# 变分法及有限元讲义

钱伟长著

（第1—3章）

山东工學院

1978

# 第一章　变分法的一些基本概念

## §1·1　历史上有名的变分命题，泛函，较一般的变分命题

在工程实践上，常常需要确定某一函数 $Z=f(x)$ 的极大值和极小值，这种计算分析是微积分里大家所熟知的。但是，我们经常还要去确定一类特殊的量——即所谓泛函——的极大值和极小值，这就是变分法所处里的范围。为了便于理解变分的命题，便于理解所谓泛函，我们将从历史上有名的三个变分命题讲起：

第一个变分命题，最速降綫问题（*brachistochrone*）

设有两点A和B，不在同一铅垂綫上，设在A、B两点上联结着某一曲綫，有一重量沿曲綫从A到B受重力作用自由下滑。如果略去重量和綫之间的摩擦阻力，从A到B自由下滑所需时间随这一曲綫的形状不同而各不相同，问下滑时间最短的曲綫是那一条曲綫？这就是最速降綫(图1·1)显而易见，最快的路綫决不是连结AB两点的直綫段，当然这条直綫段在A，B两点间的路程最短，但沿这条直綫自由下落时，运动速度的增长是比较慢的。如果我们取一条较陡的路程，则虽然路径是加长了，但在路径相当大的一部分中，质点的运动速率较大，所需的总时间反而较少。

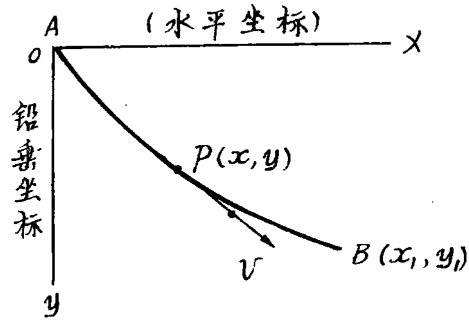


图1·1 最速降綫 A,B两点固定 A点和坐标原点重合

最速降綫问题是约翰·伯努利（*Johann Bernoulli*）在17[illegible]6年以公开信的形式提出来的，曾引起了广泛的注意，后来经历了莱比尼兹（*Leibniz*）、牛顿（*Newton*）和约可毕·伯努利（*Jacob Bernoulli*）等的多方努力，才得到较完善的解答。

现在让我们把最速降綫问题，写成数学形式。

让A点和原点重合，B点的坐标为 $(x_1, y_1)$，重体从A点下滑到 $P(x, y)$ 点，其速度为V，如重体的质量为 $m$，引力加速度为 $g$，则重体从A到P，失去势能 $mgy$，而获得动能 $\frac{1}{2}mV^2$，由能量守恒定律：

$$mgy=\frac{1}{2}mV^2 \quad \text{或} \quad V=\sqrt{2gy} \tag{1·1}$$

如果称曲綫从A点算起的弧长为S，则

$$\frac{dS}{dt}=\sqrt{2gy} \tag{1·1a}$$

而且弧长元素为

$$dS=(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}dx \tag{1·2}$$

于是 $$dt=\frac{dS}{(\frac{dS}{dt})}=\frac{\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}}{\sqrt{2gy}}dx \tag{1·3}$$

从A到B积分，设总降落时间为T，即得

$$T=\int_0^T dt=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}}{\sqrt{2gy}}dx \tag{1·4}$$

对于不同的$y(x)$，T也不同。所以，T是$y(x)$的某种广义的函数，人们称这一类型的广义函数为泛函。亦即T是$f(x)$的一种泛函。凡变量的值是由一个或多个函数的选取而确定的，这个变量就叫泛函，最速降綫问题，于是就可以说成

**在满足$y(0)=0$，$y(x_1)=y_1$，的一切$y(x)$函数中，选取一个函数，使（1·4）式的泛函T为最小值。这个特定的函数就是最速降綫的函数表达式。这就是最速降綫问题的变分命题。所以，变分命题在实质上就是求泛函的极大值或极小值问题。在这里，我们应该指出下列各点：**

（甲）在泛函的积分綫上，$x=0$，$x=x_1$，都是定值，亦即是说，在变分中，$f(x)$的两端界限不动，其端值也不变〔即$y(0)=0$，$y(x_1)=y_1$〕，这种变分称为不变边界的变分。

（乙）在（1·4）中，$\frac{dy}{dx}$不言而喻应该是存在的，至少是逐段连续的。

（丙）这种变分除端点为定值的不变边界条件外，没有其他条件，这是一种最简单的变分。

第二个变分命题，短程綫（Geodesicline）问题

设 $\varphi(x,y,z)=0$ 为已知曲面，求曲面 $\varphi(x,y,z)=0$ 上所给两点（A，B）间长度最短的曲綫。这个最短曲綫叫短程綫。球面（如地球）上两点的短程綫即为通过两点的大圆，这是一个典型的变分问题。按曲面 $\varphi(x,y,z)=0$ 上 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 间的曲綫长度为：

