21世纪高等院校教材

常微分方程及其应用

（第二版）

周义仓 靳 祯 秦军林 编

科学出版社
www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材

常微分方程及其应用

（第二版）

周义仓　靳　祯　秦军林　编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是常微分方程理论、方法与应用有机结合的一本教材，保持了我国现行教材理论性强、方法多样、技巧和实例丰富等特点，并结合国外教材强调建模、应用和计算机等特点，形成理论、方法、建模、应用、计算机互相渗透与补充的新体系. 不仅能够训练学生严密的数学思维方式，而且可以引导学生通过建立数学模型解决实际问题. 既讲述求解各类微分方程解析解、数值解的方法，又介绍用计算机进行理论分析、求解方程和给出图形显示的过程. 本书的主要内容包括求解各类微分方程的方法，常微分方程的基本理论、近似方法及其实现，以及建立微分方程模型解决实际问题.

本书可作为数学与应用数学、信息与计算科学专业的常微分方程课程教材，也可作为理工科学生数学建模、数学实验等课程的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程及其应用/周义仓，靳祯，秦军林编. —2 版. —北京：科学出版社，2010

(21 世纪高等院校教材)

ISBN 978-7-03-026511-1

Ⅰ. 常… Ⅱ. ①周…②靳…③秦… Ⅲ. 常微分方程-高等学校-教材 Ⅳ. O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 015157 号

责任编辑：赵 靖 房 阳 / 责任校对：陈玉凤

责任印制：张克忠 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003 年 7 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2010 年 2 月第 二 版 印张：20 1/4

2010 年 2 月第八次印刷 字数：408 000

印数：15 501—19 500

定价：32.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

第一版前言

常微分方程是数学类专业的一门应用性较强的基础课，一般在二年级开设，64学时左右. 常微分方程课程对训练学生的数学思维、应用意识和分析与解决实际问题的能力有着极为重要的作用.

目前国内常微分方程的教材基本上与60、70年代的体系和内容相比没有太大的变化，主要是通过解的存在唯一性、线性方程解的基本理论、渐近性态分析等内容训练学生数学的抽象思维能力，通过叙述求解各种类型方程的解析解让学生学会求解一些微分方程的基本方法. 相比而言，国外近年来出版的常微分方程教材与60、70年代的相比有很大的变化，主要体现在两个方面：①通过大量的实际问题突出数学的应用，引导学生建立常微分方程模型解决各种实际问题；②大量的使用计算机，用 Maple、Matlab、Mathematica 等数学软件进行图示、求解析解、进行数值计算、进行推理以提高课堂教学的效果.

在多年从事常微分方程课程教学的过程中，我们对我国的教育体制、教学方式、教材的优缺点、学生的特点有了较深入的了解，也收集到了一批国外的优秀教材，在教学中积累了丰富的素材，其中大部分已经整理成讲稿，包括一些十分精彩的应用实例和计算机程序. 这些讲稿通过复印或磁盘文件拷贝给学生后收到了很好的效果. 在这些经验和素材的基础上，我们编写了这本教材.

《常微分方程及其应用》是常微分方程理论、方法与应用有机结合的一本教材. 它保持我国现行教材中理论性强、方法多样、技巧和实例丰富等特点，再结合国外教材中强调建模、应用和计算机等特点，理论、方法、建模、应用、计算机互相渗透与补充. 不仅使学生受到严格的数学思维方式的训练，而且使学生体会到数学在解决实际问题中的巨大作用，了解通过数学模型去解决实际问题的全过程. 既使学生学会求解各类微分方程解析解、数值解的方法，又让他们掌握用计算机分析求解的思想与过程. 本教材的目标是让学生学会①求解各类微分方程的方法；②常微分方程的基本理论；③常微分方程定性稳定性方法初步，从微分方程提取尽可能多的信息；④近似方法、数值方法及其计算机实现；⑤建立微分方程模型解决实际问题；⑥在应用问题中使用各种数学软件包. 本教材的主要特点为①加强数学基础理论的训练，如解的存在唯一性定理、线性方程的理论、线性方程组的基本解矩阵、定性稳定性基本知识；②广泛介绍各种求解常微分方程的方法和思想，如一阶方程的解法：分离变量、线性方程、全微分方程、齐次方程、积分因子、Bernoulli 方程、Riccati 方程、Clairaut 方程、参数求解法、变量替换法；二阶及高阶方程的降阶法、待定系

