理论物理学教程

电磁学要义

钱尚武 等 著

科学出版社
www.sciencep.com

理论物理学教程

电磁学要义

钱尚武 等 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书简明扼要而又深入浅出地介绍了电磁学的基本概念、基本规律和基本研究方法，内容分成静电场和静磁场、变化电磁场、狭义相对论三章. 第一章系统地讨论了介质存在时静场的规律和求解方法，以及多极展开的重要应用. 第二章系统地讨论了定态平面电磁波在绝缘介质和导体中的传播，波导管和谐振腔，以及电偶极、磁偶极、电四极矩和半波天线的辐射. 第三章引入了洛伦兹变换矩阵，讨论了时空结构等方面一些重要推论，分析了两种佯谬，介绍了非相对论方程相对论化的方法及其重要应用和重要推论.

本书可作为高等院校电磁学和电动力学等课程的教科书或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

电磁学要义/钱尚武等著. —北京：科学出版社，2010
理论物理学教程
ISBN 978-7-03-027089-4

Ⅰ.①电… Ⅱ.①钱… Ⅲ.①电磁学-教材 Ⅳ.①O441

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 050999 号

责任编辑：窦京涛 / 责任校对：朱光光
责任印制：张克忠 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

明辉印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 4 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2010 年 4 月第一次印刷 印张：11
印数：1—3 000 字数：219 000

定价：22.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

本书本着少而精的原则，简明扼要而又深入浅出地介绍了电磁学的主要内容，在理解基本规律、基本概念和基本研究方法这三方面提供必要的理论基础，便于进一步进行科学和技术应用方面的研究工作. 本书是作者多年来在北京大学讲授电磁学和电动力学方面有关课程的讲义和讲稿的基础上编写而成的. 其中，本书第二章的原稿大部分是由北京大学物理系教授林抒撰写的，第三章的原稿大部分是由同济大学物理系教授陆培荣撰写的. 本书可作为高等院校电磁学和电动力学有关课程的教科书和参考书.

本书在出版过程中得到北京大学赵凯华和陈熙谋两位教授的大力推荐. 在联系出版方面得到钟锡华和王稼军两位教授的鼎立相助，并获得北京大学物理学院的出版资助，作者在此一并表示由衷的感谢.

由于作者学识所限，书中定有许多不当和不足之处，甚至某些错误，望广大读者提出批评和修改意见，以便再版时及时改进.

作　者

2009 年 10 月

目 录

第一章

静电场和静磁场

在电荷分布不随时间而变时我们得到静电场，在电流分布不随时间而变时我们得到静磁场，这时所有物理量（属于源的物理量和属于场的物理量）都不随时间而变，只有在这种特殊情形下，电场和磁场彼此不相耦合，才可以分开来单独进行研究. 本章讨论的就是这种和时间无关的静电场和静磁场. 在静电场这一节中，我们是环绕着静电场的两条基本规律进行讨论的，这两条基本规律就是高斯定理和环路定理. 在静磁场这一节中，我们是环绕着静磁场的两条基本规律进行讨论的，这两条基本规律就是磁学中的高斯定理和安培环路定理.

在叙述本章内容之前，先在下面一段引言中扼要说明：①电磁现象的重要性；②电磁学的发展简史；③电动力学的研究对象和研究方法.

电磁现象的重要性是不言而喻的. 在生产、科研和日常生活中到处都存在着电磁现象，到处都在应用电磁现象的规律，而很多科学诸如半导体物理、原子物理、电子物理、无线电物理等等也都是在研究电磁现象的过程中产生的. 因此，可以毫不夸张地说，我们所生活着的世界是一个电磁世界. 虽然如此，但电磁学的发展却比起力学、热学和光学来都晚得多，直到 17 世纪以后人们才开始对电磁现象进行系统的研究，也才开始有电磁学这门学科. 原先，电现象和磁现象是被作为两种独立的现象进行研究的，自从 1819 年奥斯特发现电流磁效应、1820 年安培提出分子电流假设后，电和磁才被作为统一的整体进行研究，填平了磁现象两种貌似不同的起源（磁铁和电流）之间的鸿沟. 1831 年法拉第发现电磁感应定律并提出场的思想. 随后，1864 年麦克斯韦把电磁规律总结为麦克斯韦方程组，既预言了电磁波的存在，又从理论上论证了光就是一种电磁波，从而又在更高更广的角度下统一了电磁现象和光现象. 麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式在电磁学中所起的作用，和牛顿定律在力学中所起的作用相仿，也和热力学四条定律在热学中所起的作用相仿. 从牛顿定律出发，结合所研究的对象的具体性质研究机械运动的规律，这就是所谓的动力学的任务. 从热力学四条定律出发，结合所研究对象的具体性质研究物质热运动的规律，这就是所谓的热力学的任务. 与此相似，从麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式出发，结合所研究对象的具体性质研究物质电磁现象规律，就是所谓的电动力学的任务. 因此，麦克斯韦方程组获得后，就形成一门新的学科——电动力学，其出发