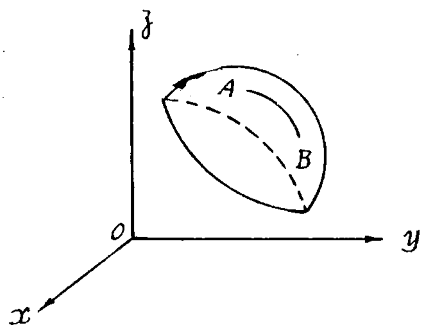


图1·2 曲面上两点（A，B）间的短程綫

$$L=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx \tag{1·5}$$

其中 $y=y(x)$，$z=z(x)$ 满足 $\varphi(x,y,z)=0$ 的条件。于是，我们的变分命题可以写为：

在 $y=y(x)$，$z=z(x)$ 满足 $\varphi(x,y,z)=0$ 的条件下，从一切 $y=y(x)$，$z=z(x)$ 的函数中，选取一对 $y(x)$，$z(x)$，使泛函 L〔（1·5）式〕最小。

这个变分命题和最速降綫问题有下列不同和相同之点：

（甲）也是一个泛函求极值的问题，但这个泛函有两个可以选取的函数，即 $y(x)$，$z(x)$。

（乙）边界也是不变的，也有端点定值〔即 $y(x_1)=y_1$，$z(x_1)=z_1$，$y(x_2)=y_2$，$z(x_2)=z_2$〕。

（丙）$y(x)$，$z(x)$ 之间必需满足

$$\varphi[x,y(x),z(x)]=0 \tag{1·6}$$

它是在（1·6）条件下的变分求极值问题，不是象最速降綫问题那样是无条件的。我们称这种命题为条件变分命题。这个问题已经在1697年为约翰伯努利所解决。但是这一类问题的普遍理论直到后来通过欧拉 L·Euler（1744），拉格朗日 L·Lagrange（1762）的努力才解决的。

第三个变分命题，等周（isoperimetric problem）问题

在长度一定的封闭曲綫中，什么曲綫所围面积最大，这个问题在希腊

时已经知道是一个圆周。但它的变分特性直到十八世纪才被欧拉察觉出来的（1744）。

将所给曲綫用参数形式表达 $x=x(s)$，$y=y(s)$，设 $x(s_0)=x(s_1)$，$y(s_0)=y(s_1)$，这条曲綫就是封闭的。这条曲綫的周长为：

$$L=\int_{S_0}^{S_1}\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}\,ds \tag{1·7}$$

其所围面积R为（根据格林（Green）定理）

$$R=\iint_R dx\,dy=\frac{1}{2}\oint_C\left[x\,dy-y\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_{S_0}^{S_1}\left[x\frac{dy}{ds}-y\frac{dx}{ds}\right]ds \tag{1·8}$$

等周问题于是可以写成

在满足 $x(s_0)=x(s_1)$，$y(s_0)=y(s_1)$ 和（1·7）式条件下，从一切 $x=x(s)$，$y=y(s)$ 的函数中选取一对 $x=x(s)$，$y=y(s)$ 函数，使泛函R（1·8）最大。

这也是一个条件变分问题，但其条件本身也是一个泛函（1.7）同时，其边界（这里的端点）也是不变的，而且是两个函数 $x=x(s)$，$y=y(s)$ 所确定的泛函。

这三个历史上有名的变分命题都是17世纪末提出的，又都是18世纪上半叶解决的，解决过程中，欧拉和拉格朗日创立了现在大家都熟知的变分法。这个变分法后来广泛地用在力学的各个方面，对力学的发展起了很重要的作用。（注）

---

（注）十八世纪中叶，柏林科学院内发生过一件和变分法有关的政治事件。实质上是一件唯物主义和唯心主义的斗争事件，当时的科学院长马波托斯（Maupertuis 1698—1759）为了迎合普鲁士皇帝弗烈德立赫二世的愿望，歌功颂德，提出了一个宗教命题，说什么“世界最优美，他按最完美的可能创造了万物”。并说这也是已故前院长莱比尼兹（1646—1716）的思想。有个荷兰数学家柯尼格（Samuel Köenig）在1750

这三个历史上有名的变分命题，都有从泛函求极值的共同性，端点或边界都是不变的，但有的有条件（第二、第三题），有的没有条件（第一题），在有条件的变分命题中，有的是通常的函数条件（如第二题），有的则条件本身也是一种泛函（第三题），当然，不变边界的没有条件的变分（第一题）是最简单的，但是也是很有用的，这种不变边界的无条件变分还有许多例子，现在再举三个例子如下：

