微积分解题集萃

马传渔 编著

WEIJIFEN
JIETIJICUI

南京大学出版社

微积分解题集萃

马传渔　编著

南京大学出版社

内容提要

本书是南京大学金陵学院编著使用的经济管理类《微积分》教材的配套用书。内容包括函数、函数的极限、函数的连续性、导数与微分、微分中值定理及其应用、不定积分、定积分、反常积分，以及微积分的经济应用。

本书内容强调知识板块之间的有机联系，突出各类题型的归纳和剖释，综述解题技巧、方法的掌握和应用，有助于微积分知识的牢固掌握和解题能力的快速提升。

本书可作为大学经济管理类学生的微积分学习的教学参考书，也可作为高等学校独立学院的辅导教材。

图书在版编目(CIP)数据

微积分解题集萃/马传渔编著. —南京:南京大学出版社,2009.9

ISBN 978-7-305-06421-0

Ⅰ.微… Ⅱ.马… Ⅲ.微积分—高等学校—解题 Ⅳ.0172-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 157327 号

出 版 者 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮　　编 210093
网　　址 http://www.NjupCo.com
出 版 人 左　健

书　　名 微积分解题集萃
编 著 者 马传渔
责任编辑 王振义　　编辑热线 025-83596027

照　　排 南京大学印刷厂
印　　刷 南京大学印刷厂
开　　本 787×960 1/16　印张 12　字数 222 千
版　　次 2009 年 9 月第 1 版　2009 年 9 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-06421-0
定　　价 22.00 元

发行热线 025-83594756
电子邮件 Press@NjupCo.com
　　　　 Sales@NjupCo.com(市场部)

前　　言

南京大学金陵学院编著使用的经济管理类《微积分》教材自2007年5月出版至今，已被广大读者认可。2008年5月第二版问世之后，广大读者期望有一本配套的辅导兼提升的教材，既有利于微积分内容的牢固掌握，又能收到知识升华的效果。在广大读者的企盼中，《微积分解题集萃》一书与大家见面了。

1. 本书根据高等学校独立学院的培养目标，对照大学经济管理类微积分课程的教学要求，参考数学(三)的考研内容，制订了本书的章节目录。全书共分八章，每章分若干节，每节由六道题组成，全书共有360道题。

2. 本书强调知识板块的有机联系和综合运用，每章、节的开头简明扼要地列出了重要概念、著名定理和解题公式。

3. 本书以考题题型、内容和解题方法、技巧为两条鸿线，剖释、综述360道题，旨在快速提升解题能力。

4. 本书遵循螺旋式上升的学习规律，对涉及基本概念、基本理论和基本运算的"三基"题的解法作了必要的铺垫，避免跳步。对近五年的数学考研题，经认真筛选和选用，使广大读者对解题方法的掌握和运用更臻完美。

5. 本书第八章微积分的经济应用的内容是值得一读的。书末给出的索引，用于查阅《微积分》教材中部分习题的

解答。书中注明年份的题目表示它是该年的研究生考题。

本书能与读者见面,得益于南京大学金陵学院姚天扬院长和王殿祥书记的厚爱与指导。

藉此机会感谢金陵学院李元、王均义两位教务主任和经济管理系邹一峰主任的关心与支持。

由于水平有限,不当之处在所难免,恳请专家、同行和读者不吝赐教。

南京大学金陵学院

马传渔

2009年8月

目　　录

第一章 函 数

1. 常用的逻辑符号

(1)符号“$\forall$”表示“对任何”之意.

(2)符号“$\exists$”表示“存在”之意.

(3)充分必要条件“$\Leftrightarrow$”,它由必要条件“$\Rightarrow$”与充分条件“$\Leftarrow$”组成.

$P\Rightarrow Q$,表示命题 P 的必要条件是 Q,即由 P 可推出 Q.

$P\Leftarrow Q$,表示命题 P 的充分条件是 Q,即由 Q 可推出 P.

$P\Leftrightarrow Q$,表示命题 P 的充分必要条件是 Q,即命题 P 与命题 Q 是等价的.

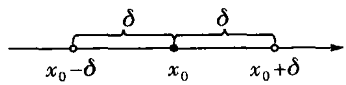
2. 邻域与去心邻域

(1)δ 邻域.