数法；方程组的特征根法、重根情形的处理、指数矩阵的定义、基本解矩阵的计算；向量场的方法；近似解法：迭代法、级数解、待定系数法、Euler 折线法；定性理论：奇点分析、线性化、Liapunov 函数；③将微分方程课程的理论、方法和它们在解决实际问题中的应用紧密结合，根据目前教学改革的特点加强数学应用意识的培养，注意建模过程的训练.介绍了一些生动典型的例子，如中国人口增长、放射性废物的处理、Bob Beamon 世界跳远纪录的分析、流行病的传播等；④计算机及软件包的使用.在课程中尽量使用计算机和数学软件包，如向量场的图示、积分曲线的绘制、数值解的计算；在迭代序列的计算和近似解中的大量使用，不仅使学生能理解方法，而且要掌握实现的手段；介绍符号系统求解析解的方法.

使用本教材需要的基础是数学分析和线性代数，需要的学时在 64～72 之间.学时少的学校可以删除 § 1.3、§ 2.5、§ 2.6、§ 5.4、§ 5.6 等内容.本书各章节的编写风格如下：微分方程的理论、方法，例题、应用举例，练习题、进一步探讨的小课题.本书第 1，2 章由周义仓编写，第 3，4 章由靳祯编写，第 5 章由秦军林编写，最后由周义仓统稿修改.

为了便于阅读和使用，我们将本书中的 Maple 程序收集、整理为磁盘文件，我们也设计、开发了一些应用常微分方程解决实际问题的小课题和软件.本书中所有习题的答案或主要解答过程都编辑成了磁盘文件.这些文件都可以免费发送给读者，请通过 Email 与作者联系（周义仓，zhouyc@mail. xjtu. edu. cn）.我们还需要指出，在不同的计算机系统或不同的 Maple 版本中，输出结果可能会与书中给出的有所不同，请读者注意这些差异.

我们力图使本书反映数学理论的严密性、方法的多样性、应用的广泛性，也体现出国内外教学改革的发展趋势.但由于作者水平的限制，在思想、内容和文字方面难免有不妥之处，恳请读者批评指正.

作　者

2003 年 1 月

第二版前言

本书第一版于2003年出版后，陆续收到读者的反馈意见和建议.根据读者建议和我们自己在教材使用过程中的体会，在保持原有教材重视理论分析、突出求解方法、强调建模应用、利用计算机软件等特点的基础上，对教材进行了修订，主要有下面几个方面的改动：

(1) 增加了一个附录作为第6章，对Maple软件的基本使用方法进行了简单介绍，也将原来分布在各章节中用Maple求解微分方程的一些内容集中到了一起，以使有兴趣的读者可以更好地熟悉Maple的使用方法，利用Maple来探讨常微分方程中的一些问题.

(2) 增加了一些应用实例，帮助有兴趣的读者体会用常微分方程解决实际问题的思想，并掌握具体的应用方法.同时也增加了一些开拓性和探索性问题，以培养读者的创新思维.

(3) 在许多章节中增加了例题，以帮助读者掌握理论分析技巧或求解方法.并对习题进行了整理，删去了一些比较难的问题，增加了一些新的问题.

(4) 编辑完成了教材中所有习题的解答，并将其整理成pdf文件.同时，也完成了所有章节内容的电子课件.这些习题解答和pdf文件形式的课件都可以发给使用本教材的教师，请通过电子邮件(周义仓，zhouyc@mail. xjtu. edu. cn)索取.