第四个变分命题

设有一正值函数 $y=y(x)>0$，它所代表的曲綫通过 $(x_1, y_1)$，$(x_2, y_2)$ 两点。当把这条曲綫段绕 $x$ 轴旋转时，得一旋转面，求旋转面面积最小的那个函数 $y=y(x)$。

即在 $y(x_1)=y_1$，$y(x_2)=y_2$ 的条件下求使泛函

$$S=\int_{x_1}^{x_2} 2\pi y\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx \tag{1·9}$$

最小的函数 $y(x)$。

第五个变分命题

费梅（Fermat）原理说，通过介质的光路，使光綫通过这一段光路所需时间为最小值。以二维空间为例，设二维介质的折光率为 $\mu(x, y)$ 即光綫通过介质的速度 $V(x, y)=\dfrac{C}{\mu(x,y)}$，其中 C 为真空中的光速，是一个常数。从原点（0，0）到（$x$，$y$）点的光行时间为

---

年提出了莱比尼兹的一封信（1707，没有发信地址）说莱比尼兹并不赞成这种说法，并以院士的身份写了一篇数学论文，在院报上发表，证明了在某些条件下，并不象院长声称的那样，走向最大，而是走向最小的。马波托斯恼羞成怒，借口莱比尼兹的信没有发信地址，硬说这是柯尼格伪造的，并把柯尼格的院士职位也撤消了，那时欧拉虽是变分法的创造人，熟知极大极小和不稳定平衡问题，身为科学院付院长，但也支持了这个决议数学家伏尔泰（Voltaire）那时也是柏林科学院院士，对此深为不满，写了一篇讽刺论文"院长博士"（Dr·AKaKia），把马波托斯写得既傲慢又愚蠢，把欧拉写得既天真又奴态十足，但皇帝禁止出版这篇论文，后来这篇论文是在荷兰出版的，伏尔泰也逃离了普鲁士。

$$T=\int_0^l \frac{dS}{V}=\frac{1}{C}\int_0^{x_1}\mu(x,y)\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}dx \qquad (1\cdot10)$$

其中$y=y(x)$为光綫通过的路綫，费梅定理就成为：“求$y(x)$使T（1·10）泛函成为最小值”。

下面还增加一个条件变分命题的例子。

第六个变分命题

求长度已知的均匀悬索的悬綫形状，悬綫形状是使悬綫的位能最小。悬綫的位能由悬綫的重心决定设悬綫各点的垂綫坐标为$y(x)$，并通过$A(0,y_0)$，$B(x_1,y_1)$两点，悬索总长度为

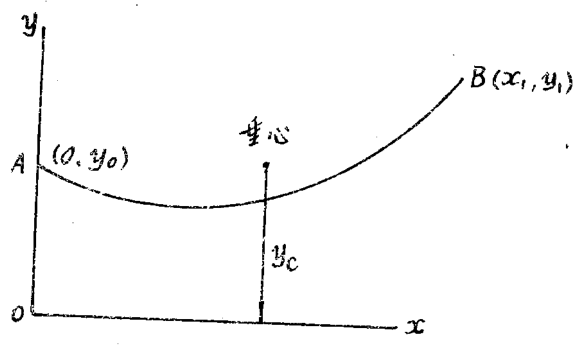


图1·3 悬索的形状

$$L=\int_0^{x_1}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \qquad (1\cdot11)$$

悬索重心高度为

$$y_c=\frac{1}{L}\int_0^l y\,ds$$

$$y_c=\frac{1}{L}\int_0^{x_1} y\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}dx \qquad (1\cdot12)$$

这个变分命题是：在通过$y(0)=y_0$，$y(x_1)=y_1$两点，并满足（1·11）的条件的一切曲綫$y=y(x)$中，求使$y_c$（即（1·12式））为极小的函数$y=y(x)$，这是一个不变边界的条件变分命题。

归纳起来，我们可以把最简单的不变边界变分命题写为：

在通过$y_1=y(x_1)$，$y_2=y(x_2)$两点的条件下，选取$y(x)$，使泛函

$$V=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y(x),y'(x))dx \qquad (1\cdot13)$$

为极值。

其中 $y'(x)=\dfrac{dy}{dx}$，$F(x,y,y')$为一已知的 $x$，$y$，$y'$的函数。$F(x,y,y')$当然还有一些可微的条件。$y(x)$也视所处理的问题的不同而有一些可微条件。这是在发展变分法中，欧拉和拉格朗日最先处理的命题。

