

新世纪地方高等院校专业系列教材

# 高等数学

(文科)

主编 赵大宇



南京大学出版社

新世纪地方高等院校专业系列教材

# 高等数学

(文科)

主 编 赵大宇

副主编 王家铨

编写者 (按姓氏笔画为序)

王家铨 沈苏林 李晓毅

赵大宇 孟宪吉 党宝栋

钱明忠

南京大学出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

高等数学.文科/赵大宇主编.—2版.—南京:南京大学出版社,2009.1

(新世纪地方高等院校专业系列教材)

ISBN 978-7-305-03933-1

I. 高… II. 赵… III. 高等数学—高等学校—教材  
IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 008735 号

出版者 南京大学出版社

社 址 南京市汉口路 22 号 邮 编 210093

网 址 <http://press.nju.edu.cn>

出版人 左 健

丛 书 名 新世纪地方高等院校专业系列教材

书 名 高等数学(文科)(第 2 版)

主 编 赵大宇

责任编辑 孟庆生 编辑热线 025-83597087

照 排 南京南琳图文制作有限公司

印 刷 南京紫藤制版印务中心

开 本 787×960 1/16 印张 21.75 字数 372 千

版 次 2009 年 1 月第 2 版 2009 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-305-03933-1

定 价 34.00 元

发行热线 025-83594756

电子邮箱 [nupress1@public1.ptt.js.cn](mailto:nupress1@public1.ptt.js.cn)

---

\* 版权所有,侵权必究

\* 凡购买南大版图书,如有印装质量问题,请与所购  
图书销售部门联系调换

新世纪地方高等院校专业系列教材

**编 委 会**

学 术 顾 问 王德滋 孙义燧 袁振国  
朱小蔓 谢安邦

总 主 编 周建忠

编 委 会 主 任 周建忠 左 健

编 委 会 副 主 任 金鑫荣

编 委 会 成 员 (按姓氏笔画排序)

王兴林 左 健 许金生

刘 建 刘海涛 刘周堂

吴孝成 李进金 陈江风

余三定 张庆利 金鑫荣

周建忠 赵嘉麒 赵立兴

郭 永 熊术新 黎大志

薛家宝

# 目 录

<b>第 1 章 函数与极限</b> .....	1
§ 1.1 函数及其性质 .....	1
1.1.1 函数的概念 .....	1
1.1.2 出租车的计价方法 .....	2
1.1.3 反函数 .....	4
1.1.4 函数的函数 .....	5
1.1.5 计算器上的 $e$ .....	6
1.1.6 函数的基本性质 .....	7
思考题 .....	7
§ 1.2 数列极限与函数极限 .....	8
1.2.1 惠施的“一尺之棰,日取之半”说 .....	8
1.2.2 函数的极限 .....	10
1.2.3 无穷小量 .....	14
§ 1.3 极限的运算 .....	15
1.3.1 极限的运算性质 .....	15
1.3.2 两个重要极限 .....	16
思考题 .....	21
§ 1.4 函数的连续性 .....	22
1.4.1 连续函数的概念 .....	22
1.4.2 函数的间断点 .....	23
1.4.3 初等函数的连续性 .....	24
1.4.4 闭区间上连续函数的性质 .....	25

思考题 .....	26
习 题 .....	27
<b>第 2 章 导数与微分 .....</b>	<b>29</b>
§ 2.1 导数 .....	29
2.1.1 函数变化率 .....	29
2.1.2 导数是什么 .....	32
2.1.3 导数也有左右 .....	35
2.1.4 函数可导则连续 .....	37
2.1.5 函数可以多次求导 .....	37
思考题 .....	38
§ 2.2 求导法则和公式 .....	38
2.2.1 依法则求导 .....	38
2.2.2 复合函数的求导法则 .....	40
2.2.3 用复合函数求导法则,求隐函数的导数 .....	40
2.2.4 基本初等函数的求导公式 .....	41
2.2.5 导数公式 .....	44
思考题 .....	45
§ 2.3 微分与导数的线形逼近 .....	45
2.3.1 线形逼近与微分 .....	45
2.3.2 微分的求法和运算 .....	47
2.3.3 微分在近似计算中的应用 .....	48
思考题 .....	50
习 题 .....	50
<b>第 3 章 中值定理和导数的应用 .....</b>	<b>53</b>
§ 3.1 中值定理 .....	53
3.1.1 费尔马定理 .....	53
3.1.2 特殊中值定理——罗尔(M. Roue)定理 .....	54
思考题 .....	56
§ 3.2 计算不定式极限的方法 .....	56

