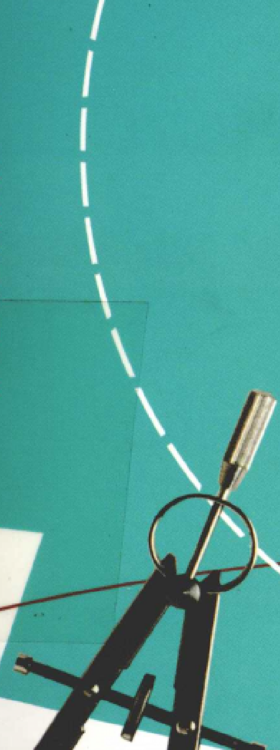
单墫 主编

数学奥林匹克命题人讲座

组合问题

刘培杰 张永芹 著

上海科技教育出版社



世纪出版

刘培杰 哈尔滨工业大学出版社第四编辑室主任，副编审。从1985年开始从事数学奥林匹克培训、命题及研究工作，在20多年的教学中共培训学生近万人次，多人次获奖，其中包括IMO金牌两块。多次为竞赛活动命题，包括全国初中数学联赛及希望杯竞赛；多年来一直是黑龙江省初高中及哈尔滨市竞赛命题组成员。共发表数学竞赛方面论文60余篇，在上海教育出版社、上海科技教育出版社等单位出版有关竞赛方面的研究专著近10部。

张永芹 2001年就读于黑龙江大学信息与计算科学专业，2008年于黑龙江大学获得理学硕士。现为哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室成员。

《解析几何》
《代数函数与多项式》
《函数迭代与函数方程》
《代数不等式》
《重心坐标与平面几何》
《初等数论》
《集合与对应》
《数列与数学归纳法》
《组合问题》
《图论》
《组合几何》
《向量与立体几何》
《复数·三角函数》

上架建议：中小学教育/数学
ISBN 978-7-5428-4824-6
9 787542 848246 >
易文网：www.ewen.cc
ISBN 978-7-5428-4824-6/O·607
定价：22.00元

单墫 主编

数学奥林匹克命题人讲座

组合问题

刘培杰 张永芹 著

上海科技教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

组合问题/刘培杰,张永芹著. —上海:上海科技教育出版社,2009.6

(数学奥林匹克命题人讲座/单墫主编)

ISBN 978-7-5428-4824-6

Ⅰ. 组…　Ⅱ. 刘…　Ⅲ. 组合数学—高中—教学参考资料　Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 042149 号

丛书序

读书，是天下第一件好事。

书，是老师。他循循善诱，传授许多新鲜知识，使你的眼界与思路大开。

书，是朋友。他与你切磋琢磨，研讨问题，交流心得，使你的见识与能力大增。

书的作用太大了！

这里举一个例子：常庚哲先生的《抽屉原则及其他》(上海教育出版社，1980 年)问世后，很快地，连小学生都知道了什么是抽屉原则。而在此以前，几乎无人知道这一名词。

读书，当然要读好书。

常常有人问我：哪些奥数书好？希望我能推荐几本。

我看过的书不多。最熟悉的是上海的出版社出过的几十本小册子。可惜现在已经成为珍本，很难见到。幸而上海科技教育出版社即将推出一套“数学奥林匹克命题人讲座”丛书，帮我回答了这个问题。

这套丛书的书名与作者初定如下：

陆洪文	《解析几何》
施咸亮	《代数函数与多项式》
熊　斌	《函数迭代与函数方程》
陈　计　季潮丞	《代数不等式》
曹　纲　叶中豪	《重心坐标与平面几何》
冯志刚	《初等数论》
单　墫	《集合与对应》《数列与数学归纳法》
刘培杰　张永芹	《组合问题》
任　韩	《图论》

田廷彦　　　　　《组合几何》

唐立华　　　　　《向量与立体几何》

邵嘉林　　　　　《复数·三角函数》

显然，作者队伍非常之强。老辈如陆洪文先生、施咸亮先生都是博士生导师。他们不仅在代数数论、函数逼近等领域的研究上取得了卓越的成绩，而且十分关心数学竞赛。中年如陈计先生于不等式，叶中豪先生于平面几何，都是国内公认的首屈一指的专家。其他各位也都是当下国内数学奥林匹克的领军人物。如熊斌、冯志刚是 2008 年 IMO 中国国家队的正副领队、中国数学奥林匹克委员会委员。他们为我国数学奥林匹克做出了重大的贡献，培养了很多的人才。2008 年 9 月 14 日，“国际数学奥林匹克研究中心”在华东师范大学挂牌成立，担任这个研究中心主任的正是多届 IMO 中国国家队领队、华东师范大学数学系副教授熊斌。又如邵嘉林先生，他指导过的张成同学获得了第 49 届 IMO 的金牌。