（1·13）这样的泛函可以推广，使它包括 $y(x)$的高阶导数 $y'(x)$，$y''(x)\cdots\cdots y^{(n)}(x)$，例如对泛函

$$V=\int_{x_1}^{x_2}F[x,y(x),y'(x),y''(x),\cdots\cdots y^{(n)}(x)]dx \tag{1·14}$$

的变分命题，在这样的变分命题中，边界条件有时具有下面形式

$$\left.\begin{aligned} y(x_1)=y_1,\ y'(x_1)=y'_1,\ y''(x_1)=y''_1\cdots\cdots y^{(n-1)}(x_1)=y_1^{(n-1)} \\ y(x_2)=y_2,\ y'(x_2)=y'_2,\ y''(x_2)=y''_2\cdots\cdots y^{(n-1)}(x_2)=y_2^{(n-1)} \end{aligned}\right\} \tag{1·15}$$

亦即在边界点上不仅给出函数的值，而且还给出（$n-1$）阶以下的导数值。

还可以推广到泛函有两个或两个以上函数的情况。如泛函形式为：

$$V=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y'\cdots\cdots y^{(n)},z,z',z''\cdots\cdots z^{(n)})dx$$

也可以推广到含有多个自变量的函数的泛函。这时，泛函是一个重积分。例如二个自变量的泛函为：

$$V=\iint_D F[x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}]dxdy \tag{1·16}$$

这时，所有函数的 $z(x,y)$在域 D的边界 C上值已给出，即所有容许曲面都要经过 C。

## §1·2　变分的特性

函数的极大及极小问题是大家知道的，泛函的极大极小问题有类似的特性。首先，让我们把函数的定义和泛函的定义，函数的连续和泛函的连

续，函数的宗量的增量（或微分）和泛函的宗量增量（或变分）互相类比地进行研究。

(1) 函数的定义和泛函的定义

如果对于变量 $x$ 的某一变域中的每一 $x$ 值，$y$ 有一值与之对应，或即数 $y$ 对应于数 $x$ 的关系成立，则我们称变量 $y$ 是变量 $x$ 的函数，即 $y=y(x)$。

如果对于某一类函数 $y(x)$ 中每一函数 $y(x)$，V 有一值与之对应，或即数 V 对应于函数 $y(x)$ 的关系成立，则我们称变量 V 是函数 $y(x)$ 的泛函，即 $V=V[y(x)]$。

所以，函数是变量和变量的关系，泛函是变量与函数的关系。

(2) 微分和变分

函数 $y(x)$ 的宗量 $x$ 的增量 $\Delta x$ 是指这个变量的某两值之差，$\Delta x=x-x_1$，如果 $x$ 是自变量，则 $x$ 的微分 $dx$ 也是增量的一种，即当这种增量很小很小时，$dx=\Delta x$。

泛函 $V[y(x)]$ 的宗量 $y(x)$ 的增量在它很小时称为变分，用 $\delta y(x)$ 或 $\delta y$ 来表示，$\delta y(x)$ 是指 $y(x)$ 和另一与之相接近的 $y_1(x)$ 之差，即 $\delta y(x)=y(x)-y_1(x)$，这里应指出 $\delta y(x)$ 也是 $x$ 的函数，只是 $\delta y(x)$ 在 $x$ 指定区域中都为微量。这里假定，宗量 $y(x)$ 是在接近 $y_1(x)$ 的一类函数中任意改变着的。

曲綫 $y=y(x)$，$y=y_1(x)$ 要怎样才算是相差很小或很接近？这是需要进一步说明的。

最简单的理解，即在一切 $x$ 值上，$y(x)$ 和 $y_1(x)$ 的差（指差的模）都很小，也就是 $y=y(x)$，$y=y_1(x)$ 的曲綫的纵坐标到处都很接近。图1·4和图1·5所画二曲綫都附合这个理解的，但很显然，其差异很大。

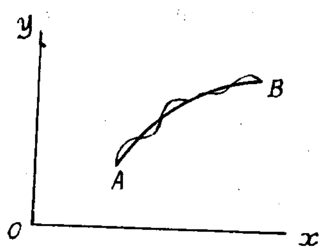


图1·4 只有零阶接近度没有一阶接近度的接近曲綫

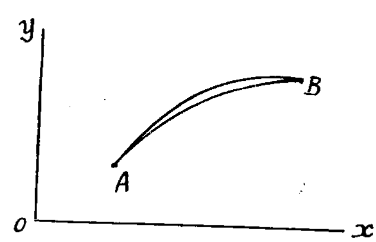


图1·5 既有零阶接近度也有一阶接近度的两接近曲綫

实际情况是：曲线图1·5中不仅两曲线纵坐标接近，而在对应点的切线方向之间也是接近的，但曲线图1·4中则不然，虽然两曲线的纵坐标是接近的，但在对应点的切线方向之间并不接近。图1·4的两条曲线我们叫做零阶接近度的曲线，在这类接近度的曲线中，$y(x)-y_1(x)$的差值到处很小，但$y'(x)-y'_1(x)$的差值就不很小。图1·5的两条曲线，我们叫做一阶接近度。在这类接近度的曲线中，$y(x)-y_1(x)$ $y'(x)-y'_1(x)$的差值到处都很小。