点是麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式，而其对象是电磁场及其和物质的相互作用.

§1.1 静 电 场

本节讨论①矢量与张量的定义，排列符号 e_{rst} 与 $e-\delta$ 恒等式及其应用；②电场强度与电势、泊松方程；③电介质、面散度与面旋度、边界条件；④静电问题一些特殊解法，电象法与分离变量法.

1.1.1 数学准备——矢量与张量

1. 矢量

在力学中遇到过一类物理量，诸如位移、速度、加速度、力、动量、角动量等等，它们有大小有方向，且服从平行四边形相加法则，这些量都是矢量. 一个量是否为一矢量，关键是当坐标变换时，它的三个分量是否满足一定的变换法则. 以典型矢量矢径为例，看一下它在坐标变换下，其分量在进行变换时所满足的变换法则. 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 表示坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 的三个沿坐标轴方向的单位矢量，则矢径 $\overrightarrow{OP}$ 表示为

$$\boldsymbol{r}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3=x_j\boldsymbol{e}_j \tag{1.1}$$

我们今后运用爱因斯坦求和约定，凡重复出现的指标，即表示对此指标所有可能的值求和，并将此种指标称为哑指标，(1.1)式中 j 即为哑指标. 在由坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 变换为坐标系 $Ox_1'x_2'x_3'$ 时，矢径 $\overrightarrow{OP}$ 表示为

$$\boldsymbol{r}=x_1'\boldsymbol{e}_1'+x_2'\boldsymbol{e}_2'+x_3'\boldsymbol{e}_3'=x_i'\boldsymbol{e}_i' \tag{1.2}$$

(1.2)式中 $\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3'$ 为坐标系 $Ox_1'x_2'x_3'$ 的三个沿坐标轴方向的单位矢量，式中 i 为哑指标. 如令 $a_{ij}=\boldsymbol{e}_i'\cdot\boldsymbol{e}_j$，并注意到

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij}\\ \boldsymbol{e}_i'\cdot\boldsymbol{e}_j'=\delta_{ij}\end{cases} \tag{1.3}$$

式中 δ_{ij} 是克罗内克符号（$i=j$ 时为 1，否则为零），则由(1.1)式～(1.3)式即得

$$x_i'=a_{ij}x_j \tag{1.4}$$

和

$$x_j=a_{ij}x_i' \tag{1.5}$$

其中 a_{ij} 之间满足下列关系式

$$a_{ik}a_{jk}=\delta_{ij} \tag{1.6}$$

(1.4)式和(1.5)式可用矩阵形式表为

$$\underline{x'}=\underline{\underline{a}}\,\underline{x} \tag{1.7}$$

$$\underline{x}=\underline{\underline{a^{-1}}}\,\underline{x'} \tag{1.8}$$

因矩阵 $\underline{a}$ 为正交矩阵，所以其逆矩阵$\underline{\underline{a}}^{-1}$即为其转置矩阵$\underline{\underline{a}}^{\mathrm{T}}$

$$\underline{\underline{a}}^{-1}=\underline{\underline{a}}^{\mathrm{T}} \tag{1.9}$$

可见矢量的三个分量在坐标变换时，按(1.4)式或(1.5)式所示法则进行变换. 如果一个量 $\boldsymbol{A}$ 的各个分量(A_1,A_2,A_3)在坐标变换时，按照和(1.4)式或(1.5)式相类似的规律进行变换，即

$$A'_i=a_{ij}A_j \tag{1.10}$$

$$A_j=a_{ji}A'_i \tag{1.11}$$

这个量 $\boldsymbol{A}$ 就是矢量. 因此(1.10)式或(1.11)式可看作矢量 $\boldsymbol{A}$ 的定义，即一个量 $\boldsymbol{A}$ 是否为矢量的判据.

