◎新课程学习能力评价课题研究资源用书
◎主编 刘德 林旭　编写 新课程学习能力评价课题组

中国教育学会《中国教育学刊》推荐学生用书

学习高手

状元塑造车间

学习技术化

TECHNOLOGIZING STUDY

人民教育 A

数学 必修3

推开这扇窗

- 全解全析
- 高手支招
- 习题解答
- 状元笔记

光明日报出版社

新课程学习能力评价课题研究资源用书

学习高手

状元塑造车间

主　　编　刘　德　林　旭

本册主编　苏卫波

本册副主编　张久霞　杨召营　朱春雨

数学 必修3

人民教育A

光明日报出版社

图书在版编目(CIP)数据

学习高手.数学.3:必修/刘德,林旭主编. —北京:光明日报出版社,2009.12
ISBN 978-7-5112-0231-4

Ⅰ.学… Ⅱ.①刘… ②林… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 159645 号

学习高手
数学/必修 3(人民教育 A)

主　　编:刘　德　林　旭

责任编辑:温　梦　　版式设计:邢　丽
策　　划:赵保国　　责任校对:徐为正
执行策划:聂电春　　责任印制:胡　骑

出版发行:光明日报出版社
地　　址:北京市崇文区珠市口东大街 5 号,100062
电　　话:010—67078249(咨询)
传　　真:010—67078255
网　　址:http://book.gmw.cn
E — mail:gmcbs@gmw.cn
法律顾问:北京市华沛德律师事务所张永福律师

印　　刷:山东滨州明天印务有限公司
装　　订:山东滨州明天印务有限公司
本书如有破损、缺页、装订错误,请与本社发行部联系调换。

开　　本:890×1240　1/32
字　　数:280 千字　　印　　张:10.5
版　　次:2009 年 12 月第 1 版　　印　　次:2009 年 12 月第 1 次
书　　号:ISBN 978-7-5112-0231-4

定价:17.90 元

目录

第一章　算法初步

走近学科思想

ZOU JIN XUE KE SI XIANG

算法的思想

算法思想源远流长，中国古代数学中就蕴涵了丰富的算法思想. 随着现代信息技术飞速发展，算法在科学技术、社会发展中发挥着越来越大的作用，并且日益融入社会生活的许多方面，算法思想已成为现代人应具备的一种数学素养. 算法是数学及其应用的重要组成部分，是计算科学的重要基础. 它既是高中数学的新增内容，又具有较强的应用性. 本章通过分析解决具体问题的过程与步骤，体会算法的思想，了解算法的含义.

本章要点导读

BENZHANGYAODIANDAODU

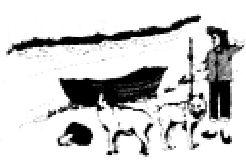
知识要点	课标要求	学习技术
算法的含义	通过分析解决具体问题的过程与步骤，体会算法的思想，了解算法的含义，能用自然语言描述解决具体问题的算法.	初学算法，可通过几个典型的实例，用自然语言和数学语言写出解决问题的算法，贴于案头，时刻模仿，研究. 也可采用类比学法，如类比一个求解一元二次方程根的算法，可以写出所有方程（或组）求解的算法（形成感性经验）.
程序框图	1. 通过模仿、操作、探索，经历通过设计程序框图表达解决问题的算法的过程，学习程序框图的画法； 2. 在具体问题的解决过程中，理解程序框图的三种基本逻辑结构.	结合具体问题的算法设计，通过模仿、操作、探索、修改等方式，逐步体会并掌握用程序框图描述算法的过程和方法，进而弄清算法的三种基本逻辑结构及框图表示. 学好本节，要注重观摩实例，操作简例，探索应用的科学的学习方法.