取定 $x_0\in\mathbf{R}$ 及实数 $\delta>0$,则开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域,记作 $U(x_0,\delta)$,即 $U(x_0,\delta)=\{x\,|\,|x-x_0|<\delta\}$,亦即

$U(x_0,\delta)=\{x\,|\,x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$,

称 x_0 为邻域中心,δ 为邻域半径(见右图).



(2)去心 δ 邻域.

若将邻域 $U(x_0,\delta)$ 的中心 x_0 去掉,就得到点 x_0 的去心 δ 邻域,记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$,即

$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}$,亦即

$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\,|\,x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)\}$.

通常,称 $(x_0-\delta,x_0)$ 为点 x_0 的左 δ 邻域,$(x_0,x_0+\delta)$ 为点 x_0 的右 δ 邻域.

3. 函数的定义

设 x,y 是两个变量,D 是一个非空实数集合,$\forall x\in D$,如果按一个对应法则 f,总有唯一确定的 y 值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$,$x\in D$. 称 x 为自变量,x 的取值范围 D 为函数 $f(x)$ 的定义域,y 为因变量或函数.

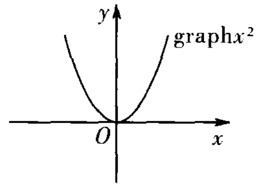
函数常用的表示法有 3 种:解析法(又叫公式法)、表格法和图形法.

用解析式给出的函数,其定义域是使得解析式有意义的一切实数所组成的集合,称这样的定义域为自然定义域. 实际问题中函数的定义域是由问题的背景确定的.

函数定义中有两个基本要素:定义域与对应法则. 因此只有当两个函数的定义域与对应法则完全相同时,才认为它们是同一函数.

在 xOy 平面上建立直角坐标系,则函数 $y=f(x)$ 在 xOy 平面上的图形通常为曲线.

记 $\mathrm{graph}f=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$,称 $\mathrm{graph}f$ 为函数 $y=f(x)$ 的图形或图像.



比如,$y=x^2$ 的图形是一条抛物线,即 $\mathrm{graph}x^2$ 是一条抛物线,见右图.

函数的性质:有界性、单调性、奇偶性和周期性.

§1 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$,$x\in D$,区间 $I\subseteq D$. 若 $\forall x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2), \tag{*}$$

则称 $y=f(x)$ 在区间 I 内单调增加,又称 $y=f(x)$ 为 I 内的增函数.

若将(*)中不等式改成

$$f(x_1)\geqslant f(x_2), \tag{**}$$

则称 $y=f(x)$ 在区间 I 内单调减少,又称 $y=f(x)$ 为 I 内的减函数.

单调增加与单调减少函数统称为单调函数,称 I 为函数 $f(x)$ 的单调区间.

除用定义判别函数单调性外,还可利用下面的导数法判别函数的单调性.

导数法 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内可导. 若导函数 $f'(x)$ 在 I 内恒有

(1) $f'(x)>0$,则 $f(x)$ 在区间 I 内单调增加;

(2) $f'(x)<0$,则 $f(x)$ 在区间 I 内单调减少.

【题 1】 证明下列各题.

(1)若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 D 上均单调增加,试证 $f(x)+g(x)$ 在 D 上也单调增加;

(2)试证:两个单调增加函数的复合函数是单调增加的. 又问:两个单调减少函数的复合函数的情况又是怎样呢?

【证明】 (1) $\forall x_1,x_2\in D$,不妨设 $x_2>x_1$,则由题设,知

$$f(x_2)\geqslant f(x_1),\ g(x_2)\geqslant g(x_1),\text{故}$$

$$f(x_2)+g(x_2)\geqslant f(x_1)+g(x_1),$$

这表明 $f(x)+g(x)$ 在 D 上也单调增加.

(2)设 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 复合成

$$y=f(g(x)),\ x\in(a,b),$$

则由题设,知$\forall x_1,x_2\in(a,b),x_1>x_2$,恒有

$$u_1=g(x_1)\geqslant g(x_2)=u_2.$$

又由 $u_1\geqslant u_2$,得 $y_1=f(u_1)\geqslant f(u_2)=y_2$,即

$\forall x_1,x_2\in(a,b),x_1>x_2$,恒有 $y_1\geqslant y_2$,故复合函数 $y=f(g(x))$为增函数.