习题中带“*”号的题目比较困难，带“p”的题目可以作为小课题让学生探讨，带“c”的题目建议用Maple软件求解.

我们希望修订后的教材更加适合于讲授和自学.

作　者

2009年7月

目　　录

第 1 章　引　　论

常微分方程是现代数学的一个重要分支，是人们解决各种实际问题的有效工具，它在几何、力学、物理、电子技术、自动控制、航天、生命科学、经济等领域都有着广泛的应用. 本章介绍常微分方程的一般概念、导出微分方程的一些典型例子、常微分方程解的存在唯一性、向量场等内容，为求解微分方程和进行理论分析做准备.

1.1　微分方程的概念和实例

弄清一个问题中变量之间的函数关系或其变化趋势对问题的解决往往有着至关重要的作用，但在一些较复杂的变化过程中，变量之间的函数关系无法直接得到. 这时就需要在一些理论或经验的基础上找到问题中的一些变量及其导数之间的关系，也就是先找出一个含有未知函数及其导数所满足的方程(称为微分方程)，然后通过求解这个方程得到变量间的函数关系，或者在微分方程的基础上进行数值计算和渐近性态研究，从而了解一个系统的发展变化规律. 本节先给出一些导出微分方程的例子，再给出微分方程中所涉及的一些定义.

1.1.1　导出微分方程的一些实际例子

为了定量地研究一些实际问题的变化规律，往往是要对所研究的问题进行适当的简化和假设，建立起数学模型，当问题中涉及变量的变化率时，该模型就是一个微分方程. 下面通过几个典型的例子来说明建立微分方程模型的过程.

例 1.1.1　镭的衰变规律　设镭的衰变速率与该时刻现有的量成正比，并且已知 $t=0$ 时，镭元素的量为 R_0g，试确定在任意时刻 t 镭元素的量.

解　记 t 时刻镭元素的量为 $R(t)$，要直接得出 $R(t)$ 的函数表达式是比较困难的，因此，通过建立 $R(t)$ 所满足的微分方程来得到 $R(t)$. 由于镭元素的衰变率就是 $R(t)$ 对时间的变化率 $\dfrac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}$. 根据题目中给出的衰变规律，可以得到下面的一阶微分方程及初始条件：

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=-kR,\quad R(0)=R_0,\tag{1.1.1}$$

其中，$k>0$ 是比例系数. 式(1.1.1)中右端的负号是由于函数 $R(t)$ 是随时间的增加

而单调减少的，故它的导数应该是负的.

寻找 t 时刻镭含量的函数表达式 $R(t)$ 就转化为求满足式(1.1.1)中微分方程和初始条件的解 $R(t)$. 由数学分析中求导的经验知道函数

$$R(t) = ce^{-kt} \tag{1.1.2}$$

满足式(1.1.1)中的微分方程，其中，c 为任意常数. 为了使式(1.1.2)中的函数再满足 $R(0)=R_0$，只需选取 $c=R_0$ 即可. 于是得到了镭元素的存量随时间变化的函数表达式为

$$R(t) = R_0 e^{-kt}. \tag{1.1.3}$$

式(1.1.3)表明，镭元素的量 $R(t)$ 是按指数规律衰减的.

从例 1.1.1 可以看到为了求得描述镭元素存量随着时间变化的关系，先建立起这个未知函数所满足的微分方程，然后通过求解得到了所需的函数关系.

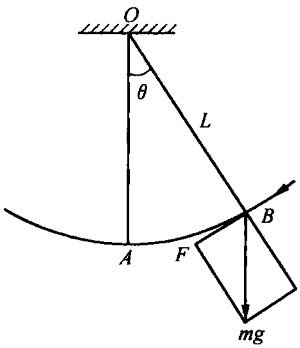

图 1.1

例 1.1.2　在一根长为 L 的轻杆下端，悬挂一质量为 m 的质点，略微移动后，该质点在重力作用下来回摆动(图 1.1)，这种装置叫做单摆(或数学摆). 假设轻杆不会伸长又无质量，在悬点没有摩擦力，试建立单摆的运动方程.

