限的关系：如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，$\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 定义域内任意收敛于 x_0 的数列，且满足：$x_n\neq x_0(n\in\mathbf{N}^+)$，那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

6. 无穷小与无穷大

(1) 无穷小的定义和性质

① 定义：如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时的极限为零，那么称函数 $f(x)$ 为 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小.

② 性质：有限个无穷小的和仍是无穷小；

有界函数与无穷小量的积仍是无穷小.

③ 无穷小与函数极限的关系：在自变量的同一变化过程 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 中，函数 $f(x)$ 具有极限 A 的充要条件是 $f(x)=A+\alpha$，其中 α 是无穷小.

(2) 无穷大的定义

① $\forall M>0,\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|>M$，则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷大. 记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

② $\forall M>0,\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)|>M$，则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to\infty$ 时的无穷大. 记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

(3) 无穷小与无穷大的关系

$\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=0$ 且 $f(x)\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$；

$\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=\infty$ 且 $f(x)\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

注意：这里 $x\to\Delta$ 中 Δ 可以是 $x_0,x_0^+,x_0^-,\infty,+\infty,-\infty$，但前后式必须是同

一趋向。

7. 无穷小的比较

设 α,β 是同一变化过程中的两个无穷小，且 $\alpha\neq 0$.

(1) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，就说 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$.

(2) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，就说 β 是比 α 低阶的无穷小.

(3) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，就说 β 与 α 是同阶无穷小；如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$.

(4) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0,k>0$，就说 β 是关于 α 的 k 阶无穷小.

8. 等价无穷小代换定理

(1) 等价充要性：$\beta\sim\alpha\Leftrightarrow\beta=\alpha+o(\alpha)$，称 α 是 β 的主要部分.

(2) 等价无穷小代换定理：设 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$，且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

(3) 无穷小代换原则：积商可部分代换，和差只能总体代换.

9. 极限存在准则

(1) 夹逼准则，如果数列 x_n,y_n 和 z_n 满足下列条件：$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n\in\mathbf{N}^+)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，那么数列 x_n 的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(2) 单调有界准则：单调有界数列必有极限.

10. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})=\mathrm{e}$，或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

11. 函数的连续性

(1) 函数在一点连续的等价定义

① 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$，那么就称 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续.

② 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，那么就称 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续.

③ $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，那么就称 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续.

(2) 单侧连续性

① 左连续:如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$,则称 $y = f(x)$ 在 x_0 处左连续.

② 右连续:如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$,则称 $y = f(x)$ 在 x_0 处右连续.

③ 与连续的关系:$y = f(x)$ 在 x_0 处连续是 $y = f(x)$ 在 x_0 处既左连续又右连续.

(3) 区间上的连续函数

在区间上每一点都连续的函数,叫做在该区间上的连续函数,或者说函数在该区间上连续.如果区间包括端点,那么函数在右端点连续是指左连续,在左端点连续是指右连续.

12. 函数的间断点

(1) 函数间断点的定义

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义,则具有下列情形之一的函数 $f(x)$ 在 x_0 处不连续:

① $f(x)$ 在 x_0 无定义;

② $f(x)$ 在 x_0 虽有定义,但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在;

③ $f(x)$ 在 x_0 有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

这样的点 x_0 称为间断点.

(2) 间断点的类型

① 第一类间断点:$f(x_0^+)$ 及 $f(x_0^-)$ 均存在.若 $f(x_0^+) = f(x_0^-)$,称 x_0 为可去间断点;若 $f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$,称 x_0 为跳跃间断点.

② 第二类间断点:$f(x_0^+)$ 及 $f(x_0^-)$ 至少有一个不存在.若其中有一个为 ∞,称 x_0 为无穷间断点;若其中有一个在 x_0 附近来回振荡,称 x_0 为振荡间断点.

13. 连续函数的运算

(1) 连续函数的运算法则:在某点连续的有限个函数经有限次和、差、积、商(分母不为 0)运算,结果仍是一个在该点连续的函数.

(2) 反函数的连续性:连续单调递增(递减)函数的反函数仍是连续单调递增(递减).