续表

知识要点	课标要求	学习技术
基本算法语句	1. 结合具体问题，理解几种基本算法语句，理解它们与三种基本逻辑结构之间的关系； 2. 经历将具体问题的程序框图转化为程序语句的过程.	学习中要注意结合实例，理解各种语句的作用和格式，结合上机操作，通过模仿、实践，从而深刻理解这三种基本算法语句；在学习中，把各种类型的实例，详细分析比较，通过对问题的分析，确定适当的算法，然后根据算法画出程序框图，最后依据程序框图写出程序.
算法案例	了解中国古代及西方数学中几个典型的算法案例，理解其中所包含的算法思想，体会中国古代数学对世界数学发展的贡献.	学习中通过阅读典型案例，理解其中的"算理"，体会我国古代数学对世界数学发展的贡献以及算法在实际生活中的作用. 针对每一个典型算法案例，一定要结合相应的、简单的、熟知的实例，理解它们的特点、用法.

1.1 算法与程序框图

1.1.1 算法的概念



一名农夫要将一只狼、一只羊和一袋白菜运到河对岸.但农夫的船很小,每次只能载下农夫本人和狼及羊,或者农夫与白菜.但是,他不能把羊和白菜留在岸边,因为羊会吃掉白菜;也不能把狼和羊留在岸边,因为狼会吃掉羊.那么,农夫如何将这三样东西送过河?在这里,有两个关于算法的概念问题需要我们去思考:一是必须做什么?二是按什么顺序去做?

高手支招1 细品教材

一、算法的概念

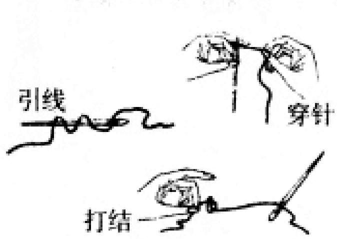
简单地说,算法是完成某项工作的方法和步骤.现代意义上的"算法"通常指可以用计算机来解决的某一类问题的程序或步骤,这些程序或步骤必须是明确和有效的,而且能够在有限的步骤内完成.

粗略地讲,算法就是解题的具体步骤,即把为解决某一问题所需进行的具体步骤一一详细地写出来.广义地说,处理任何问题都有相应的算法.

如:太极拳的图解就是"打太极拳的算法",又如做米饭需要刷锅、淘米、添水、加热这些步骤,这也是一个算法,

又如:图中"穿针引线三部曲"是用图形语言来阐述算法,它是有步骤的,分三步走,循序渐进,每一行为都是建立在前一个行为的基础上完成的.

算法可理解为由基本运算及规定的运算顺序所构成的完整的解题步骤或看成是按要求设计好的、有限的确切的计算序列,并且这样的步骤或序列能够解决一类问题.算法也可看作是计算机的解题过程.在此过程中,无论是形成解题思路还是编写程序,都是在实施某种算法,且解决某个问题的算法不唯一.



穿针引线三部曲

当然这些算法计算机是不能执行的，我们要讲述的算法，是用计算机能实现的算法，即对一类问题的机械的、统一的求解方法.

例如：怎样发电子邮件？

①打开电子信箱；②点击"写邮件"；③输入发送地址；④输入主题；⑤输入信件内容；⑥点击"发送".

【示例】下列关于算法的说法中，正确的有 ……………………………………………… (　　)

① 求解某一类问题的算法是唯一的

② 算法必须在有限步操作之后停止

③ 算法的每一步操作必须是明确的，不能有歧义或模糊

④ 算法执行后一定产生确定的结果

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

▶ **思路分析**：①错，这是因为求解某一类问题的算法不是唯一的，解决一个问题的算法可以有多个.

如何鉴定算法的定义，可从如下两个方面入手：(1)事情是否完成；(2)步骤是否衔接得当. 计算机赖以解决问题的程序的基础恰恰是算法. 正是由于算法，计算机才表现出非凡的智慧.