根据证题过程,类似可证:两个单调减少函数的复合函数为单调增加函数.

【题 2】　设$\lambda\geqslant0,\mu\geqslant0$ 且 $\lambda+\mu=1$. 若 $f(x)$在$[0,+\infty)$内单调减少,证明:

$$\lambda f(\lambda x)+\mu f(\mu x)\geqslant f(x).$$

【证明】　依题设,知 $0\leqslant\lambda\leqslant1,0\leqslant\mu\leqslant1$,因 $x\in[0,+\infty)$,

故

$$0\leqslant\lambda x\leqslant x,0\leqslant\mu x\leqslant x.$$

因 $f(x)$是$[0,+\infty)$内单调减少函数,故

$$f(\lambda x)\geqslant f(x),$$

$$f(\mu x)\geqslant f(x).$$

于是 $\lambda f(\lambda x)+\mu f(\mu x)\geqslant\lambda f(x)+\mu f(x)=(\lambda+\mu)f(x)=f(x)$,证毕.

【题 3】　设$\lambda\geqslant0,\mu\geqslant0$ 且 $\lambda+\mu=1$. 若$\frac{g(x)}{x}$在$(0,+\infty)$内单调减少,证明:

$$g(\lambda x)+g(\mu x)\geqslant g(x).\qquad(*)$$

并由此证明:对任何两个正数 a,b,有下列不等式成立:

$$g(a)+g(b)\geqslant g(a+b).\qquad(**)$$

【证明】　令 $f(x)=\frac{g(x)}{x}$,则 $f(x)$是$(0,+\infty)$内的单调减少函数. 由题 2,知

$$\lambda f(\lambda x)+\mu f(\mu x)\geqslant f(x),\text{即}$$

$$\lambda\frac{g(\lambda x)}{\lambda x}+\mu\frac{g(\mu x)}{\mu x}\geqslant\frac{g(x)}{x},\text{亦即}$$

$$g(\lambda x)+g(\mu x)\geqslant g(x),(*)\text{式得证.}$$

在$(*)$中,取 $\lambda=\frac{a}{a+b},\mu=\frac{b}{a+b}$,则 $\lambda>0,\mu>0$,且 $\lambda+\mu=1$.

再取 $x=a+b\in(0,+\infty)$,代入$(*)$,得

$$g(a)+g(b)\geqslant g(a+b),(**)\text{式得证.}$$

【题 4】　利用单调性证明下列不等式.

(1)$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}\,(x>0)$;

(2)当 $x\geqslant2$ 时,$(1+x)\ln(1+x)>2x-\frac{1}{6}x^3$;

(3)$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$.

【证明】　(1)令 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$,则 $f(0)=0$. 若能证明当 $x>0$ 时,$f'(x)>0$,就表明 $f(x)$在$(0,+\infty)$内单调增加,从而当 $x>0$ 时,恒

有 $f(x)>0(=f(0))$. 为此，只需证明 $f'(x)>0(x>0)$.

事实上，

$$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)-\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\ln(x+\sqrt{1+x^2}).$$

当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，证毕.

(2)作辅助函数：

$$f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\left(2x-\frac{1}{6}x^3\right).$$

则 $$f'(x)=\ln(1+x)+1-2+\frac{x^2}{2},\text{即}$$

$$f'(x)=\ln(1+x)-1+\frac{x^2}{2},$$

$$f''(x)=\frac{1}{1+x}+x.$$

当 $x\geqslant2$ 时，$f''(x)>0$，故 $f'(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 内单调递增，从而 $f'(x)>f'(2)$.

因 $f'(2)=\ln3+1$，故

$$f'(x)>\ln3+1>0.$$

因此，当 $x\geqslant2$ 时，$f(x)$ 单调递增.

故 $$f(x)>f(2).$$

而 $$f(2)=3\ln3-\left(4-\frac{8}{6}\right)=3\left(\ln3-\frac{8}{9}\right)>0,\text{故 } f(x)>0.$$

由 $f(x)>0$，知原不等式成立.