解　取轻杆的铅直位置为摆的平衡位置. 设在时刻 t 时，质点对平衡位置的位移为 $s=\overset{\frown}{AB}$. 于是有

$$s = L\theta,$$

其中，θ 为杆的瞬时位置与平衡位置所成的角，逆时针方向为正，因 s 与 θ 同方向，所以 s 以 AB 为正方向.

使质点运动的力 F 为质点的重力 mg 在切线方向的分力

$$F = mg\sin\theta,$$

而质点的加速度为

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = L\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

根据牛顿第二定律得到

$$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta.$$

上式右端的负号是由于力 F 与位移 s 的正方向 AB 相反的缘故. 上式可化简为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta, \tag{1.1.4}$$

此即为单摆的运动方程,它是一个二阶非线性微分方程(因为方程中含有 $\sin\theta$,它关于未知函数 θ 不是线性的). 为了确定单摆的运动方程,还需要知道初始时刻单摆的角位移 θ 和角速度 $\frac{d\theta}{dt}$,故还需要加上初始条件

$$\theta(0)=\theta_0,\quad \frac{d\theta(0)}{dt}=\theta_0'. \tag{1.1.5}$$

在例 1.1.2 中所建立的微分方程的解析解无法得到,将在第 5 章中对其解的性态进行分析.

用微分方程解决实际问题的基本步骤为①建立起实际问题的模型,也就是建立反映这个实际问题的微分方程,提出相应的定解条件;②求出这个微分方程的解析解或数值解,或者对方程解的性态进行分析;③用所得的结果来解释实际现象,或对问题的发展变化趋势进行预测.

要建立适合实际问题的数学模型一般是比较困难的,这需要对问题的机理有一个清楚的了解,同时需要一定的数学知识和建立数学模型的经验. 常微分方程是应用背景比较强的一门课程,在学习过程中最好有意识地培养建模能力,使得数学知识和解决实际问题的能力都有大的提高.

1.1.2 微分方程的概念

含有未知量的等式称为方程,它表达了未知量所必须满足的某些条件. 方程是根据对未知量所进行的运算来分类的,如代数方程、超越方程等. 微分方程与代数方程和超越方程不同,它的未知量是函数,对其所施加的运算涉及求导或微分. 凡含有自变量、未知函数以及未知函数的导数(或微分)的方程称为**微分方程**.

下面是一些微分方程的例子:

$$\frac{dy}{dx}+ky=0, \tag{1.1.6}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0, \tag{1.1.7}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}+5\frac{d^2y}{dx^2}+3y=\sin x, \tag{1.1.8}$$

$$m\frac{d^2u}{dt^2}=F\left(t,u,\frac{du}{dt}\right), \tag{1.1.9}$$

$$\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial t}=v, \tag{1.1.10}$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0. \tag{1.1.11}$$

如果微分方程中的未知函数只依赖于一个自变量，就称为**常微分方程**；如果未知函数依赖于两个或更多的自变量，就称为**偏微分方程**.(1.1.6)～(1.1.9)中的4个方程都是常微分方程，(1.1.10)和(1.1.11)是偏微分方程.本书主要是讨论常微分方程，今后所讲到的“微分方程”一词，没有特别声明时均理解为常微分方程.

一个微分方程中，未知函数最高阶导数的阶数，称为方程的**阶数**.如果一个微分方程关于未知函数及其各阶导数都是线性的，则称它为**线性微分方程**，否则称为**非线性微分方程**.例如，(1.1.6)是一阶微分方程，也是线性方程，称这类方程为一阶线性方程.同理，(1.1.7)是二阶非线性方程，(1.1.8)是四阶线性方程.一般的n阶微分方程的形式为

$$F\left(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}y^n}\right)=0,\tag{1.1.12}$$

其中，$F\left(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}y^n}\right)$为其变量$x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$的已知函数，而且一定含有$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$，$y$是未知函数，$x$是自变量.