▶ 答案：C

二、算法的应用

事实上，我们并不陌生算法. 小学的四则混合运算所遵循的先乘除、后加减的规则，括号的处理规则，都是最初接触到的算法实例. 初中学习的方程组的解法等，也是算法的典型体现. 高中学习的求函数零点的二分法，更成了算法的经典. 其实，算法的应用远不止于此. 例如：质数的判定、最大公约数和最小公倍数的求法等，都涉及算法. 同时，其他学科也离不开算法. 还有，算法已深入到各行各业以及数学的各个领域. 随着科学的发展，算法必将在未来的科学研究和日常生活中发挥越来越重要的作用.

【示例】给客人准备一壶茶需要这样几个步骤：洗刷水壶、烧水、洗刷茶具、沏茶. 问：如何安排这几个步骤？试写出两种算法，再加以比较.

▶ **思路分析**：完成准备一壶茶的过程，可根据需要统筹安排，使各个步骤不重复，又不浪费时间.

通过本例，有助于我们加深对算法概念的理解，可结合实际情况解决. 解决一个问题可有多个算法，可以选择其中最优的、最简单的、步骤尽量少的算法.

▶ **解**：算法(一)：

第一步，洗刷水壶.

第二步，烧水.

第三步，洗刷茶具.

第四步，沏茶.

算法(二)：

第一步，洗刷水壶.

第二步，烧水，烧水的过程当中洗刷茶具.

第三步，沏茶.

上述两种算法都符合题意，从算法(一)看，烧水和洗刷茶具分为两个步骤，浪费了时间，从统筹方法考虑，算法(二)更合理，同时说明算法不唯一.

在数学上对算法进行研究，我们更关注解决数学问题的算法，实际上解决数学问题也是在一定条件下按某种顺序执行的一系列操作. 例如，解方程 $3x-4=2(x+5)$ 的步骤是去括号、移项、合并同类项、系数化为1. 这就是解方程 $3x-4=2(x+5)$ 的算法，按照这样的步骤(即算法)就能达到求出未知数的目的.

将解决问题的过程或步骤转换成计算机能识别的语言后，就能借助计算机来解决问题，现在研究算法就是为了方便以后运用计算机来解决数学问题.

研究算法时，希望研究出来的算法不仅仅能解决一个问题，最好能解决一类问题，这样就可以将问题转化为计算机能识别的语言，从而将该类问题交给计算机来处理.

【示例】某个问题的算法如下：

第一步，给定一个实数 n.

第二步，判断 n 是否是 2，若 $n=2$，则 n 满足条件，若 $n>2$，则执行第三步.

第三步，依次从 2 到 $n-1$ 检验能不能整除 n，若都不能整除 n，则 n 满足条件.

满足上述条件的是 …………………………………………………………（　　）

A. 质数　　　　B. 奇数

C. 偶数　　　　D. 约数

▶ **思路分析**：首先要理解质数，除 1 和它本身外没有其他约数的正整数叫做质数，2 是最小的质数，这个算法通过对 2 到 $n-1$ 验证，看是否有其他约数，来判断其是否为质数.

答案：A

三、算法的典例——二分法

在十六世纪，科学家已找到了 3 次和 4 次函数的求根公式，但对于高于 4 次的函数，类似的努力却一直没有成功，到了十九世纪，根据阿贝尔(Abel)和伽罗瓦(Galois)的研究，使人们认识到高于 4 次的代数方程不存在求根公式，亦即，不存在用四则运算及根号表示的一般的公式解. 同时，即使对于 3 次和 4 次的代数方程，其公式解的表示也相当复杂，一般来讲并不适宜作具体计算. 因此对于高次多项式函数及其他的一些函数，有必要寻求其零点的近似解的方法，这是一个在计算数学中十分重要的课题.

给定精度 ε，用二分法求方程 $f(x)=0$ 的近似解的步骤如下：

(1)确定有解区间 $[a,b]$〔验证 $f(a)\cdot f(b)<0$〕，给定精度 ε.

(2)求区间 $[a,b]$ 的中点 x_1.

(3)计算 $f(x_1)$.