有时，我们必须要求下列每个差（的模）都很小：即

$$\delta y=y(x)-y_1(x),\ \delta y'=y'(x)-y'_1(x),\ \delta y''=y''(x)-y''_1(x)\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\ \delta y^{(K)}=y^{(K)}(x)-y_1^{(K)}(x) \qquad (1\cdot17)$$

都很小，我们称$y=y(x)$，$y=y_1(x)$这两条曲线有K阶的接近度。接近度的阶数愈高，曲线接近得越好。

在变分计算中，我们常常要求有较好的接近度，为此，拉格朗日引进一个小量$\epsilon$，使

$$\delta y=\epsilon\eta(x)=y(x)-y_1(x) \qquad (1\cdot18)$$

于是，我们有

$$\left.\begin{aligned}\delta y'&=\epsilon\eta'(x)=y'(x)-y'_1(x)\\ \delta y''&=\epsilon\eta''(x)=y''(x)-y'_1(x)\\ \delta y^{(K)}&=\epsilon\eta^{(K)}(x)=y^{(K)}(x)-y_1^{(K)}(x)\end{aligned}\right\} \qquad (1\cdot19)$$

当$\epsilon\to0$时，$\delta y$，$\delta y'$，$\delta y''$，……$\delta y^{(K)}$都保证了是微量，从而保证了有K阶接近度，甚至更高阶的接近度。当然，如果我们在原则上认定$\delta y$，$\delta y'$，$\delta y''$，…$\delta y^{(K)}$是同级微量，则我们同样可以用$\delta y$，$\delta y'$，$\delta y''$，……$\delta y^{(K)}$进行变分，而不必引用$\epsilon$；有许多变分计算，就是在这样一个默认的原则上进行的。

⑶函数的连续和泛函的连续

如果对于变量$x$的微小改变，有相对应的函数$y(x)$的微小改变，则就说函数$y(x)$是连续的。亦即是说：

如果对于一个任给的正数$\varepsilon$，可以找到一个$\delta$，当$|x-x_1|<\delta$时，能使$|y(x)-y(x_1)|<\varepsilon$，就说$y(x)$在$x=x_1$处连续。

对于泛函也有相类似的定义。

如果对于$y(x)$的微量改变，有相对应的泛函$V[y(x)]$的微量改变则就说泛函$V[y(x)]$是连续的，亦即是说：

如果对于一个任给的正数$\varepsilon$，可以找到这样的$\delta$，当

$$|y(x)-y_1(x)|<\delta,\ |y'(x)-y'_1(x)|<\delta,\cdots|y^{(K)}(x)-y_1^{(K)}(x)|<\delta$$

时，能使$|V[y(x)]-V[y_1(x)]|<\varepsilon$，就说泛函$V[y(x)]$在$y(x)=y_1(x)$处K阶接近地连续的。

(4) 函数的微分和泛函的变分

函数的微分有两个定义，一个是通常的定义，即函数的增量

$$\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x) \tag{1·20a}$$

可以展开为綫性项和非綫性项

$$\Delta y=A(x)\Delta x+\Phi(x,\Delta x)\cdot\Delta x \tag{1·20b}$$

其中$A(x)$和$\Delta x$无关，$\Phi(x,\Delta x)$则和$\Delta x$有关，而且

$$\Delta x\to 0\text{时}，\quad \Phi(x,\Delta x)\to 0 \tag{1·21}$$

于是，就称$y(x)$是可微的，其綫性部分就称为函数的微分，即

$$dy=A(x)\Delta x=y'(x)\Delta x \tag{1·22}$$

这是因为根据定义，$A(x)=y'(x)$是函数的导数，而且，

$$\mathrm{Lim}\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=y'(x) \tag{1·23}$$

所以函数的微分是函数增量的主部，这个主部对于$\Delta x$说来是綫性的。

同样，设$\varepsilon$为一小参数，并把$y(x+\varepsilon\Delta x)$对$\varepsilon$求导数，即得：

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}y(x+\varepsilon\Delta x)=y'(x+\varepsilon\Delta x)\cdot\Delta x \tag{1·24}$$