例如∇算符可看作矢量，这是因为

$$\frac{\partial}{\partial x'_i}=\frac{\partial x_j}{\partial x'_i}\frac{\partial}{\partial x_j}=a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

总之，每一矢量在任一直角坐标系中都有三个分量，当坐标系进行变换时，其分量之间变换规律如(1.10)式或(1.11)式所示.

2. 张量

张量是标量和矢量的推广，标量只有一个分量，在坐标变换下，它是一个不变量，矢量是有 3 个分量的量，在坐标变换下，它要按(1.10)式所规定的方式变换，否则就不是一个矢量. 二阶张量是有 $3^2=9$ 个分量的量，在坐标变换下，它要按下列方式进行变换：

$$B'_{ij}=a_{ik}a_{jl}B_{kl} \tag{1.12}$$

式中 k 和 l 都是哑指标. 在弹性力学中应力和应变都有 9 个分量，而且都按(1.12)式的方式进行变换，因此都是二阶张量，同样的方式可以引进具有 3^n 分量的 n 阶张量. 引进 n 阶张量后，矢量可看作一阶张量，标量可看作零阶张量. 现举出一些常见的二阶张量的例子如下：

(1) 并矢 $\boldsymbol{AB}$，其分量为 $C_{ij}=A_iB_j$，其中 A_i 为矢量 $\boldsymbol{A}$ 的分量，B_j 为 $\boldsymbol{B}$ 矢量的分量. 在坐标变换时并矢的分量变为

$$C'_{ij}=A'_iB'_j=(a_{ik}A_k)(a_{jl}B_l)=a_{ik}a_{jl}A_kB_l=a_{ik}a_{jl}C_{kl}$$

因此并矢为一二阶张量. 同样可见，δ_{ij} 也为一二阶张量.

(2) 矢量梯度$\nabla\boldsymbol{A}$，其分量为 $C_{ij}=\dfrac{\partial A_i}{\partial x_j}$($A_i$ 对 x_j 的偏微商可简写为 $A_{i,j}$). 在坐标变换下矢量梯度的分量变为

$$\begin{aligned}C'_{ij}&=\frac{\partial A'_i}{\partial x'_j}=\frac{\partial}{\partial x'_j}(a_{ik}A_k)=a_{ik}\frac{\partial}{\partial x'_j}A_k\\&=a_{ik}\left(\frac{\partial}{\partial x_l}A_k\right)\cdot\frac{\partial x_l}{\partial x'_j}=a_{ik}a_{jl}A_{k,l}=a_{ik}a_{jl}C_{kl}\end{aligned}$$

因此矢量梯度为一二阶张量.

(3) 应变张量

因$\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$为位移矢量的梯度,所以它是一二阶张量,其中 u_i 为位移矢量的分量.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=S_{ij}+A_{ij} \tag{1.13}$$

S_{ij} 为一对称张量,即应变张量,它描述物体的应变;A_{ij} 为一反对称张量,它描述物体的转动.

为了便于进行运算,下面介绍一种常用的符号,即所谓**排列符号** e_{rst},在 rst 为 123 的偶置换时其值为$+1$,奇置换时其值为-1,rst 中有两个或三个相同时则为零,即

$$\begin{cases} e_{123}=e_{231}=e_{312}=1 \\ e_{213}=e_{132}=e_{321}=-1 \\ \text{其余的 } e_{rst} \text{ 等于零} \end{cases} \tag{1.14}$$

用排列符号时,行列式可写为

$$\| a_{ij} \| = e_{rst}a_{r1}a_{s2}a_{t3} \tag{1.15}$$

$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ 的任一分量可写为

$$w_i = e_{ijk}u_jv_k \tag{1.16}$$

因此矢量 $\boldsymbol{V}$ 旋度的任一分量可写为

$$(\nabla\times\boldsymbol{V})_i = e_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}V_k \tag{1.17}$$