①若 $f(x_1)=0$，则 x_1 就是方程的解；

②若 $f(a)\cdot f(x_1)<0$，则令 $b=x_1$〔此时方程的解 $x_0\in(a,x_1)$〕；

③若 $f(x_1)\cdot f(b)<0$，则令 $a=x_1$〔此时方程的解 $x_0\in(x_1,b)$〕.

(4)判断是否达到精度 ε，即若 $|a-b|<\varepsilon$，则取新的有解区间的中点为方程的近似解；否则重复步骤(2)～(4).

用二分法求方程近似解，其基本算法思想是：将方程的有解区间平分为两个小区间，然后判断解在哪个小区间；继续把有解区间一分为二进行判断，如此周而复始，直到求出满足精度要求的近似解.

【示例 1】用二分法设计一个求方程 $x^2-3=0$ 的正近似解的算法(设所求近似解与精确解的差的绝对值不超过 0.005).

思路分析：二分法求方程的近似解不仅适用于一元二次方程，还可应用于求高次方程、指对数方程的实数根的近似解，其操作步骤和本例类似，不妨回顾必修 1 中的一些例题，用算法来进行书写.

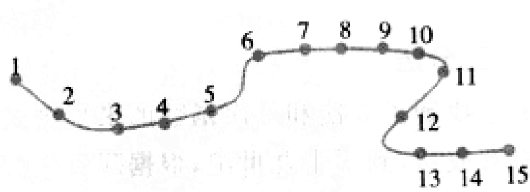
解：第一步，令 $f(x)=x^2-3$，因为 $f(1)<0$，$f(2)>0$，所以设 $x_1=1$，$x_2=2$.

第二步，令 $m=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，判断 $f(m)$ 是否为 0. 若是，则 m 为所求；若不是，则继续判断 $f(x_1)\cdot f(m)$ 大于 0 还是小于 0.

第三步，若 $f(x_1)\cdot f(m)>0$，则令 $x_1=m$；否则，令 $x_2=m$.

第四步，判断 $|x_1-x_2|<0.005$ 是否成立？若是，则 x_1、x_2 之间的任意值均为满足条件的近似解；若不是，则返回第二步.

【示例 2】从上海到美国旧金山的海底电缆有 15 个接点，现在某接点发生故障，需及时修理，为了尽快断定故障发生点，一般至少需要检查几个接点？



思路分析：如果沿着线路一小段一小段地查找显然比较麻烦，因此可以采取二分法逐步缩小范围进行查找. 这种检查的方法每查一次，可以把待查的线路长度缩减一半，极大地提高了检查的效率.

解：第一步，先从 8 号接点查起，用仪器向两端测试.

第二步，若发现前半段正常，那么可断定故障在后半段.

第三步，再由后半段的 11 或 12 点查起，即可断定故障发生点所在的范围.

这样每查一次，就可以把待查的线路长度缩小一半，故至少需要检查三个接点.

这是采取逐步缩小范围的办法找故障，范围越小越容易查找发生故障的电缆线路.通过这个例子告诉我们，数学学习应重视思维能力的培养，学会举一反三，尽可能地将我们所学的知识运用到实际生活中去，真正做到学以致用.

高手支招② 归纳整理

本节的学习目标是初步建立算法的概念，通过丰富的实例了解算法的含义，学习用算法步骤和程序框图表达算法的方法，初步感受算法的思想.本节着重解决两个问题：(1)算法是怎样的？(2)怎样表达算法？

- 算法
  - 算法的引入
  - 算法的概念
  - 算法的基本特征
    - 有限性
    - 确定性
    - 有效性
    - 普遍性
    - 不唯一性
  - 算法的应用

高手支招③ 综合探究

1.算法的特点

对于某个或某类问题，找到了某种算法，是指使用一系列运算规则能在有限步骤内求解某类问题，其中的每条规则必须是明确定义的、可行的.

