新世纪地方高等院校专业系列教材

高等数学

（文 科）

主编 赵大宇

南京大学出版社

新世纪地方高等院校专业系列教材

高 等 数 学

（文 科）

主　编　赵大宇

副主编　王家铧

编写者　（按姓氏笔画为序）

王家铧　沈苏林　李晓毅

赵大宇　孟宪吉　党宝栋

钱明忠

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.文科/赵大宇主编.—2版.—南京:南京大学出版社,2009.1

(新世纪地方高等院校专业系列教材)

ISBN 978-7-305-03933-1

Ⅰ.高…　Ⅱ.赵…　Ⅲ.高等数学—高等学校—教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第008735号

出 版 者　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路22号　　　邮　编　210093
网　　址　http://press.nju.edu.cn
出 版 人　左　健

丛 书 名　新世纪地方高等院校专业系列教材
书　　名　高等数学(文科)(第2版)
主　　编　赵大宇
责任编辑　孟庆生　　　编辑热线　025-83597087

照　　排　南京南琳图文制作有限公司
印　　刷　南京紫藤制版印务中心
开　　本　787×960　1/16　印张 21.75　字数 372千
版　　次　2009年1月第2版　2009年1月第1次印刷
ISBN 978-7-305-03933-1
定　　价　34.00元

发行热线　025-83594756
电子邮箱　nupress1@public1.ptt.js.cn

新世纪地方高等院校专业系列教材

编 委 会

目　录

第 1 章　函数与极限

高等数学的基础内容是**微积分学**，简称**微积分**. 微积分的萌芽古代早已就有，但作为一门独立学科却诞生于 17 世纪，被誉为数学史上划时代的里程碑. 微积分诞生不久，便在许多学科及实际当中得到广泛的应用，极大地推动了科学技术的发展和社会进步. 而函数是高等数学研究的主要对象，它从数学方面反映了一切客观事物之间的相互联系与相互影响；极限是微积分的逻辑基础，它作为最基本的概念贯穿于微积分的始终；连续性是反映函数的重要形态之一. 本章将讲述函数、极限以及函数的连续性等内容.

§1.1　函数及其性质

在同一个自然现象、社会现象以及日常生活的实际问题中，往往同时有多个变量在变化着，这几个变量并不是孤立地在变，而是存在着一定的相依关系，并遵循着一定的变化规律. 这种相依关系的数学抽象就是函数.

1.1.1　函数的概念

从本质上讲，函数是从一个集合到另一个集合的**映射**，即给定两个集合 A 和 B，若对于 A 中的每个元素 a，按照某一对应关系 f，在 B 中都有唯一确定的一个元素 b 与它对应，则称 f 为 A 上的一个函数，记作：$f: A\to B$，集合 A 称为函数的**定义域**，与 A 中元素对应的 B 中元素 b 构成的集合称为函数的**值域**.

在这一函数定义中对定义域的集合 A 和值域的集合 B 中的元素的性质没有加以限制，但在微积分中我们通常研究的函数定义域和值域均为实数集，这类函数称为实变数的**实值函数**，下面给出这样函数的定义.

定义 1 设 X 是一个给定的**数集**，f 是一个确定的对应关系，如果对于 X 中的每一个元素 x，通过 f 都有 $\mathbf{R}$ 内的唯一确定的一个元素 y 与之对应，那么这个对应关系 f 就叫做从 X 到 $\mathbf{R}$ 的函数关系，简称**函数**，记为：

$$f: X \to \mathbf{R} \quad \text{或} \quad f(x)=y.$$

我们把按照函数 f 与 $x \in X$ 所对应的 $y \in \mathbf{R}$ 叫做 f 在 x 处的函数值. 记作 $y=f(x)$. 并把 X 叫做函数 f 的定义域. 而 f 的全体函数值的集合 $\{f(x) \mid x \in X\}$ 叫做函数 f 的值域，通常用 Y 表示，即 $Y=\{f(x) \mid x \in X\}$.