注 当 $x\geqslant2$ 时，由 $f''(x)>0$，知 $f'(x)$ 单调递增；再由 $f'(x)>0$，得 $f(x)$ 单调递增；再由 $f(2)>0$，得 $f(x)>0$，本题得证.

(3)作辅助函数 $f(x)=\frac{x}{1+x}$，且 $x\geqslant0$，即 $f(x)=1-\frac{1}{1+x}$.

则 $f'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}>0$，从而 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内单调增加.

因 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$，所以 $\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$.

而 $\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$.

于是 $\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$，证毕.

【题 5】　设函数 $f(x)$在闭区间$[0,a]$上连续，$f(0)=0$，$f'(x)$在$(0,a)$内存在且为增函数，又 $f''(x)$存在.

试证：函数 $F(x)=\frac{1}{x}f(x)$在$(0,a)$内是增函数.

【证明】　$F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.

令 $g(x)=xf'(x)-f(x)$，则 $g(0)=-f(0)=0$.

又 $g'(x)=f'(x)+xf''(x)-f'(x)=xf''(x)$.

由于 $f'(x)$为$(0,a)$内的增函数，故 $f''(x)>0,x\in(0,a)$.

从而在$(0,a)$内，$g'(x)>0$.

故 $g(x)$为$(0,a)$内的单调增函数.

于是，当 $x>0$ 时，$g(x)>g(0)$，即 $g(x)>0$.

因此，$F'(x)>0$.

从而证得 $F(x)$为$(0,a)$内的增函数.

【题 6】　设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(x)>0$，试求函数

$$g(x)=\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$$

的导数 $g'(x)$，并证明 $g'(x)$在$[a,b]$上单调递增.

【解】　由题设，知 $g(x)$在$[a,b]$上可导，

而
$$\begin{aligned}\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t&=\int_0^x xf(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\\&=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

即
$$g(x)=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t.$$

故
$$\begin{aligned}g'(x)&=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)\\&=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

因
$$g''(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)>0,$$

所以 $g'(x)$ 在$[a,b]$ 上单调递增.

注　在 $g(x)=\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$ 中，t 是积分变量，$g(x)$ 既是变上限积分，又依赖于被积函数中出现的变量 x.

§2 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，定义域 D 关于原点对称，即 $\forall x\in D$，必有 $-x\in D$.

如果 $\forall x\in D$，恒有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为 D 上的偶函数；

如果 $\forall x\in D$，恒有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为 D 上的奇函数.

通常，利用奇偶函数的定义来判定函数的奇偶性.

函数的奇偶性在定积分的计算中有重要的应用：

若 $f(x)$ 为 $[-a,a]$ 上的奇函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0;$$

若 $f(x)$ 为 $[-a,a]$ 上的偶函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

【题 1】 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=2^x+\dfrac{1}{2^x}$；

(2) $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$；

(3) $f(x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}$，$a>0$，$a\neq 1$.

【解】 (1) 因 $f(-x)=2^{-x}+\dfrac{1}{2^{-x}}=\dfrac{1}{2^x}+2^x=f(x)$，

故 $f(x)$ 为偶函数.

(2) 因 $f(-x)=\lg\dfrac{1+x}{1-x}=-\lg\dfrac{1-x}{1+x}=-f(x)$，

故 $f(x)$ 为奇函数.

(3) 因
$$\begin{aligned} f(-x)&=\frac{1}{a^{-x}-1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{\frac{1}{a^x}-1}+\frac{1}{2}\\ &=\frac{a^x}{1-a^x}+\frac{1}{2}=\left(-1+\frac{1}{1-a^x}\right)+\frac{1}{2}\\ &=-\frac{1}{a^x-1}-\frac{1}{2}=-f(x), \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 为奇函数.

【题 2】 求证:定义在 $[-l,l](l>0)$ 上的任何函数 $f(x)$ 都可以唯一地表示为一个偶函数与一个奇函数的和.

【证明】 采用构造法. 构造函数 $g(x)=f(x)+f(-x)$, $h(x)=f(x)-f(-x)$.