3.2.1	$\frac{0}{0}$ , $\frac{\infty}{\infty}$ 不定式	56
3.2.2	不定式的其他形式	59
	思考题	60
§ 3.3	函数性质的研究	60
3.3.1	函数的增减性	60
3.3.2	函数的极值	61
3.3.3	函数的最大值和最小值	63
	思考题	66
§ 3.4	函数曲线的弯曲方向与函数图形的作法	67
3.4.1	曲线的弯曲方向——凹凸性	67
3.4.2	函数图形的作法	69
	思考题	72
	习 题	72
<b>第 4 章</b>	<b>不定积分</b>	<b>75</b>
§ 4.1	不定积分的概念与性质	76
4.1.1	原函数与不定积分	76
4.1.2	不定积分的几何意义	77
4.1.3	基本积分公式	78
4.1.4	不定积分的性质	79
	思考题	81
§ 4.2	换元积分法	81
4.2.1	第一类换元法(凑微分法)	81
4.2.2	第二类换元法	83
	思考题	84
§ 4.3	分部积分法	85
	思考题	87
	习 题	87
<b>第 5 章</b>	<b>定积分</b>	<b>88</b>

§ 5.1 定积分的概念与性质 .....	88
5.1.1 曲边梯形的面积与变速直线运动的路程 .....	88
5.1.2 定积分的定义 .....	90
5.1.3 定积分的基本性质 .....	91
思考题 .....	93
§ 5.2 牛顿-莱布尼兹公式 .....	94
5.2.1 变上限的定积分 .....	94
5.2.2 定积分基本定理 .....	95
思考题 .....	97
§ 5.3 定积分的计算 .....	97
5.3.1 换元积分法 .....	97
5.3.2 分部积分法 .....	100
思考题 .....	101
§ 5.4 定积分的应用 .....	101
5.4.1 定积分的微元法 .....	101
5.4.2 平面图形的面积 .....	102
5.4.3 立体的体积 .....	104
思考题 .....	106
习 题 .....	106
<b>第 6 章 微分方程 .....</b>	<b>108</b>
§ 6.1 常微分方程的一般概念 .....	108
思考题 .....	110
§ 6.2 一阶微分方程 .....	110
6.2.1 可直接积分的微分方程 .....	110
6.2.2 可分离变量的一阶微分方程 .....	111
6.2.3 齐次微分方程 .....	111
6.2.4 一阶线性微分方程 .....	113
§ 6.3 微分方程应用举例 .....	115
思考题 .....	117
习 题 .....	117



<b>第 7 章 多元函数的微分及其应用</b> .....	119
§ 7.1 空间解析几何简介 .....	119
7.1.1 空间直角坐标系 .....	119
7.1.2 空间平面、空间直线与三元一次方程 .....	121
7.1.3 电厂的冷水塔和马鞍 .....	124
7.1.4 空间曲线 .....	128
§ 7.2 多元函数的有关概念 .....	130
7.2.1 多元函数的定义 .....	130
7.2.2 二元函数的定义域 .....	131
7.2.3 二元函数的几何意义 .....	132
思考题 .....	133
§ 7.3 二元函数的极限与连续性 .....	133
7.3.1 二元函数的极限 .....	133
7.3.2 二元函数的连续性 .....	135
思考题 .....	136
§ 7.4 偏导数和全微分 .....	136
7.4.1 偏导数的定义 .....	136
7.4.2 二元函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数的几何意义 .....	138
7.4.3 高阶偏导数 .....	138
7.4.4 全微分 .....	139
思考题 .....	142
§ 7.5 二元复合函数的微分方法 .....	142
思考题 .....	145
§ 7.6 二元函数的极值和最值 .....	145
7.6.1 二元函数极值的定义 .....	145
7.6.2 做木箱如何才能最省料 .....	146
7.6.3 最佳广告策略 .....	148
习 题 .....	150
<b>第 8 章 二元函数积分学</b> .....	152
§ 8.1 二重积分的概念 .....	152