当$\varepsilon$趋近于零时

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}y(x+\varepsilon\Delta x)\Big|_{\varepsilon\to 0}=y'(x)\Delta x=dy(x) \tag{1·25}$$

这就证明了$y'(x+\varepsilon\Delta x)$在$\varepsilon=0$处对$\varepsilon$的导数就等于$y(x)$在$x$处的微

分，这是函数微分的第二个定义。这个定义和拉格朗日处理变分的定义是相类似的。

泛函的变分也有类似的两个定义，对于$y(x)$的变分$\delta y(x)$所引起的增量，定义为

$$\Delta V = V[y(x)+\delta y]-V[y(x)] \tag{1·26}$$

可以展开为线性的泛函项和非线性的泛函项

$$\Delta V = L[y(x),\delta y]+\Phi[y(x),\delta y]\cdot max|\delta y| \tag{1·27}$$

其中$L[y(x),\delta y]$对$\delta y$说来是线性的泛函项，亦即是说

$$L[y(x),C\delta y] = CL[y(x),\delta y] \tag{1·28a}$$

$$L[y(x),\delta y+\delta y_1] = L[y(x),\delta y]+L[y(x),\delta y_1] \tag{1·28b}$$

典型的线性泛函为

$$L[y(x),\delta y] = \int_{x_1}^{x_2}[p(x,y)\delta y+q(x,y)\delta y'+ +n(x,y)\delta y''+\cdots+t(x,y)\delta y^{(K)}]dx \tag{1·29}$$

(1·27)中的$\Phi[y(x),\delta y]max|\delta y|$是非线性泛函项，但$\Phi[y(x),\delta y]$是$\delta y$的同阶或高阶小量，当$\delta y\to 0$时，$max|\delta y|\to 0$，而且$\Phi[y(x),\delta y]$也接近于零，于是（1·27）中泛函的增量对于$\delta y$说是线性的那一部分，即$L[y(x),\delta y]$就叫做泛函的变分，用$\delta V$来表示。

$$\delta V = \{V[y(x)+\delta y]-V[y(x)]\} = L[y(x),\delta y] \tag{1·30}$$

所以，泛函的变分是泛函增量的主部，而且这个主部对于变分$\delta y$来说线性的。

我们同样也有拉格朗日的泛函变分定义：泛函变分是$V[y(x)+\varepsilon\delta y]$对$\varepsilon$的导数在$\varepsilon=0$时的值。因为根据（1·26），（1·27），我们有

$$V[y(x)+\varepsilon\delta y] = V[y(x)]+L[y(x)+\varepsilon\delta y]+ \Phi[y(x),\varepsilon\delta y]\varepsilon max|\delta y| \tag{1·31}$$

而且　$L[y(x),\varepsilon\delta y]=\varepsilon L[y(x),\delta y]$　(1·32)

于是有　$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}V[y(x)+\varepsilon\delta y]=L[y(x),\delta y]+\Phi[y(x),\varepsilon\delta y]\max|\delta y|+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Phi[y(x),\varepsilon\delta y]\max|\delta y| \tag{1·33}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}V[y(x)+\varepsilon\delta y]_{\varepsilon\to 0}=L[y(x),\delta y] \tag{1·34}$$

(1·33)中，右侧第二项，当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\Phi[y(x),\varepsilon\delta y]\to 0$，第三项也等于零。这就证明了拉格朗日的泛函变分定义

$$\delta V=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}V[y(x)+\varepsilon\delta y]_{\varepsilon\to 0} \tag{1·35}$$

(5)极大极小问题

如果函数 $y(x)$ 在 $x=x_0$ 的附近的任意点上的值都不大（小）于 $y(x_0)$，也即 $dy=y(x)-y(x_0)\leq 0$（$\geq 0$）时，则说函数 $y(x)$ 在 $x=x_0$ 上达到极大（极小），而且，在 $x=x_0$ 上，有

$$dy=0 \tag{1·36}$$

对于泛函 $V[y(x)]$ 而言，也有相类似的定义。

如果泛函 $V[y(x)]$ 在任何一条与 $y=y_0(x)$ 接近的曲線上的值不大（或不小）于 $V[y_0(x)]$，也就是，如果 $\delta V=V[y(x)]-V[y_0(x)]\leq 0$（或 $\geq 0$）时，则说泛函 $V[y(x)]$ 在曲綫 $y=y_0(x)$ 上达到极大值（或极小值），而其在 $y=y_0(x)$ 上有

$$\delta V=0 \tag{1·37}$$

在这里，对于泛函的极值概念有进一步说明的必要。凡说到泛函的极大(极小)值主要是说泛函的相对的极大(极小)值也就是说就互相接近的许多曲綫来研究一个最大(或最小)的泛函值，但是曲綫的接近，有不同的接近度。因此，在泛函的极大极小定义里，还应说明这些曲綫有几阶的接近度。