易见 $g(-x)=f(-x)+f(x)=g(x)$,故 $g(x)$ 为偶函数;

又 $h(-x)=f(-x)-f(x)=-h(x)$,故 $h(x)$ 为奇函数.

注意到$\frac{g(x)}{2}$也是偶函数,$\frac{h(x)}{2}$也是奇函数,且 $f(x)=\frac{g(x)}{2}+\frac{h(x)}{2}$. 从而 $f(x)$ 可表示为一个偶函数$\frac{g(x)}{2}$与一个奇函数$\frac{h(x)}{2}$之和.

下证唯一性. 若 $f(x)$ 又可表示为偶函数 $\varphi(x)$ 与奇函数 $\psi(x)$ 之和,即

$$f(x)=\varphi(x)+\psi(x).$$

则 $f(-x)=\varphi(-x)+\psi(-x)=\varphi(x)-\psi(x)$.

将上两式相加,得 $\varphi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}=\frac{g(x)}{2}$;

两式相减,得 $\psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}=\frac{h(x)}{2}$.

这就证得了唯一性.

【题 3】 设 $f(x)$ 为奇函数,$g(x)$ 为偶函数,且下列各复合函数在某对称区间内皆有定义,试判定 $f(f(x))$, $f(g(x))$, $g(f(x))$, $g(g(x))$ 的奇偶性.

【解】 令 $F(x)=f(f(x))$,则

$$F(-x)=f(f(-x))=f(-f(x))=-f(f(x))=-F(x).$$

故 $f(f(x))$ 为奇函数.

再令 $G(x)=f(g(x))$,则

$$G(-x)=f(g(-x))=f(g(x))=G(x).$$

故 $f(g(x))$ 为偶函数.

又令 $W(x)=g(f(x))$,则

$$W(-x)=g(f(-x))=g(-f(x))=g(f(x))=W(x).$$

故 $g(f(x))$ 为偶函数.

最后,令 $U(x)=g(g(x))$,则

$$U(-x)=g(g(-x))=g(g(x))=U(x).$$

故 $g(g(x))$ 为偶函数.

【题 4】 讨论函数

$$f(x)=\left(\log_2\frac{x+1}{x-1}\right)\left(x-\log_2\frac{2+x}{2-x}\right)$$

的奇偶性.

【解】 由对数函数的定义，知

$$\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1}>0, & ①\\ \dfrac{2+x}{2-x}>0. & ②\end{cases}$$

解①，得 $x>1$ 或 $x<-1$，解②，可得 $-2<x<2$.

故 $x\in(-2,-1)\cup(1,2)$，这就是函数 $f(x)$ 的定义域，它关于坐标原点是对称的.

对于函数定义域内任意一点 x，有

$$\begin{aligned}f(-x)&=\left(\log_2\frac{-x+1}{-x-1}\right)\left(-x-\log_2\frac{2-x}{2-(-x)}\right)\\&=\left(-\log_2\frac{x-1}{x+1}\right)\left(x+\log_2\frac{2-x}{2+x}\right)\\&=\log_2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-1}\left(x-\log_2\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{-1}\right)\\&=\left(\log_2\frac{x+1}{x-1}\right)\left(x-\log_2\left(\frac{2+x}{2-x}\right)\right)=f(x).\end{aligned}$$

于是 $f(x)$ 是 $(-2,-1)\cup(1,2)$ 内的偶函数.

注 $\log_2 x^k=k\log_2 x$，特别地 $\log_2 x^{-1}=-\log_2 x$，即 $\log_2\dfrac{1}{x}=-\log_2 x$.

【题 5】 如果 $f(x)$ 为偶函数，且 $f'(x)$ 存在，证明：$f'(0)=0$.

【证明】 依导数的定义，有

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}.$$

因 $f(x)$ 为偶函数，故 $f(\Delta x)=f(-\Delta x)$.

于是，$f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(-\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(-\Delta x)-f(0)}{-\Delta x}=-f'(0)$，即

$f'(0)=-f'(0)$，故 $f'(0)=0$.

【题 6】 计算下列定积分.

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$；

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\left(\frac{1}{1+e^x}-\frac{1}{2}\right)dx$；

(3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\ln(x+\sqrt{4+x^2})\,dx$；

(4) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(x^4+1)\sin x\,dx$.