8.1.1	两个引例	152
8.1.2	二重积分的定义	154
8.1.3	二重积分的几何意义	155
	思考题	156
§ 8.2	二重积分的性质	156
	思考题	157
§ 8.3	二重积分的计算	157
8.3.1	在直角坐标系中计算二重积分	158
8.3.2	在极坐标系中计算二重积分	164
	思考题	168
§ 8.4	二重积分的简单应用	168
8.4.1	利用对称性计算二重积分	168
8.4.2	计算平面图形的面积	169
8.4.3	计算空间立体的体积	170
	习 题	172
<b>第 9 章</b>	<b>线性代数初步</b>	174
§ 9.1	行列式	174
9.1.1	行列式的概念	174
9.1.2	行列式的性质与运算	179
9.1.3	用行列式解线性方程组	181
	思考题	182
§ 9.2	矩阵	183
9.2.1	矩阵的概念	183
9.2.2	矩阵的运算	184
9.2.3	矩阵的初等变换	187
9.2.4	逆矩阵	188
	思考题	190
§ 9.3	解线性方程组	190
9.3.1	利用逆矩阵解线性方程组	191
9.3.2	利用初等变换解线性方程组	192

思考题 .....	194
习 题 .....	194
<b>第 10 章 运筹与线性规划入门 .....</b>	<b>197</b>
§ 10.1 线性规划的概念 .....	197
10.1.1 问题的提出和模型的建立 .....	197
10.1.2 线性规划问题的标准形式 .....	200
思考题 .....	202
§ 10.2 求解线性规划问题的基本方法 .....	202
10.2.1 线性规划问题的消去法 .....	202
10.2.2 线性规划问题单纯形法 .....	205
思考题 .....	210
习 题 .....	210
<b>第 11 章 组合与图 .....</b>	<b>213</b>
§ 11.1 排列与组合数的计算 .....	216
11.1.1 加法原理与乘法原理 .....	216
11.1.2 排列与组合 .....	219
思考题 .....	223
§ 11.2 容斥原理与抽屉原理 .....	223
11.2.1 容斥原理 .....	223
11.2.2 抽屉原理 .....	226
§ 11.3 狼羊同渡问题 .....	230
11.3.1 图的有关概念 .....	230
11.3.2 路与连通 .....	232
11.3.3 一笔画问题 .....	236
11.3.4 迷宫问题 .....	238
思考题 .....	239
§ 11.4 最短路问题 .....	240
11.4.1 匀酒问题 .....	240
11.4.2 中国邮路问题 .....	244

11.4.3	货郎担问题 .....	246
11.4.4	供水系统方案 .....	247
	习 题 .....	248
	I .....	248
	II .....	250
	III .....	251
	IV .....	252
<b>第 12 章</b>	<b>概率统计初步——对随机现象的研究</b> .....	<b>253</b>
§ 12.1	对随机现象的分析 .....	253
12.1.1	随机现象与随机事件 .....	253
12.1.2	事件的关系与运算 .....	255
12.1.3	随机事件的概率 .....	258
12.1.4	条件概率 .....	262
	思考题 .....	266
§ 12.2	对随机变量的分析 .....	266
12.2.1	随机变量的引入 .....	266
12.2.2	离散型随机变量 .....	267
12.2.3	连续型随机变量 .....	270
12.2.4	分布函数 .....	273
	思考题 .....	276
§ 12.3	随机变量的数字特征 .....	276
12.3.1	随机变量取值的“平均”程度——数学期望 .....	276
12.3.2	随机变量与其平均数的偏离程度——方差 .....	278
	思考题 .....	280
§ 12.4	统计推断介绍 .....	280
12.4.1	总体与样本 .....	280
12.4.2	分布函数、分布密度的近似求法 .....	281
12.4.3	常用统计量 .....	285
12.4.4	参数估计 .....	289
12.4.5	假设检验 .....	295