这些作者有一个共同的特点：他们都为数学竞赛命过题。

如：

设数 a 具有以下性质：对于任意四个实数 x_1, x_2, x_3, x_4，总可以取整数 k_1, k_2, k_3, k_4，使得

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}((x_i-k_i)-(x_j-k_j))^2\leqslant a,$$

求这样的 a 的最小值。

这是施咸亮先生供给我国国家集训队选拔的试题。

又如：

设 $S=\{1,2,\cdots,2005\}$。若 S 中任意 n 个两两互素的数组成的集合中都至少有一个素数，试求 n 的最小值。

这是唐立华先生供给西部数学奥林匹克的试题。

叶、熊、冯等几位先生供给竞赛的题举不胜举，这里就不罗列了。

命题人讲座，是田廷彦先生的创意。

命题人写书，富于原创性。有许多新的构想、新的问题、新的解法、新的探讨。新，是这套丛书的一大亮点。读者一定会从这套丛书中学到很多新的知识，产生很多新的想法。

新，会不会造成深、难呢？

这套书当然会有一定的深度，一定的难度。但作者是命题人，充分了解问题的背景（如刘培杰先生就曾专门研究过一些问题的背景），写来能够深入浅出，“百炼钢化为绕指柔”。另一方面，倘若一本书十分浮浅，一点难度没有，那也就失去了阅读的价值。

读书，难免遇到困难。遇到困难，不能放弃。要顶得住，坚持下去，锲而不舍。这样，你不但读懂了一本好书，而且也学会了读书，享受到读书的乐趣。

书的作者，当然要努力将书写好。但任何事情都难以做到完美无缺。经典著作尚且偶有疏漏，富于原创的书更难免有考虑不足的地方。从某种意义上说，这种不足毋宁说是一种优点：它给读者留下了思考、想象、驰骋的空间。

如果你在阅读中，能够想到一些新的问题或新的解法，能够发现书中的不足或改进书中的结果，那就是古人所说的“读书得间”，值得祝贺！

我们欢迎各位读者对这套丛书提出建议与批评。

感谢上海科技教育出版社，特别是编辑卢源先生，策划组织编写了这套书。卢编辑认真把关，使书中的错误减至最少，又在书中设置了一些栏目，使这套书增色很多。

单　墫

2008 年 10 月

前　言

杨振宁曾这样描述过他一生中最漫长的计算：

“我在中国昆明的时候，从硕士论文导师王竹溪先生口中第一次听到翁萨格(Onsager)这个名字。20 世纪 30 年代，王先生在英国剑桥跟福勒(R. H. Fowler)学习有序-无序跃迁。1944—1945 年的一天，他告诉我，翁萨格已经找到了二维空间伊辛(Ising)模型的严格解。王先生是一位安静、保守的人，那天他却显得非常兴奋。半个世纪后的今天，我仍然能够记得他告诉我翁萨格的论文时那种仰慕与兴奋的口气。后来我找了那篇论文来细读，可是始终不明白翁萨格的方法。他似乎总是喜欢计算对易式(Commutator)，而从不解释为什么要这样做。

几年后，当我在芝加哥大学做研究生时，再次阅读了翁萨格的论文，并花了大量时间仔细研究，可是又一次毫无进展。

1949 年秋天，我成为普林斯顿高等研究院的一员(用今天的名词即博士后)。奥本海默(Oppenheimer)为了帮助我应付美国移民局，把我名义上调为佩斯(Pais)的助理，可是我没有真正帮佩斯做过什么事情。那一年高等研究院的所有人员，包括我在内，都在研究场论和基本粒子，统计力学当时并不是一个热门题目。可是偶然地，在 1949 年 11 月里的一天，通过与鲁丁格(Luttinger)的谈话，我得知一个新的翁萨格-考夫曼(Kaufman)方法极大地简化了翁萨格的论文。更重要的是，这新方法建立在许多‘反对换’矩阵的表示论上，而我在学习 Dirac 方程时就曾充分了解此表示论。就这样，我终于明白了翁萨格的方法。我曾描述这件事如何使得我后来在 1951 年计算出磁化(magnetization)，并称此计算为‘我一生中最漫长的计算’。”