我们在微积分中把函数用 $y=f(x)$，$x \in X$ 来表示，并叙述为 y 是 x 的函数，其中 x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**. 通常把 y 叫做 x 的函数.

历史上，"函数"(function)一词是由著名的德国数学家莱布尼兹(Leibniz)于 1692 年首先采用并引入数学的. 他是针对某种类型的数学公式来使用这一术语的. 尽管当时他已经考虑到变量 x 以及和它同时变化的变量 y 之间的依赖关系，但他还是没有能够给出一个明确的函数定义. 其后经欧拉(Euler)等人不断修正、扩充，才逐步形成一个较为完整的函数概念. 在我国，函数一词是清代数学家李善兰最早使用的，他在 1859 年与英国学者伟烈亚力合译的《代数学》一书中，将"function"译作"函数".

函数除了用字母"f"表示以外，当然也可以用其他字母表示，例如，用"F"，"φ"等等来表示函数. 甚至也可以用 $y=y(x)$ 来表示一个函数，但在同一个问题中不同的函数一定要用不同的符号表示.

在定义 1 中，我们用"唯一确定"来表明所讨论的函数都是单值的. 所谓**单值函数**就是对于 X 中的每一个值 x，都有一个而且只有一个 y 的值与之对应的函数；对于 X 中的某个 x 值有多于一个 y 的值与之对应的函数，叫做**多值函数**. 我们在微积分中主要讨论的是单值函数.

1.1.2 出租车的计价方法

某城市出租车的计价器按如下方法计价：里程不超过 4 km 的为 5 元，里程超过 4 km 但不超过 10 km 的，超出部分为每公里 1.5 元，里程超过 10 km 的超出部分为每公里 1.8 元. 如果设行驶路程 x，所需出租车费用为 y，那么所需费用 y 是行驶里程 x 的函数. 可以表示为下面的式子：

$$y=\begin{cases} 5, & 0<x\leqslant 4, \\ 5+1.5(x-4), & 4<x\leqslant 10, \\ 14+1.8(x-10), & x>10. \end{cases}$$

由上述式子可以看出，在自变量的不同变化范围内，函数的对应关系是

不同的. 我们将这种函数在其定义域内对应法则不能由一个式子表示，而是在定义域的不同区段上由不同的式子来表示的函数叫做**分段函数**. 分段函数的定义域是多个部分的自变量取值集合的并集，求分段函数的函数值 $f(x_0)$ 时，要根据 x_0 所在的部分，选出相应的解析式.

例 1　设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & -2\leqslant x<0, \\ 2, & x=0, \\ 1+x, & 0<x\leqslant 3. \end{cases}$

(1) 求函数的定义域；

(2) 求 $f(-2)$，$f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$；

(3) 做出函数的图形.

解　已知函数是一个分段函数，该函数用三个解析式子表示，当 $x\in[-2,0]$ 时，$f(x)=x^2$；当 $x=0$ 时，$f(x)=2$；当 $x\in(0,3)$ 时，$f(x)=1+x$.

(1) 自变量 x 的取值范围分为三部分：$[-2,0)$，0 和 $(0,3]$，因此函数的定义域应为这三个集合的并集，即 $[-2,3]$.

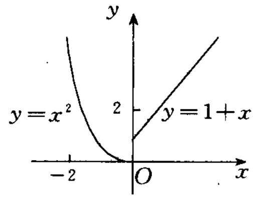

图 1-1-1

(2) 由于 $-2\in[-2,0)$，$-1\in[-2,0)$，故 $f(-2)=(-2)^2=4$，$f(-1)=(-1)^2=1$.

由于 $x=0$ 时，$f(x)=2$，故 $f(0)=2$. 由于 $1\in(0,3]$，故 $f(1)=1+1=2$.

(3) 利用描点法，分段作出各部分函数图形，如图 1-1-1 所示.