(3) 复合函数的连续性:连续函数的复合函数是连续的.

(4) 初等函数的连续性:基本初等函数在定义区间内连续,一切初等函数在定义区间内连续.

14. 闭区间上连续函数的性质

(1) 有界性与最值定理:闭区间上的连续函数在该区间上有界,且一定有最大值和最小值.

(2) 零点定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)f(b)<0$，那么在开区间(a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

几何解释：连续曲线弧 $y=f(x)$ 的两个端点位于 x 轴的不同侧，则曲线弧与 x 轴至少有一个交点.

(3) 介值定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，且在该区间的端点取不同的函数值 $f(a)=A$ 及 $f(b)=B$，则对于 A 与 B 之间的任一数 C，在开区间(a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

推论：在闭区间上的连续函数必取得介于最小值与最大值之间的任何值.

【串讲小结】

高等数学的研究对象是变量，所谓函数关系就是变量之间的依赖关系，极限方法是研究变量的一种基本方法，是微积分建立的基础；正确理解极限及其有关概念是学好高等数学的关键. 本章的基本知识结构是从函数概念入手，给出数列极限、函数极限的定义. 在极限定义的基础上讨论了无穷小与无穷大的概念和性质，并介绍了极限运算法则和极限存在的两个准则，最后，利用极限的定义介绍了函数的连续性及间断点的类型. 学习上，在理解函数极限与连续性概念的基础上，通过较多的例题和练习训练，使学生能较熟练掌握求解极限与判断间断点类型的技巧. 教师可总结求数列极限及函数极限的若干种方法，提示求极限的一些技巧，对一些常规方法，如分解因式，约去使分母极限为零的公因式，无穷小与无穷大的互为倒数关系，利用等价无穷小替换等，应加强练习，使学生能够熟练掌握. 本章的另一个重点内容是函数的连续性及间断点类型的判断. 对连续性的 3 种定义形式要有所了解，熟练应用连续性定义判断函数是否连续. 如函数在一点不连续，即该点为间断点时，要能判断出间断点的类型，第一类间断点的判断是最重要的，特别是可去间断点的几种可能情况应非常清楚. 闭区间上连续函数的性质主要应掌握零点定理、介值定理；能利用零点定理判断方程解的存在情况；了解有界性定理. 极限是整个高等数学的基础，因此学好第 1 章内容对以后章节的学习至关重要.

1.3 答疑解惑

1. 数列极限定义中的自然数 N，函数极限定义中的 δ 与正数 ε 是什么关系？N 和 δ 是不是 ε 的函数？

答：在数列极限定义中，自然数 N 是根据不等式 $|x_n-A|<\varepsilon(\forall n>N)$ 确定的，所以 N 与 ε 有关，但不能说 N 是 ε 的函数. 这是因为，如果 N 是 ε 的函数，即 $N=f(\varepsilon)$，那么，任意给定一个 $\varepsilon>0$，有且只有一个 N 满足不等式

$|x_n - A| < \varepsilon(\forall n > N)$. 但实际上不是这样的，因为如果自然数 N 使得不等式 $|x_n - A| < \varepsilon(\forall n > N)$ 成立，那么所有大于 N 的任一自然数 N_1，都满足 $|x_n - A| < \varepsilon(\forall n > N_1)$.

同样道理，在函数极限中，δ 与 ε 有关，但不能说 δ 是 ε 的函数，即满足条件的 δ 有无穷多个. 记号 $\delta = \delta(\varepsilon)$ 只是说明 δ 是与 ε 有关的一个量.

2. 极限的定义是否给出了求极限的方法？

答：高中阶段给出了函数极限的描述性定义，即自变量无限接近于某一固定值时，如果函数值无限接近于某个确定的常数，那么这个确定的常数就叫做在这一变化过程中函数的极限. 而高等数学则用比较精确的"$\varepsilon - \delta$"语言表达了极限的准确定义. 但无论哪一种定义形式都没有给出求极限的方法，只是从理论上说明某一常数为一个数列或函数的极限. 所以，要想求出数列或函数的极限，必须用一些特定方法求解.