很易验证下列 $e-\delta$ 恒等式

$$e_{ijk}e_{ist}=\delta_{js}\delta_{kt}-\delta_{jt}\delta_{ks} \tag{1.18}$$

利用(1.14)式、(1.16)式、(1.17)式、(1.18)式进行矢量运算十分简便,例如

$$\begin{aligned}[\nabla\times(\varphi\boldsymbol{f})]_i &= e_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi f_k)=e_{ijk}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}f_k+e_{ijk}\varphi\frac{\partial}{\partial x_j}f_k \\ &= [\nabla\varphi\times\boldsymbol{f}]_i+[\varphi\nabla\times\boldsymbol{f}]_i\end{aligned}$$

所以

$$\nabla\times(\varphi\boldsymbol{f})=\nabla\varphi\times\boldsymbol{f}+\varphi\nabla\times\boldsymbol{f} \tag{1.19}$$

又例如

$$\begin{aligned}[\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{f})]_i &= e_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}(\nabla\times\boldsymbol{f})_k=e_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(e_{klm}\frac{\partial}{\partial x_l}f_m\right) \\ &= e_{ijk}e_{klm}\frac{\partial^2 f_m}{\partial x_j\partial x_l}=(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\frac{\partial^2 f_m}{\partial x_j\partial x_l}\end{aligned}$$

$$=\frac{\partial^2 f_m}{\partial x_i \partial x_m}-\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_l \partial x_l}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f_m}{\partial x_m}\right)-\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_l \partial x_l}$$
$$=[\nabla(\nabla\cdot \boldsymbol{f})]_i-[\nabla^2 \boldsymbol{f}]_i$$

所以

$$\nabla\times(\nabla\times \boldsymbol{f})=\nabla(\nabla\cdot \boldsymbol{f})-\nabla^2 \boldsymbol{f} \tag{1.20}$$

1.1.2 电场强度与电势

1. 电场强度

点电荷之间相互作用的定量规律是库仑定律

$$\boldsymbol{F}_{ij}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r^3}\boldsymbol{r}_{ij} \tag{1.21}$$

式中 $\boldsymbol{F}_{ij}$ 表示点电荷 q_i 对点电荷 q_j 的作用力，$\boldsymbol{r}_{ij}$ 是由点电荷 q_i 指向点电荷 q_j 的矢径，ε_0 为真空介电常量，$\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}$ 库仑^2/牛顿·米^2.

所带电荷 q_0 为无限小的点电荷称为试探电荷. 因为 q_0 无限小，所以它的存在不会影响原来的电场，从而可以用它在场中所受的力去度量场的强弱和方向. 设试探电荷 q_0 在电场中所受的力为 $\boldsymbol{F}$，则电场强度 $\boldsymbol{E}$ 定义为单位正试探电荷所受的力，即

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{F}}{q_0} \tag{1.22}$$

由(1.21)式和(1.22)式得出点电荷 q_i 所产生电场的电场强度为

$$\boldsymbol{E}_i=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i \boldsymbol{r}}{r^3} \tag{1.23}$$

在电荷连续分布情形下，任一体元 $\mathrm{d}V'$ 中的电荷为 $\rho\,\mathrm{d}V'$，由场强叠加原理得到

$$\boldsymbol{E}=\int\frac{\rho(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathrm{d}V' \tag{1.24}$$

式中 $\boldsymbol{x}'$ 表示源点坐标，而以 $\boldsymbol{x}$ 表示场点坐标

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}' \tag{1.25}$$

由上式得

$$r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

所以场点劈形算符

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

和源点劈形算符

$$\nabla'=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x'}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y'}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z'}$$

既有联系又有区别，常用的关系式有

$$\begin{cases} \nabla r = -\nabla' r = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r} \\ \nabla \dfrac{1}{r} = -\nabla' \dfrac{1}{r} = -\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3} \\ \nabla \times \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3} = -\nabla' \times \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 0 \\ \nabla \cdot \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3} = -\nabla' \cdot \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 4\pi\delta(\boldsymbol{r}) \end{cases}$$