思考题 .....	301
§ 12.5 一元回归简介 .....	301
12.5.1 散点图与回归直线 .....	302
12.5.2 利用回归直线方程作预测与控制 .....	306
思考题 .....	308
习 题 .....	308
<b>第 13 章 数学建模</b> .....	310
§ 13.1 数学模型和数学建模 .....	310
思考题 .....	312
§ 13.2 方桌问题和接人问题 .....	312
13.2.1 方桌问题 .....	312
13.2.2 接人问题 .....	313
§ 13.3 人口问题 .....	313
思考题 .....	316
§ 13.4 广告问题 .....	316
思考题 .....	319
§ 13.5 森林管理模型 .....	319
思考题 .....	323
习 题 .....	323
<b>附 录</b> .....	326
I $P_{\lambda}(\kappa) = \frac{\lambda^{\kappa}}{\kappa!} e^{-\lambda}$ 数值表 .....	326
II 标准正态分布表 .....	327
III $x^2$ 分布临界值表 .....	328
IV $t$ 分布临界值表 .....	330

# 第 1 章 函数与极限

高等数学的基础内容是微积分学,简称微积分.微积分的萌芽古代早已就有,但作为一门独立学科却诞生于 17 世纪,被誉为数学史上划时代的里程碑.微积分诞生不久,便在许多学科及实际当中得到广泛的应用,极大地推动了科学技术的发展和社会进步.而函数是高等数学研究的主要对象,它从数学方面反映了一切客观事物之间的相互联系与相互影响;极限是微积分的逻辑基础,它作为最基本的概念贯穿于微积分的始终;连续性是反映函数的重要形态之一.本章将讲述函数、极限以及函数的连续性等内容.

## § 1.1 函数及其性质

在同一个自然现象、社会现象以及日常生活的实际问题中,往往同时有多个变量在变化着,这几个变量并不是孤立地在变,而是存在着一定的相依关系,并遵循着一定的变化规律.这种相依关系的数学抽象就是函数.

### 1.1.1 函数的概念

从本质上讲,函数是从一个集合到另一个集合的映射,即给定两个集合  $A$  和  $B$ ,若对于  $A$  中的每个元素  $a$ ,按照某一对应关系  $f$ ,在  $B$  中都有唯一确定的一个元素  $b$  与它对应,则称  $f$  为  $A$  上的一个函数,记作: $f: A \rightarrow B$ ,集合  $A$  称为函数的定义域,与  $A$  中元素对应的  $B$  中元素  $b$  构成的集合称为函数的值域.

在这一函数定义中对定义域的集合  $A$  和值域的集合  $B$  中的元素的性质没有加以限制,但在微积分中我们通常研究的函数定义域和值域均为实数集,这类函数称为实变函数的**实值函数**,下面给出这样函数的定义.

**定义 1** 设  $X$  是一个给定的数集,  $f$  是一个确定的对应关系, 如果对于  $X$  中的每一个元素  $x$ , 通过  $f$  都有  $\mathbf{R}$  内的唯一确定的一个元素  $y$  与之对应, 那么这个对应关系  $f$  就叫做从  $X$  到  $\mathbf{R}$  的函数关系, 简称函数, 记为:

$$f: X \rightarrow \mathbf{R} \quad \text{或} \quad f(x) = y.$$

我们把按照函数  $f$  与  $x \in X$  所对应的  $y \in \mathbf{R}$  叫做  $f$  在  $x$  处的函数值. 记作  $y = f(x)$ . 并把  $X$  叫做函数  $f$  的定义域. 而  $f$  的全体函数值的集合  $\{f(x) | x \in X\}$  叫做函数  $f$  的值域, 通常用  $Y$  表示, 即  $Y = \{f(x) | x \in X\}$ .

我们在微积分中把函数用  $y = f(x)$ ,  $x \in X$  来表示, 并叙述为  $y$  是  $x$  的函数, 其中  $x$  叫做自变量,  $y$  叫做因变量. 通常把  $y$  叫做  $x$  的函数.