3. 在 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的定义中，为何只要求 $f(x)$ 在 x_0 的去心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta)$ 内有定义？

答：此问题要抓住"极限"一词的基本定义，即"自变量在某一无限变化过程中，函数值的变化趋势"，其中"无限变化过程"及"变化趋势"是关键词. $f(x)$ 在 x_0 的去心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta)$ 内有定义，就可保证 $x \to x_0$ 是无限变化过程，即可保证 x 无限接近 x_0，而此时函数值 $f(x)$ 的变化趋势与 x_0 处的函数值 $f(x_0)$ 是否存在无关，故只要 $f(x)$ 在 x_0 的去心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta)$ 内有定义即可.

4. 无界变量是无穷大量吗？

答：无界变量和无穷大量都是处在某个变化过程中的变量，无穷大量一定是无界变量，但无界变量不一定是无穷大量. 函数的有界、无界与无穷大是两种不同的概念，无穷大指的是在自变量的某一变化过程中，对应的函数值的绝对值无限增大，无界变量不一定满足这个条件. 例如，函数 $y = x\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是无界的，但它不是当 $x \to +\infty$ 时的无穷大.

5. 两个无穷大的和仍为无穷大吗？

答：此问题不可受"两个无穷小的和仍为无穷小"的影响，事实上，两个无穷大之和是"未定型". 例如，$f(x) = x, g(x) = \dfrac{1 - x^2}{x}$，则当 $x \to \infty$ 时，$f(x), g(x)$ 都是无穷大，但 $\lim\limits_{x \to \infty}[f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to \infty}\left(x + \dfrac{1 - x^2}{x}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$，这说明两个无穷大的和不一定是无穷大.

6. 求极限有哪些基本方法？

答：求解极限问题，题型变化多样，主要方法总结如下：

(1) 初等函数在定义域内求极限有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

(2) 利用无穷小与无穷大的互为倒数关系.

(3) 对有理分式函数,当 $x\to\infty$ 时,用 x 的高次方项同时去除分子、分母.

(4) 利用等价无穷小的替换或无穷小的性质,常用的等价无穷小有:当 $x\to 0$ 时,$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$, $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$, $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$, $a^x-1\sim x\ln a(a>0,a\neq 1)$.

(5) 分解因式,约去使分母极限为零的公因式.

(6) 乘以共轭因式,约去使分母极限为零的公因式.

(7) 利用两个重要极限.

以后还将学到:

(8) 利用洛必达法则求极限.

(9) 利用定积分的定义求极限.

(10) 利用级数收敛的必要条件求极限.

7. 函数 $f(x)$在一点 x_0处连续是否意味着 $f(x)$在 x_0的某个邻域内处处连续?

答:函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续是 $f(x)$ 在 x_0 的一个局部性质,它只说明当 $x\to x_0$ 时,函数值 $f(x)$ 的一种变化趋势(即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$),不涉及 $f(x)$ 在其他点的性质,所以 $f(x)$ 在点 x_0 处连续并不意味着 $f(x)$ 在点 x_0的某个邻域内处处连续. 可以考察函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$$

这个函数在 $x=0$ 是连续的,但是除了 $x=0$ 之外,该函数处处不连续.

8. 第二类间断点只包括无穷间断点和振荡间断点吗?

答:函数的间断点通常分为两类:第一类间断点和第二类间断点. 其中第一类间断点指的是函数 $f(x)$ 在 x_0 的左极限 $f(x_0^-)$ 和右极限 $f(x_0^+)$ 均存在. 若 $f(x_0^-)=f(x_0^+)$,称 x_0 为可去间断点;若 $f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$,称 x_0 为跳跃间断点,即第一类间断点只有两种情况. 第二类间断点指的是 $f(x_0^-)$ 及 $f(x_0^+)$ 至少有一个不存在. 若其中有一个为 ∞,称 x_0 为无穷间断点;若其中有一个在 x_0 附近来回振荡,称 x_0为振荡间断点. 但第二类间断点不只包括无穷间断点和振荡间断点,通常把不是第一类间断点的任何间断点都称为第二类间断点. 例如对于狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com