如果对于与 $y=y_0(x)$ 的接近度为零阶的一切曲綫而言，亦即对于

$|y(x)-y_0(x)|$非常小，但对于$|y'(x)-y'_0(x)|$是否小毫无规定的一切曲綫而言，泛函在曲綫$y=y_0(x)$上达到极大（或极小）值，则就把这类变分叫使强变分，这样得到的极大值，（或极小值）叫做强极大（强极小），或强变分的极大（或极小）。

如果只对于与$y=y_0(x)$有一阶接近度的曲綫$y=y(x)$而言，或即只对于那些不仅在纵坐标间，而且在切綫方向间都接近的曲綫而言，泛函在曲綫$y=y_0(x)$上达到极大（或极小）值，则就把这种变分叫做弱变分，这样得到的极大值（或极小值）叫做弱极大（弱极小），或弱变分的极大（极小）。

从此可以看到，当泛函在$y=y_0(x)$曲綫上有强极大（极小）值时不仅对于那些既是函数接近，而且导数也接近的$y(x)$而言是极大（极小）值，而且对于那些只有函数接近，但导数不接近的$y(x)$而言，也是极大（极小）值，所以，泛函在$y=y_0(x)$曲綫上是强极大（极小）值时，也必在$y=y_0(x)$上是弱极大（极小）值。反之，则不然，泛函在$y=y_0(x)$曲綫上是弱极大（极小）时，不一定是强极大值，因为有可能对于那些只有函数接近但导数不接近的$y(x)$而言，有一个比函数和导数都接近的$y(x)$所求得的极大（极小）更大（小）的极大（极小）值存在。强极值和弱极值的区别，在推导极值的必要条件时不很重要，但在研究极大极小的充分条件时，则是十分重要的。

这种概念和定义，和多变量的函数一样，也可以推广到多个函数的泛函问题中去。

## §1·3 泛函的极值问题求解——歐拉方程

现在让我們求解最速降綫问题

在满足$y(0)=0$，$y(x_1)=y_1$的一切$y(x)$的函数中求泛函

$$T=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+(y'(x))^2}{y(x)}}\,dx \tag{1·38}$$

为极值的函数。

设$y(x)$为满足泛函为极值的解，设与$y(x)$相接近的函数为

$y(x)+\delta y(x)$，其导数为 $y'(x)+\delta y'(x)$，于是泛函的增量为

$$\Delta T=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\left\{\sqrt{\frac{1+[y'(x)+\delta y'(x)]^2}{y(x)+\delta y(x)}}-\sqrt{\frac{1+[y'(x)]^2}{y(x)}}\right\}dx$$

(1·39)

但是，用 $\delta y$，$\delta y'$ 展开，有

$$\sqrt{\frac{1+(y'+\delta y')^2}{y+\delta y}}=\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}+\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}\delta y'-\frac{1}{2y}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\delta y+0(\delta^2)$$

(1·40)

其中为了简略，记 $y(x)=y$，$y'(x)=y'$，$\delta y(x)=\delta y$，$\delta y'(x)=\delta y'$，$0(\delta^2)$ 代表 $\delta y$，$\delta y'$ 的二次以上的高次项，当 $\delta y$，$\delta y'$ 都很小时〔亦即 $y+\delta y$ 和 $y$ 有一阶接近度〕，泛函的变分就是略去了 $0(\delta^2)$ 诸项以后的主项。泛函的极值条件为

$$\delta T=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\left\{\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}\delta y'-\frac{1}{2y}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\delta y\right\}dx=0$$

(1·41)

(1·41) 式还可以进一步简化，因为

$$\int_0^{x_1}\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}\delta y'dx=\int_0^{x_1}\frac{d}{dx}\left[\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}\delta y\right]dx-\int_0^{x_1}\frac{d}{dx}\left[\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}\right]\delta y\,dx$$

(1·42)

而且

$$\int_0^{x_1}\frac{d}{dx}\left[\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}\delta y\right]dx=\frac{y(x_1)}{\sqrt{y(x_1)[1+y'^2(x_1)]}}\delta y(x_1)-\frac{y(0)}{\sqrt{y(0)[1+(y'(0))^2]}}\delta y(0)$$

(1·43)

应该指出，$y(x)+\delta y(x)$也通过$y(0)+\delta y(0)=0$和$y(x_1)+\delta y(x_1)=y_1$这两点，但$y(x_1)=y_1$，$y(0)=0$，所以$\delta y(0)=\delta y(x_1)=0$。