设$y=\varphi(x)$是定义在区间(a,b)上的n阶可微函数，若分别将$y=\varphi(x)$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi'(x)$，$\cdots$，$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}=\varphi^{(n)}(x)$代入(1.1.12)后能使其成为恒等式，即

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))\equiv 0,\quad x\in(a,b),$$

则称$y=\varphi(x)$是微分方程(1.1.12)在区间(a,b)上的一个**解**.例如，$y=\mathrm{e}^{-kx}$是微分方程(1.1.6)在$(-\infty,+\infty)$的一个解，$y=\tan x$是微分方程$y'=1+y^2$在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$的一个解.

如果关系式$F(x,y)=0$决定的隐函数$y=\varphi(x)$是方程(1.1.12)的解，则称$F(x.y)=0$是方程(1.1.12)的一个**隐式解**.例如，一阶微分方程

$$x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=0$$

有隐式解

$$x^2+y^2-c=0.$$

把含有n个相互独立的任意常数$c_1,c_2,\cdots,c_n$的解

$$y=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$$

称为n阶微分方程(1.1.12)的**通解**.此处$y=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$含有$n$个相互独立的常数的含义是指存在$(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$的某一个邻域，使得

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial c_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi}{\partial c_n} \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial c_1} & \frac{\partial \varphi'}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi'}{\partial c_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial c_1} & \frac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial c_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

例如，$y=c_1\cos x+c_2\sin x$ 就是二阶线性方程

$$y''+y=0 \tag{1.1.13}$$

的通解，而 $y=c_1\cos x+c_2\cos x$ 不是该方程的通解.

在通解之中，当一组任意常数确定时所得到的解称为**特解**. $y_1=\cos x$，$y_2=\sin x$，$y_3=\cos x+\sin x$ 都是微分方程(1.1.13)的特解. 为了确定微分方程的一个特解，可以给出这个微分方程所满足的定解条件，常见的定解条件是初始条件，即指定 n 阶微分方程(1.1.12)在某一点 x_0 所满足的条件

$$y(x_0)=y_0,\quad \frac{dy(x_0)}{dx}=y_0',\quad \cdots,\quad \frac{dy^{(n-1)}(x_0)}{dx^{n-1}}=y_0^{(n-1)}. \tag{1.1.14}$$

微分方程(1.1.12)连同初始条件(1.1.14)一起称为初始值问题. 例如，式(1.1.1)就是一阶微分方程的初始值问题.

近几十年来，计算机技术发展很快，在各个领域都有广泛的应用，在数学的各个分支中也发挥了很大的作用. 在学习常微分方程课程的同时，不但要掌握基本的理论和方法，而且对一些思路明确、方法简单、计算量大的问题，也应该会用计算机处理，以提高学习、工作效率，更重要的是培养尽量利用当代最新科技成果的意识，以便今后能自觉地将最新的成果应用到解决实际问题的过程之中. 在常微分方程课程中，将利用 Maple 软件包来处理一些问题，Mathematica 等其他软件包也可以进行类似的工作.

例 1.1.3 用 Maple 验证 $y=2\sqrt{4+x}-1$ 是微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-1}{2x-y+7} \tag{1.1.15}$$

的一个解.

解 要用计算机验证一个函数是方程的解，首先需要定义这个函数，然后再求它的导数，计算方程右端的值，进行化简，比较左右两端是否相等. 此问题思路清楚，但计算过程有点繁琐，可以用下面的 Maple 命令实现.

```
y:=x->2*(4+x)^(1/2)-1;
y_prime:=diff(y(x),x);
y_right:=(y(x)-1)/(2*x-y(x)+7);
```