当然，在当代，相当一部分复杂的计算可由电子计算机处理，但这并不意味着计算本身没什么研究价值了。人们面临两件事情：一是计

算的代价，由此产生了计算复杂性和 P-NP 难题；二是计算的艺术，这就是组合学的任务了。前者不会进入奥数领域，而后者恰恰是奥数最为看重的。

人们还是采取这样的方式，把一个组合问题还原成一个代数或分析问题(对应和估计)，就像面对几何一样。于是，许多极端复杂的组合细节就可忽略。复杂性是人类而不是个人面临的困难(比如癌症、天气预报等，都是复杂性在困扰人类)，但是奥林匹克数学命题考察的是个人能力，所以命题者尽可以避开组合复杂性。也就是说，组合问题必可用整体对应、代数还原或局部处理这几类方法解决。如果你在做题时遇到非常棘手的困难，毫无思路，那必定是陷入了组合细节的复杂性中，而没有想到或找到前几种方法。对于命题者来说，如果所出的组合问题只有组合细节的话，那么只能用小的数字一一列举，否则就不应该是学生做的题。尤其是组合数学和初等数论中的问题，题目本身往往具有伪装性，什么是不能做的，什么是研究性质的，什么是学生的思考题，一下子看不出来。只要稍做改动，就可能由一道常规题变成世界难题了。所以，命题比解题更重要，尤其是对组合与数论的一些杂题而言。

目　录

第一讲 常规计数方法

当前，由于计算机的发展和信息时代的需求，组合数学在数学中的地位已变得越来越重要，这从历届菲尔兹奖和沃尔夫奖的颁发中就可看出. 以至于有人说，组合数学现在可有个更“正”的名字——组合学. 计数是组合数学中一个最基本的方向，主要研究一定条件下的安排方式的数目. 计数问题非常广泛，其高端是现代数学的研究课题，低端则是小学生的趣题.

无论是国内国外，组合问题都是高中数学竞赛的“超级大国”之一，其问题往往也最为精彩（尤其是俄罗斯乃至东欧各国的），最能体现竞赛数学的智巧和精神. 这一讲介绍的是常规计数方法.

§1.1 分 类 法

知识桥

组合计数中最原始的方法是枚举法，即把一个一个情况都列举出来. 显然这样的方法有点“吃力不讨好”. 为此人们想到了分类法，使每一类里的计数变得较简单，类似于在加法基础上发明了乘法. 分类是数学中的重要思想，其原则即使在生活中也十分常见(但并不都以计数为目的，例如本书的目录). 分类计数的基本原理就是加法原理：如完成一件事有 k 类方法，第一类有 m_1 种不同做法，第二类有 m_2 种不同做法……第 k 类有 m_k 种不同做法，则完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_k$ 种不同的方法. 在运用分类法进行较简单问题的计数时(有些非常规组合题的计数除了分类也别无他法)，其基本步骤无非是两个方面：一是分类，即确定 k，不同的分类方式会导致解题的繁琐或简洁；二是对每一类计数，即确定每一个 m_i. N 的计算一般并不困难，否则便是另一个课题了(即组合恒等式).

训练营

例 1 若两个相邻自然数在相加时不产生进位，则称它们为“简单对”. 在 1,2,3,…,2004,2005 这 2005 个自然数中，有多少个“简单对”？

解 “简单对”中两数的末位数只能是(0,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(9,0)之一. 个位不为(9,0)的“简单对”有 $5\times5\times5\times2+5-1=254$(个)；个位为(9,0)，十位不为(9,0)的“简单对”有 $5\times5\times2=50$(个)；个位、十位为(9,0)，百位不为(9,0)的“简单对”有 $5\times2=10$(个)；个位、十位、百位均为(9,0)的“简单对”有(999,1000)和(1999,2000)两个.

共计 $$254+50+10+2=316(\text{个}).$$

例 2 n 元集具有多少个不同的不交子集对?