式中 $\delta(\boldsymbol{r})$ 为狄拉克 δ 函数，它具有如下一些基本性质：

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 0, & \boldsymbol{r} \neq 0 \\ \infty, & \boldsymbol{r} = 0 \end{cases}$$

$$\int_V \delta(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 1,\text{若积分区域 } V \text{ 包含 } \boldsymbol{r} = 0 \text{ 点}$$

因为

$$\nabla \cdot (\phi \boldsymbol{f}) = (\nabla \phi) \cdot \boldsymbol{f} + \phi \nabla \cdot \boldsymbol{f}$$

所以

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{E} &= \int \nabla \cdot \left(\frac{\rho(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \right) \mathrm{d}V' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \rho(\boldsymbol{x}')\, \nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \mathrm{d}V' \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \rho(\boldsymbol{x}') \cdot 4\pi\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')\mathrm{d}V' = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned} \tag{1.26}$$

在上式的推导中用了 $\nabla\rho(\boldsymbol{x}') = 0$ 这一结果. 因为

$$\nabla \times (\phi \boldsymbol{f}) = \nabla \phi \times \boldsymbol{f} + \phi \nabla \times \boldsymbol{f}$$

所以

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \rho(\boldsymbol{x}')\, \nabla \times \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \mathrm{d}V' = 0 \tag{1.27}$$

也就是说，将劈形算符直接作用在(1.24)式，就可得到**高斯定理**的微分形式(1.26)式和**环路定理**的微分形式(1.27)式. 两定理的积分形式为

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q \tag{1.28}$$

和

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \tag{1.29}$$

式中 Q 为闭合面内总电荷.

2. 电势

因为在全空间内 $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$，所以总可以找到一个标量函数 φ，使

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi \tag{1.30}$$

这时$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$自然满足.标量函数$\varphi$称为电势.由(1.30)式可得到两点的电势差

$$\varphi(P_1)-\varphi(P_2)=\int_{P_1}^{P_2}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.31}$$

由(1.31)式可见,将单位正试探电荷由P_1移至P_2时,如场力做正功,则电势降低,$\varphi(P_1)>\varphi(P_2)$;如场力做负功,则电势升高,$\varphi(P_1)<\varphi(P_2)$.如选无穷远处$\varphi$为零,则由(1.31)式可见,$P$点的电势为

$$\varphi(P)=\int_P^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.32}$$

由(1.32)式和点电荷的场强可得点电荷的电势分布为

$$\varphi(P)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{1.33}$$

由(1.33)式和场强叠加原理可知电势也可叠加,因此对给定分布的电荷$\rho(\boldsymbol{x}')$说

$$\varphi=\int\frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{4\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}V \tag{1.34}$$

由$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$和$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$即得泊松方程

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.35}$$

ρ、$\boldsymbol{E}$和φ之间的关系可以用图1.1表示.

假如空间中所有电荷的分布都已给定,即$\rho(\boldsymbol{x}')$给定,则φ就可由(1.34)式求得.但是,实际上由于场对电荷的作用,在某些情形下(例如,有导体时),$\rho(\boldsymbol{x}')$不能预先给定,这时就必须由泊松方程和边界条件求解.

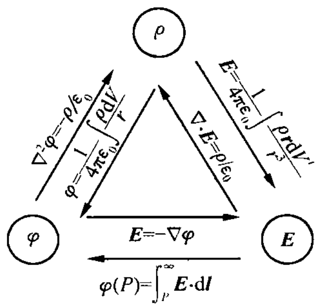

图1.1

在没有电荷存在的空间,泊松方程(1.35)式化为拉普拉斯方程

$$\nabla^2\varphi=0 \tag{1.36}$$

下面我们先来证明,如在某一区域边界上的φ值都已给定,则此区域中拉氏方程的解是唯一的.为此,设有两个解答φ_1和φ_2,都满足拉氏方程,而且在边界上的值都相同,即

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi_1=0,\nabla^2\varphi_2=0\\ \text{在边界上}\ \varphi_1=\varphi_2\end{cases} \tag{1.37}$$

令$\varphi_3=\varphi_1-\varphi_2$,则由(1.37)式知

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi_3 = 0 \\ \text{在边界上 } \varphi_3 = 0\end{cases} \tag{1.38}$$