算法从初始步骤开始，每一个步骤只能有一个确定的后继步骤，从而组成一个步骤序列，序列的终止表示问题得到解答或指出问题没有解答.

算法有以下几个特点：

(1)有零个或多个输入值：所谓输入是指在执行算法时需要从外界取得必要的信息，信息可以是一个，也可以有两个或两个以上，还可以没有输入.

(2)有一个或多个输出值：一般来说，算法应有一个或多个输出.算法的目的是为了求解，没有输出的算法是没有意义的.

(3)有限性：一个算法在执行有限个步骤后必须结束.

“有限性”应在合理的范围之内.如果让计算机执行一个历时 1 000 年才结束的算法，这虽然是有限的，但超过了合理的限度，人们也不把它视作有效算法.“合理限度”一般由人们的常识和需要以及计算机的性能而定.

(4)确定性：算法的每一个步骤和次序应当是确定的.

例如，某健身操中一个动作“手举过头顶”，这个步骤就是不确定的，含糊的.是双手都举过头？还是左手？或右手？举过头顶多少厘米？不同的人可以有不同的理

解. 算法中的每一个步骤不应产生歧义，而应当是明确无误的.

(5)有效性：算法中的每一步都应当能有效地执行，并得到确定的结果. 例如，若 $n=0$ 时，执行 $\frac{m}{n}$ 是不能有效执行的.

(6)一般性：算法一般要适用于输入值集合中不同形式的输入值，而不是局限于某些特殊的值，即算法具有一般性. 一个算法总是针对某类问题设计的，所以对于求解某类问题中的任何一个问题都应该是有效的. 就是说，这类问题中的任何一个在使用该算法处理时，都能正确地给出结果.

(7)不唯一性：解决一个问题或一类问题，可以有不同的方法和步骤. 例如解方程 $x^2-2x-3=0$ 可以采用十字相乘法进行因式分解得 $(x+1)(x-3)=0$；也可以进行配方得 $(x-1)^2=4$，再开方解决；还可以利用求根公式解决等. 当然，各种方法有优劣之分，为了有效地进行计算，应当选择合适的算法. 我们认为，计算机容易实现的算法就是优秀的算法.

2. 一个好的算法应该满足的标准

实际问题和算法理论中，找出好的算法是一项重要的工作. 算法就其本质来讲，就是一种解决问题的方法，只不过更具有程序化罢了. 我们可以根据自己的经验思考一个好的解决问题的方法应该具有哪些特点，然后看这些特点在算法上都应该有什么样的体现，就可以回答这个问题了.

正如所有的好的解决问题的方法必须是正确的一样，一个好的算法首先必须是正确的. 正确性对不同的事情有着不同的含义. 对于算法来讲，正确性包含如下几个层次：

(1)算法不能含有语法错误，否则算法不能正常执行；

(2)算法对于精心选择的典型、苛刻而带有刁难性的几组输入数据能够得出满足要求的结果；

(3)算法对于一切合法的输入数据都能产生满足要求的结果.

其次，容易想到一个好的解决问题的方法应该是思路清晰，让人容易理解的，这样就可以让更多的人掌握这个方法. 同理，写出的算法要具有可读性，格式要工整、规范，思路要清晰、准确，以便和其他的人更好的交流、合作.

此外，我们做事还要考虑这件事需要花费的时间和占用的空间. 一般来讲，花费时间和占用空间少的方法会更好. 同样的，算法也有效率高与低的需求. 效率指的是算法执行时间. 对于解决同一问题的多个算法，执行时间短的算法效率较高.

高手支招④典例精析

一、基础知识巩固

【例 1】写出求 $1+2+3+4+5+6$ 的一个算法.

思路分析：可以按逐一相加的程序进行，也可以根据加法运算律简化运算过

程,还可以利用公式 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$进行.

▶ **解**:方法一:

第一步,计算 1+2,得到 3.

第二步,将第一步中的运算结果 3 与 3 相加,得到 6.

第三步,将第二步中的运算结果 6 与 4 相加,得到 10.