(1973 年捷克数学奥林匹克竞赛)

解 如果子集对是有序的,即在子集对中可以区分第一个子集与第二个子集,则 n 个元素中每个元素都有三种可能:它或在第一个子集,或在第二个子集,或不在其中任意一个子集,因此不同的不交有序子集对的总数为 3^n. 如果子集对是无序的,即两个子集相同但次序不同的子集对看作是同一个,则 3^n 对有序子集对中有一对是由两个空集组成,而其他 3^n-1 对有序对,每一对中交换两个子集的次序,得到的是同一个无序子集对,因此有 $\frac{3^n-1}{2}$ 个无序子集对,其中至少有一个子集非空. 于是无序子集对的总数为 $\frac{3^n-1}{2}+1=\frac{3^n+1}{2}$.

例 3 设正整数对 (x,y) 使得 $\frac{x^2+y^2}{11}$ 为整数,且满足条件 $\frac{x^2+y^2}{11}\leqslant 1991$. 求这样的正整数对 (x,y) 的个数(当 $a\neq b$ 时,(a,b) 与 (b,a) 看作不同的数对).

(1991 年湖南省冬季数学奥林匹克集训队试题)

解 任取 $x\in\mathbf{N}$,若 $11\nmid x$,则因

$$x\equiv\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm5 \pmod{11},$$

$$x^2\equiv1,4,9,5,3 \pmod{11}.$$

故对任意的 y,都有 $x^2+y^2\not\equiv 0 \pmod{11}$,所以当 $\frac{x^2+y^2}{11}$ 为整数时,必有 $11\mid x$. 同理 $11\mid y$,故可设 $\frac{x^2+y^2}{11}=11(m^2+n^2)$,代入题设条件并约去因数 11,得

$$m^2+n^2\leqslant 181. \tag{1}$$

因此,满足题设条件的正整数对 (x,y) 的个数也就是满足式(1)的

正整数对的个数.

因 $n\geqslant 1$,所以 $m^2\leqslant 181-n^2\leqslant 180$. 由于 $13^2=169<180<14^2=196$,故 $m\in\{1,2,\cdots,13\}$. 同理,$n\in\{1,2,\cdots,13\}$.

下面分三种情况讨论:

(1) 当 $1\leqslant m,n\leqslant 9$ 时,恒有 $m^2+n^2\leqslant 2\times 9^2=162<181$,所以,这时满足式(1)的数对$(m,n)$共有 $9\times 9=81$(个).

(2) 当 $10\leqslant m,n\leqslant 13$ 时,因 $m^2+n^2\geqslant 2\times 10^2=200>181$,这时没有满足式(1)的数对$(m,n)$.

(3) 当 m,n 中有且仅有一个取 10,11,12,13 之一时,因 $9^2\leqslant 181-10^2=81<10^2$,$7^2<181-11^2=60<8^2$,$6^2<181-12^2=37<7^2$,$3^2<181-13^2=12<4^2$.

所以,这时满足式(1)的数对(m,n)共有 $2\times(9+7+6+3)=50$(个).

综上所述,满足条件的数对共有 $81+50=131$(个).

例 4 将集合$\{1,2,\cdots,n\}$分成 3 个子集 A_1,A_2,A_3,其中允许有空集. 求满足下列条件的分法种数:

(1) 当将每个子集中的数按递增顺序排列时,每相邻两数的奇偶性不同;

(2) 若 A_1,A_2,A_3 均非空,则其中恰有 1 个集合的最小元素是偶数.

(1987 年第 28 届国际数学奥林匹克竞赛预选题)

解 设 $1\in A_1$,且 A_2 的最小元素小于 A_3 的最小元素. 我们用依次将 $2,3,\cdots,n$ 按要求放入 3 个集合的方法来构造 A_1,A_2,A_3. 首先,2 有两种放法:放入 A_1 或 A_2. 假设小于 k 的自然数均有两种放法且已放妥,考察 k 的放法.

(i) A_2,A_3 中均未放入元素. 这时 k 可放入 A_1 或 A_2,但不能放入 A_3,共有两种放法.

(ii) A_2 中已有元素,但 A_3 中尚未放入元素.

(a) k 与 A_2 中的最小元素同为奇数. 因为集合 A_1 和 A_2 中已放入的 $k-1$ 个元素奇偶各半,故这两个集合中的最大元素都是偶数. 从而

k 可放入 A_1 或 A_2，但不能放入 A_3，共有两种放法. 同理，当 k 与 A_2 中的最小元素同为偶数时也有两种放法.