历史上, “函数”(function)一词是由著名的德国数学家莱布尼兹(Leibniz)于 1692 年首先采用并引入数学的. 他是针对某种类型的数学公式来使用这一术语的. 尽管当时他已经考虑到变量  $x$  以及和它同时变化的变量  $y$  之间的依赖关系, 但他还是没有能够给出一个明确的函数定义. 其后经欧拉(Euler)等人不断修正、扩充, 才逐步形成一个较为完整的函数概念. 在我国, 函数一词是清代数学家李善兰最早使用的, 他在 1859 年与英国学者伟烈亚力合译的《代数学》一书中, 将“function”译作“函数”.

函数除了用字母“ $f$ ”表示以外, 当然也可以用其他字母表示, 例如, 用“ $F$ ”, “ $\varphi$ ”等等来表示函数. 甚至也可以用  $y = y(x)$  来表示一个函数, 但在同一个问题中不同的函数一定要用不同的符号表示.

在定义 1 中, 我们用“唯一确定”来表明所讨论的函数都是单值的. 所谓单值函数就是对于  $X$  中的每一个值  $x$ , 都有一个而且只有一个  $y$  的值与之对应的函数; 对于  $X$  中的某个  $x$  值有多于一个  $y$  的值与之对应的函数, 叫做多值函数. 我们在微积分中主要讨论的是单值函数.

### 1.1.2 出租车的计价方法

某城市出租车的计价器按如下方法计价: 里程不超过 4 km 的为 5 元, 里程超过 4 km 但不超过 10 km 的, 超出部分为每公里 1.5 元, 里程超过 10 km 的超出部分为每公里 1.8 元. 如果设行驶路程  $x$ , 所需出租车费用为  $y$ , 那么所需费用  $y$  是行驶里程  $x$  的函数. 可以表示为下面的式子:

$$y = \begin{cases} 5, & 0 < x \leq 4, \\ 5 + 1.5(x - 4), & 4 < x \leq 10, \\ 14 + 1.8(x - 10), & x > 10. \end{cases}$$

由上述式子可以看出, 在自变量的不同变化范围内, 函数的对应关系是

不同的. 我们将这种函数在其定义域内对应法则不能由一个式子表示, 而是在定义域的不同区段上由不同的式子来表示的函数叫做分段函数. 分段函数的定义域是多个部分的自变量取值集合的并集, 求分段函数的函数值  $f(x_0)$  时, 要根据  $x_0$  所在的部分, 选出相应的解析式.

例1 设函数  $f(x) = \begin{cases} x^2, & -2 \leq x < 0, \\ 2, & x = 0, \\ 1+x, & 0 < x \leq 3. \end{cases}$

- (1) 求函数的定义域;
- (2) 求  $f(-2), f(-1), f(0), f(1)$ ;
- (3) 做出函数的图形.

解 已知函数是一个分段函数, 该函数用三个解析式子表示, 当  $x \in [-2, 0]$  时,  $f(x) = x^2$ ; 当  $x = 0$  时,  $f(x) = 2$ ; 当  $x \in (0, 3)$  时,  $f(x) = 1 + x$ .

(1) 自变量  $x$  的取值范围分为三部分:  $[-2, 0)$ ,  $0$  和  $(0, 3]$ , 因此函数的定义域应为这三个集合的并集, 即  $[-2, 3]$ .

(2) 由于  $-2 \in [-2, 0)$ ,  $-1 \in [-2, 0)$ , 故  $f(-2) = (-2)^2 = 4$ ,  $f(-1) = (-1)^2 = 1$ .

由于  $x = 0$  时,  $f(x) = 2$ , 故  $f(0) = 2$ . 由于  $1 \in (0, 3]$ , 故  $f(1) = 1 + 1 = 2$ .

(3) 利用描点法, 分段作出各部分函数图形, 如图 1-1-1 所示.

例2 由气象学可知, 离地面越高气温越低, 气温( $^{\circ}\text{C}$ )与距离地面的高度  $h(\text{km})$  之间的函数关系为

$$T = \begin{cases} 15 - 6.5h, & 0 \leq h < 11, \\ -56.5, & 11 \leq h \leq 80. \end{cases}$$

- (1) 求离地面高度为 10 km 处及 20 km 处的气温.
- (2) 作出函数图像.