【解】 (1)令 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，则

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$$
$$=\ln\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{(\sqrt{1+x^2}+x)}=\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$$
$$=-\ln(\sqrt{1+x^2}+x)=-f(x).$$

故 $f(x)$ 为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的奇函数，又 $\sin^2 x$ 为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的偶函数，因此 $\sin^2 x\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的奇函数，从而原式为零.

(2)令 $f(x)=\frac{1}{1+e^x}-\frac{1}{2}$，则

$$f(-x)=\frac{1}{1+e^{-x}}-\frac{1}{2}=\frac{e^x}{1+e^x}-\frac{1}{2}=\frac{(e^x+1)-1}{1+e^x}-\frac{1}{2}$$
$$=1-\frac{1}{1+e^x}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+e^x}=-f(x).$$

故 $f(x)$ 为 $[-1,1]$ 上的奇函数，又 $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ 为 $[-1,1]$ 上的偶函数，因此 $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\left(\frac{1}{1+e^x}-\frac{1}{2}\right)$ 为 $[-1,1]$ 上的奇函数，从而原式为零.

(3)首先注意到 $\ln(x+\sqrt{4+x^2})$ 不是 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的奇函数.

$$\text{原式}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}\ln(x+\sqrt{4+x^2})\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ln(x+\sqrt{4+x^2})\,dx-\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ln(x+\sqrt{4+x^2})\,d\sin 2x$$
$$=\frac{1}{2}\left[(x\ln(x+\sqrt{4+x^2}))\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\,d\ln(x+\sqrt{4+x^2})\right]$$
$$-\frac{1}{4}\left[(\sin 2x\ln(x+\sqrt{4+x^2}))\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,d\ln(x+\sqrt{4+x^2})\right].$$

因 $d\ln(x+\sqrt{4+x^2})=\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}dx$，

故
$$\text{原式}=\frac{1}{2}\left[(x\ln(x+\sqrt{4+x^2}))\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}dx\right]$$
$$+\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\cdot\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}dx.$$

由于$\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$与$\sin 2x\cdot\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$都是奇函数,所以上式中两个定积分的值都为零.

最后,原式$=\frac{1}{2}\left(x\ln(x+\sqrt{4+x^2})\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$$=\frac{\pi}{4}\ln\left[\left(\frac{\pi}{2}+\sqrt{4+\frac{\pi}{4}^2}\right)\left(-\frac{\pi}{2}+\sqrt{4+\frac{\pi}{4}^2}\right)\right]$$

$$=\frac{\pi}{4}\ln 4=\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

(4)**方法一**:因x^4+1为偶函数,又$\sin x$为奇函数,故$(x^4+1)\sin x$为$[-\pi,\pi]$上的奇函数,于是

$$\int_{-\pi}^{\pi}(x^4+1)\sin x\mathrm{d}x=0.$$

方法二:$\int_{-\pi}^{\pi}(x^4+1)\sin x\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}(x^4+1)\mathrm{d}(-\cos x)$

$$=-(x^4+1)\cos x\Big|_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\mathrm{d}(x^4+1)$$

$$=4\int_{-\pi}^{\pi}x^3\cos x\mathrm{d}x=4\int_{-\pi}^{\pi}x^3\mathrm{d}\sin x$$

$$=4\left[(x^3\sin x)\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x^3\right]$$

$$=-12\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin x\mathrm{d}x=12\int_{-\pi}^{\pi}x^2\mathrm{d}\cos x$$

$$=12\left[(x^2\cos x)\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\mathrm{d}x^2\right]$$

$$=-24\int_{-\pi}^{\pi}x\cos x\mathrm{d}x=-24\int_{-\pi}^{\pi}x\mathrm{d}\sin x$$

$$=-24\left[(x\sin x)\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x\right]$$

$$=24\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$$

$$=0.$$

§3 函数的周期性与有界性

1. 周期性. 设函数$y=f(x)$,$x\in\mathbf{R}$,如果存在常数$T>0$,使得$\forall x\in\mathbf{R}$,恒有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称$f(x)$是周期为T的周期函数.通常,称周期函数的最小正周期为基本周期.