(b) k 与 A_2 中的最小元素奇偶性不同. 设 k 为奇数，于是 A_1 和 A_2 中已放入的 $k-1$ 个元素奇偶各半，从而 A_1 和 A_2 中的最大元素奇偶性不同. 这样，奇数 k 恰可放入 A_1 与 A_2 之一，同时又可放入 A_3，共有两种放法. 同理，当 k 为偶数时也有两种放法.

(iii) A_2 和 A_3 中均已有元素，在此之前 $k-1$ 有两种放法. 不妨设 $k-1$ 既可放入 A_1 又可放入 A_2，而实际上放入了 A_1，于是 k 可放入 A_1 或 A_3，但不能放入 A_2，共有两种放法.

综上可知，从 2 到 n 的每个数都有两种不同放法. 从而知满足要求的分法种数为 2^{n-1}.

例 5 某国学生参加城市联赛，每份试卷由 6 题组成，每题恰有 1000 个人做出来. 若找不到两个人，使任何一题至少被两个人中的一个答出，试求参加比赛的人数的最小值.

解 最少有 2000 人参加比赛.

(i) 首先证明 2000 个人参加比赛可以满足要求. 定义三元数组 (i, j, k) 表示答对第 i, j, k 题 $(1 \leqslant i, j, k \leqslant 6)$. 考虑 10 个三元数组 $(1,2,3)$，$(3,5,6)$，$(1,2,5)$，$(3,4,5)$，$(1,3,4)$，$(2,4,6)$，$(2,3,6)$，$(1,4,6)$，$(1,5,6)$，$(2,4,5)$，它们满足：

(a) 任两个数恰出现 5 次；

(b) 每个数恰出现 5 次.

将每个三元数组对应于 200 个人的答题情况，则可知此 2000 个人满足题目所有条件.

(ii) 证明不能少于 2000 人.

设答对题最多的人为 A，并设 A 答对 k 题.

(a) $k=6$. 则 A 全部答对，与条件矛盾.

(b) $k=5$. 不妨设 A 同时答对 1,2,3,4,5 题. 则由题知存在 B 答对第 6 题，于是 A 与 B 答对所有题，矛盾.

(c) $k=4$. 不妨设 A 同时答对 1,2,3,4 题，则不存在 B 同时答对

5,6 题. 于是答对第 5 题和答对第 6 题的共有 2000 人,再加上 A,至少有 2001 人.

(d) $k=3$. 则每人至多答对 3 题,而每题有 1000 人答对,至少有

$$\frac{6\times1000}{3}=2000(\text{人}).$$

因此 2000 人为所求最小值.

点评 许多分类问题的困难之处不在于未想到分类,而在于如何进行分类. 本题是一个典型的组合最值问题,即在某数时可构造,而在大于(或小于)此数时均不可行,两者缺一不可.

例 6 (1) 从 0,1,3,5,7 中取出不同的三个数作系数,可以组成多少个不同的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$? 其中有实根的方程有多少个?

(2) 从 $-3,-2,-1,0,1,2,3,4$ 八个数中,任取三个不同的数作为二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的系数,若二次函数的图像过原点,且其顶点在第一象限或第三象限,这样的二次函数有多少个?

解 (1) x^2 的系数 $a\neq0$,a 有 4 种取法. 对于每一种 a 的取法,b,c 可以从余下的 4 个数中任取两个排列,有 A_4^2 种方法. 共可组成一元二次方程 $4A_4^2=48$(个).

方程要有实根,必须满足 $\Delta=b^2-4ac\geqslant0$.

若 $c=0$,则 a,b 在 1,3,5,7 中任取两个作排列,有 A_4^2 种方法;

若 $c\neq0$,则 b 只能取 5 或 7. 当 $b=7$ 时,a,c 可在 1,3,5 中取 1,3 或 1,5 作排列,有 $2A_2^2$ 种取法;当 $b=5$ 时,a,c 只能取 1,3 作排列,有 A_2^2 种取法.

综上,有实根的一元二次方程共有 $A_4^2+2A_2^2+A_2^2=18$(个).

(2) 可将二次函数分为两大类:一类顶点在第一象限,另一类顶点在第三象限,然后对顶点坐标的符号分别考察.