于是（1·43）式恒等于零。而（1·42）式即可化为

$$\int_0^{x_1}\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}\delta y' dx=-\int_0^{x_1}\frac{d}{dx}\left\{\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}\right\}\delta y\, dx \tag{1·44}$$

泛函的极值条件（1·41）要求$y(x)$满足

$$\delta T=-\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\left\{\frac{1}{2y}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}+\frac{d}{dx}\left[\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}\right]\right\}\delta y\, dx=0 \tag{1·45}$$

其中{ }中是连续函数，同时还有一个因子$\delta y(x)$，它是任意选取的，只满足端点条件$\delta y(x_1)=\delta y(0)=0$，当然，$\delta y(x)$和$\delta y'(x)$的绝对值都很小。

为了把（1·45）式进一步简化，我们将利用下面的予备定理。

变分法的基本予备定理：如果函数$F(x)$在綫段$(x_1, x_2)$上连续，且对于只满足某些一般条件的任意选定的函数$\delta y(x)$，有

$$\int_{x_1}^{x_2}F(x)\delta y(x)dx=0 \tag{1·46}$$

则在綫段$(x_1, x_2)$上，有

$$F(x)=0 \tag{1·47}$$

$\delta y(x)$的一般条件为：⑴一阶或若干阶可微分；⑵在綫段$(x_1, x_2)$的端点处为0；⑶$|\delta y(x)|<\varepsilon$，或$|\delta y(x)|$及$|\delta y'(x)|<\varepsilon$等。

证明：用反证法，假设$F(x)$在点$x=\bar{x}$处不等于零，则我们可以选取区域$\bar{x}_1\leq\bar{x}\leq\bar{x}_2$，使得在这个区域内，$F(x)$正负号不变。

如图（1·6）选取函数$\delta y(x)$使

$$\begin{cases}\delta y(x)=0 & x_1\leq x\leq\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2\leq x\leq x_2\\ \delta y(x)=k(x-\bar{x}_1)^{2n}(\bar{x}_2-x)^{2n} & \bar{x}_1\leq x\leq\bar{x}_2\end{cases} \tag{1·48}$$

这个函数 $\delta y(x)$ 在 $(x_2, x_1)$ 内，除 $x=\bar{x}$ 附近（即 $\bar{x}_1 \leq \bar{x} \leq \bar{x}_2$）外都等于零，满足(1)到处都 $2n-1$ 阶可微；(2)在 $(x_1, x_2)$ 的端点等于零；(3)如果选取一个很小的 $k$，则一定能使条件 $|\delta y|<\varepsilon$ 或 $|\delta y|$ 及 $|\delta y'|<\varepsilon$ 得到满足。于是有

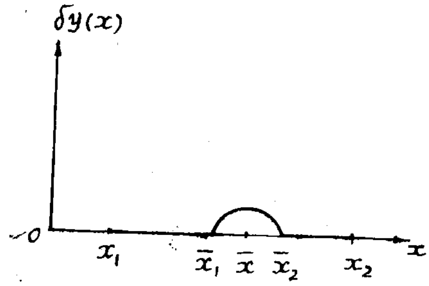

图 1·6

$$\int_{x_1}^{x} F(x)\delta y(x)dx=\int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} F(x)k(x-\bar{x}_1)^{2n}(\bar{x}_2-x)^{2n}dx \neq 0 \tag{1·49}$$

这和（1·46）式的条件矛盾，因此 $F(x)$ 在 $x=\bar{x}$ 处一定等于0，但 $x=\bar{x}$ 是任意选取的，所以 $F(x)$ 到处都等于0：

$$F(x)=0 \qquad x_1 \leq x \leq x_2 \tag{1·50}$$

这就证明了变分法的基本予备定理。

对于多变量的问题，也有类似的予备定理。例如，如果 $F(x,y)$ 在 $(x,y)$ 平面内D域中连续，设 $\delta\zeta(x,y)$ 在D域的边界上为零，$|\delta\zeta| \leq \varepsilon$，$|\delta\zeta'_x|<\varepsilon$，$|\delta\zeta'_y|<\varepsilon$，还满足连续性及一阶或若干阶的可微性，对于这样选取的 $\delta\zeta(x,y)$ 而言，有

$$\iint_D F(x,y)\delta\zeta(x,y)dxdy=0 \tag{1·51}$$

则在域D内

$$F(x,y)=0 \tag{1·52}$$

其证明方法和单变量的 $F(x)$ 很相似。

根据这个予备定理，从（1·45）得

$$\frac{1}{2y}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}+\frac{d}{dx}\left\{\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}\right\}=0 \tag{1·53}$$

都就是求解 $y(x)$ 的微分方程。这类从泛函变分获得微分方程的方法是欧拉首先系统地研究的，这类微分方程统称欧拉方程。