我们知道,拉氏方程的解是不允许在区域内存在有局部的极大或极小的,极值只可能出现在边界上,而由(1.38)式知 ϕ_3 是拉氏方程的解,且 ϕ_3 在边界上处处为零,所以 ϕ_3 的极大值和极小值都为零,因而内部 φ_3 只能处处为零,从而说明 $\varphi_1=\varphi_2$,即解是唯一的. 很易见到,如在给定区域中有体电荷分布,则上述结论仍成立. 这时设两解答 φ_1 和 φ_2 都满足泊松方程,而且在边界上都具有同样的数值,即

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi_1 = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}, \nabla^2\varphi_2 = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \text{在边界上 } \varphi_1 = \varphi_2\end{cases} \tag{1.39}$$

则对 $\varphi_3=\varphi_1-\varphi_2$ 说同样有

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi_3 = 0 \\ \text{在边界上 } \varphi_3 = 0\end{cases}$$

因而根据拉氏方程解的特点,即得

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

关于唯一性定理的普遍表述及其证明,可参阅郭硕鸿编《电动力学》第二章第二节. 唯一性定理告诉我们,不论我们用何种方式找到了满足给定边界条件的解答,这解答就是我们所需要找的唯一正确的解答,再无其他解答可找了. 唯一性定理是静电学中所有各种特殊解法的理论依据.

1.1.3 电介质

1. 极化的宏观模型,束缚电荷

在介质中,所有电荷都隶属于原子或分子,只能在所属范围内移动,这种电荷称为束缚电荷. 有两类电介质,一类电介质的分子是无极分子,即在无外场时电子云的中心和带正电的原子核的中心重合,因而分子无电偶极矩,如 N_2、H_2、CO_2、CH_4 和 CCl_4 等等都是. 另一类电介质的分子是有极分子,即在无外场时每个分子都有电偶极矩,在电学性质上相当于一电偶极子,如 SO_2、H_2S、NH_3 和 H_2O 等等都是. 由于有极分子在无外场时,其电偶极矩的取向是杂乱无章的,所以在无外场时,极化强度矢量 $\boldsymbol{P}$(宏观小微观大的体积中,单位体积的电偶极矩),对两类介质都为零. 在有外场时,极化强度矢量 $\boldsymbol{P}$ 将有别于零,这种现象称为极化. 对两类介质说,极化的微观机制是不同的,对无极分子组成的电介质说,极化的原因是无极分子的感生极化,即无极分子在外场作用下,成为有电偶极矩的有极分子;对有极分子组成的电介质说,极化的原因是有极分子的取向极化,即有极分子在外场的作用下,取向具有一定的有序度. 虽然两类介质的极化机制有所不同,但宏观上说,我

们都可以用一密度场 ρ 和位移场 $\boldsymbol{\xi}$ 表示极化，即在无外场时，认为正电荷的体密度的数值 ρ_+ 和负电荷的体密度的数值 ρ_- 处处相等，即有 $\rho_+=\rho_-=\rho$，因而各处的极化强度矢量 $\boldsymbol{P}=\frac{\sum_i \boldsymbol{p}_i}{\Delta V}$ 都为零. 在有外场时，正电荷相对负电荷有一位移 $\boldsymbol{\xi}$. 设单位体积中分子数为 n，每一分子带正电荷 q，带负电荷 $-q$，由于位移 $\boldsymbol{\xi}$ 每一分子具有电偶极矩 $q\boldsymbol{\xi}$，单位体积中的电偶极矩，即极化强度矢量

$$\boldsymbol{P}=nq\boldsymbol{\xi}=\rho\boldsymbol{\xi} \tag{1.40}$$

可见，宏观模型的实质就是以密度场 ρ 和位移场 $\boldsymbol{\xi}$ 来描述极化强度矢量场 $\boldsymbol{P}$.