例 2　由气象学可知，离地面越高气温越低，气温(℃)与距离地面的高度 h(km)之间的函数关系为

$$T=\begin{cases} 15-6.5h, & 0\leqslant h<11, \\ -56.5, & 11\leqslant h\leqslant 80. \end{cases}$$

(1) 求离地面高度为 10 km 处及 20 km 处的气温.

(2) 作出函数图像.

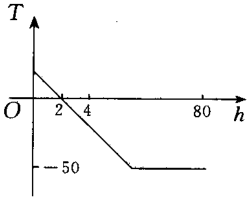

图 1-1-2

解　(1) 因为 $h=10\in[0,11)$，则 $T(10)=15-6.5\times 10=-50$，即离地面高度为 10 km 处气温为 −50℃.

由于 $20\in[11,80]$，此时 T 恒为 −56.5，则 $T(20)=-56.5$，即离地面高度为 20 km 处气温为 −56.5℃.

(2) 根据分段函数的表示式，h 在 $[0,11)$ 区间时函数图像为一直线，而当 $h\in[11,80]$ 时，T 恒为 −56.5，在此区间函数图像为一平行 h 轴的直线，如图 1-1-2 所示.

1.1.3 反函数

一般来说，在函数关系中，自变量与因变量都是相对而言，例如我们可以把圆的面积 S 表示为半径 r 的函数 $S=\pi r^2(r\geqslant 0)$，也可以把半径 r 表示为面积的函数：$r=\sqrt{S/\pi}(S\geqslant 0)$，就这两个函数来说，我们可以把后一个函数看做是前一个函数的反函数，也可以把前一个函数看做是后一个函数的反函数. 由此，我们还可以看出对数函数 $y=\log_a x(x>0,a>0$，且 $a\neq 1)$ 与指数函数 $y=a^x(x>0,a>0$，且 $a\neq 1)$ 互为反函数；正弦函数 $y=\sin x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 与反正弦函数 $y=\arcsin x$ 也互为反函数.

定义 2 给定函数 $y=f(x)$ $(x\in X,y\in Y)$，如果对于 Y 中的每一个值 $y=y_0$，都有 X 中唯一的一个值 $x=x_0$，使得 $f(x_0)=y_0$，那么可以称在 Y 上确定了 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作

$$x=f^{-1}(y)(y\in Y).$$

通常我们称 $y=f(x)$ 为**直接函数**，而用符号"f^{-1}"表示新的函数关系. 例如：若直接函数 $S=f(r)=\pi r^2(0\leqslant r\leqslant+\infty)$，则其反函数为 $f^{-1}(S)=\sqrt{S/\pi}$ $(0\leqslant S<+\infty)$. 一般地，直接函数与反函数的对应关系、定义域和值域是不相同的，反函数的定义域和值域恰好是直接函数的值域和定义域，即若 $f:X\to Y$，则

$$f^{-1}:Y\to X.$$

习惯上，我们用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因而常把函数 $y=f(x)$ 的反函数写成 $y=f^{-1}(x)$ 的形式，从而 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的，这是因为这两个函数因变量和自变量互换的缘故. 比如若将指数函数 $y=a^x$ 及对数函数 $y=\log_a x$ 的图像画在一个坐标系中就可以看出它们的图形关于 $y=x$ 这一直线对称，如图1-1-3 所示.

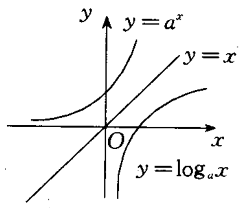

图 1-1-3

给了一个函数 $y=f(x)$，如何求它的反函数呢？一般来说只要把 x 解出来即可.

例 3 求 $y=2x+3(-\infty<x<+\infty)$ 的反函数.

解 由 $y=2x+3$ 解得 $2x=y-3$，即 $x=\dfrac{y}{2}-\dfrac{3}{2}(-\infty<x<+\infty)$，则 $x=\dfrac{y}{2}-\dfrac{3}{2}$ 为 $y=2x+3$ 的反函数，习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量，于是可