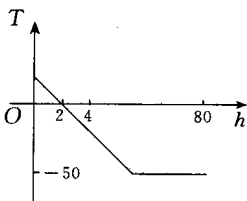


图 1-1-2

解 (1) 因为  $h = 10 \in [0, 11)$ , 则  $T(10) = 15 - 6.5 \times 10 = -50$ , 即离地面高度为 10 km 处气温为  $-50^{\circ}\text{C}$ .

由于  $20 \in [11, 80]$ , 此时  $T$  恒为  $-56.5$ , 则  $T(20) = -56.5$ , 即离地面高度为 20 km 处气温为  $-56.5^{\circ}\text{C}$ .

(2) 根据分段函数的表示式,  $h$  在  $[0, 11)$  区间时函数图像为一斜线, 而当  $h \in [11, 80]$  时,  $T$  恒为  $-56.5$ , 在此区间函数图像为一平行  $h$  轴的直线, 如图 1-1-2 所示.

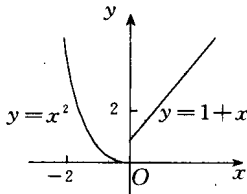


图 1-1-1



## 1.1.3 反函数

一般来说,在函数关系中,自变量与因变量都是相对而言,例如我们可以把圆的面积  $S$  表示为半径  $r$  的函数  $S = \pi r^2 (r \geq 0)$ ,也可以把半径  $r$  表示为面积的函数:  $r = \sqrt{S/\pi} (S \geq 0)$ ,就这两个函数来说,我们可以把后一个函数看做是前一个函数的反函数,也可以把前一个函数看做是后一个函数的反函数.由此,我们还可以看出对数函数  $y = \log_a x (x > 0, a > 0, \text{且 } a \neq 1)$  与指数函数  $y = a^x (x > 0, a > 0, \text{且 } a \neq 1)$  互为反函数;正弦函数  $y = \sin x (-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$  与反正弦函数  $y = \arcsin x$  也互为反函数.

**定义 2** 给定函数  $y = f(x) (x \in X, y \in Y)$ ,如果对于  $Y$  中的每一个值  $y = y_0$ ,都有  $X$  中唯一的一个值  $x = x_0$ ,使得  $f(x_0) = y_0$ ,那么可以称在  $Y$  上确定了  $y = f(x)$  的反函数,记作

$$x = f^{-1}(y) (y \in Y).$$

通常我们称  $y = f(x)$  为直接函数,而用符号“ $f^{-1}$ ”表示新的函数关系.例如:若直接函数  $S = f(r) = \pi r^2 (0 \leq r \leq +\infty)$ ,则其反函数为  $f^{-1}(S) = \sqrt{S/\pi} (0 \leq S < +\infty)$ .一般地,直接函数与反函数的对应关系、定义域和值域是不相同的,反函数的定义域和值域恰好是直接函数的值域和定义域,即若  $f: X \rightarrow Y$ ,则

$$f^{-1}: Y \rightarrow X.$$

习惯上,我们用  $x$  表示自变量,用  $y$  表示因变量,因而常把函数  $y = f(x)$  的反函数写成  $y = f^{-1}(x)$  的形式,从而  $y = f(x)$  与  $y = f^{-1}(x)$  的图形是关于直线  $y = x$  对称的,这是因为这两个函数因变量和自变量互换的缘故.比如若将指数函数  $y = a^x$  及对数函数  $y = \log_a x$  的图像画在一个坐标系中就可以看出它们的图形关于  $y = x$  这一直线对称,如图 1-1-3 所示.

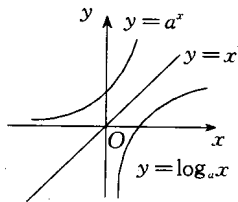


图 1-1-3

给了一个函数  $y = f(x)$ ,如何求它的反函数呢?一般来说只要把  $x$  解出来即可.

**例 3** 求  $y = 2x + 3 (-\infty < x < +\infty)$  的反函数.

**解** 由  $y = 2x + 3$  解得  $2x = y - 3$ ,即  $x = \frac{y}{2} - \frac{3}{2} (-\infty < x < +\infty)$ ,则  $x = \frac{y}{2} - \frac{3}{2}$  为  $y = 2x + 3$  的反函数,习惯上用  $x$  表示自变量, $y$  表示因变量,于是可