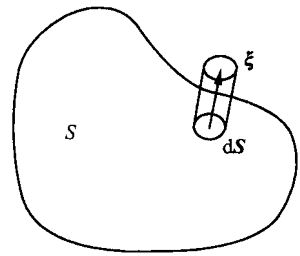

图 1.2

由于极化，介质内部要出现束缚体电荷，介质表面则要出现束缚面电荷. 应用上述极化的宏观模型，很容易找出束缚电荷与极化强度矢量之间的关系. 考虑一闭合曲面 S 上一个面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$(图 1.2)，由于正电荷对负电荷有一位移 $\boldsymbol{\xi}$，因而体积 $\boldsymbol{\xi}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 中正电荷 $\rho\boldsymbol{\xi}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 就由 S 经由 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 移到外面去，从而使曲面 S 中有束缚电荷

$$q'=-\oint_S \rho\boldsymbol{\xi}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\oint_S \boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{P}\mathrm{d}V \tag{1.41}$$

由(1.41)式可知，束缚电荷的体密度

$$\rho_p=-\nabla\cdot\boldsymbol{P} \tag{1.42}$$

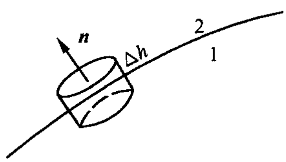

图 1.3

如将(1.41)式用于界面上的扁平小盒，并规定界面的法线方向 $\boldsymbol{n}$ 由介质 1 指向介质 2(图 1.3)，则

$$q'=\int_V \rho_p\mathrm{d}V=\sigma_p\Delta S \tag{1.43}$$

$$-\oint \boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-(P_{2n}-P_{1n})\Delta S \tag{1.44}$$

由(1.43)式和(1.44)式即得

$$\sigma_p=P_{1n}-P_{2n} \tag{1.45}$$

(1.45)式可以用面散度来表示. 我们知道矢量 $\boldsymbol{A}$ 的散度的定义为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V} \tag{1.46}$$

与(1.46)式相仿，对界面上扁平小盒可引入面散度

$$\mathrm{Div}\boldsymbol{A}=\lim_{\Delta h\to 0}\frac{\oint \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta S}=A_{2n}-A_{1n}=\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{A}_2-\boldsymbol{A}_1) \tag{1.47}$$

实际上，面散度就是单位面积上无限小扁平小盒的通量，引用面散度公式(1.47)，

可见

$$\sigma_p = -\mathrm{Div}\boldsymbol{P} \tag{1.48}$$

(1.48)式可认为由(1.42)式在边界面上极限过渡时得到的结果，即在极限过渡时 $\rho_p \to \sigma_p$，$\mathrm{div}\boldsymbol{P} \to \mathrm{Div}\boldsymbol{P}$. 所以体密度变为面密度，体散度变为面散度是一种获得相应边界条件的简易方法. 例如，高斯定理 $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ 在边界面上就化为

$$\mathrm{Div}\boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{1.49}$$

如 1 为导体，2 为真空，则因 $E_1 = 0$

$$\mathrm{Div}\boldsymbol{E} = E_{2n} \tag{1.50}$$

从而(1.49)式就是

$$E_{2n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{1.51}$$

这里顺便提一下面旋度问题. 我们知道，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的旋度的定义是

$$(\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{N} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S} \tag{1.52}$$

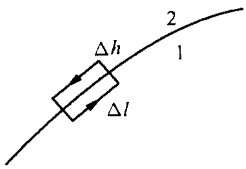

图 1.4

式中 $\boldsymbol{N}$ 是无限小回路的正法线方向，它与回路所规定的正方向(即线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的方向)组成右手螺旋系统，ΔS 是无限小回路的面积. 对界面上(图 1.4)无限细窄回路，可引入面旋度

$$(\mathrm{Rot}\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{N} = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{\oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta l} = (\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2) \cdot \boldsymbol{t} = (\boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_1) \cdot (\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{n})$$
$$= [\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_1)] \cdot \boldsymbol{N} \tag{1.53}$$

式中 $\boldsymbol{t} = -\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{n}$ 是界面切线方向单位矢量，其取向和介质 1 中回路的方向相同. 实际上，面旋度在法线方向的投影就是单位长度上无限细窄回路的环流. 由(1.53)式可知

$$\mathrm{Rot}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_1) \tag{1.54}$$

总之当极限过渡到界面时

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} \to \mathrm{Div}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_1)$$
$$\nabla \times \boldsymbol{A} \to \mathrm{Rot}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_1)$$

作为例子，在边界上环路定理 $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ 化为

$$\mathrm{Rot}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0$$

即

$$E_{2t} = E_{1t} \tag{1.55}$$