第四步,将第三步中的运算结果 10 与 5 相加,得到 15.

第五步,将第四步中的运算结果 15 与 6 相加,得到 21.

方法二:

第一步,将原式变形为 $(1+6)+(2+5)+(3+4)=7\times3$.

第二步,计算 7×3.

第三步,得到运算结果.

方法三:

第一步,取 $n=6$.

第二步,计算$\frac{n(n+1)}{2}$.

第三步,得到运算结果.

▶ **点评**:方法一是最原始的方法,最为繁琐,步骤较多,当加数较多,比如 $1+2+\cdots+100$ 时,用这种方法就显得笨拙了;方法二与方法三都是比较简捷的算法,但相比较而言,方法三更为简单,而且不管加数多么多,如 $1+2+\cdots+1\ 000\ 000\ 000$ 都容易在计算机上执行.

【例 2】有蓝和黑两个墨水瓶,但现在却错把蓝墨水装在了黑墨水瓶中,黑墨水错装在了蓝墨水瓶中,要求将其互换,请你设计算法解决这一问题.

▶ **思路分析**:由于两个墨水瓶中的墨水不能直接交换,故可以考虑通过引入第三个空墨水瓶的办法进行交换.

▶ **解**:算法步骤如下:

第一步,取一只空的墨水瓶,设其为白色.

第二步,将黑墨水瓶中的蓝墨水装入白瓶中.

第三步,将蓝墨水瓶中的黑墨水装入黑瓶中.

第四步,将白瓶中的蓝墨水装入蓝瓶中.

第五步,交换结束.

▶ **点评**:对于这种非数值性问题的算法设计问题,应当首先建立过程模型,根据过程设计步骤,完成算法.

【例 3】给出求解方程组$\begin{cases}3x+2y=8,①\\4x+5y=13②\end{cases}$的一个算法.

▶ **思路分析**:方法一利用代入法求解,方法二利用加减消元法求解,方法三利用消元回代法求解.

▶ **解**：方法一：

第一步，由①得 $3x=8-2y$，即 $x=\frac{8}{3}-\frac{2y}{3}$. ③

第二步，将③代入②，整理得 $7y=7$. ④

第三步，解④，得 $y=1$.

第四步，将 $y=1$ 代入③，得 $x=2$.

方法二：

第一步，②×3－①×4，得 $7y=7$. ③

第二步，解③，得 $y=1$.

第三步，将 $y=1$ 代入①，得 $x=2$.

方法三：

第一步，方程①不动，将方程②中 x 的系数除以方程①中 x 的系数，得到乘数 $m=\frac{4}{3}$.

第二步，方程②减去 m 乘以方程①，消去方程②中的 x 项，得到 $\begin{cases}3x+2y=8,\\ \frac{7y}{3}=\frac{7}{3}.\end{cases}$

第三步，将上面的方程组自下而上回代求解，得到 $y=1$，$x=2$.

▶ **点评**：由此例推广，我们可以得到求解二元一次方程组的一般算法：

$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,①\\ a_2x+b_2y=c_2,②\end{cases}$ 其中 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$.

第一步，②×a_1－①×a_2，得 $(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1$. ③

第二步，由③，得 $y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$. ④

第三步，将④代入①，得 $x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}$.

第四步，写出方程组的解 $x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}$，$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$.

【例 4】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x-2,x<3,\\ x^2-x-5,x\geqslant 3,\end{cases}$ 设计一个算法求函数的任一函数值.

▶ **思路分析**：该函数为分段函数，在不同区间上的函数解析式不同，函数值与自变量的范围有关，必须讨论自变量与 3 的关系.

▶ **解**：第一步，给定一个数 x.

第二步，若 $x<3$，则执行第三步；若 $x\geqslant 3$，则执行第四步.

第三步，计算 $f(x)=x-2$，得到 $f(x)$.

第四步，计算 $f(x)=x^2-x-5$，得到 $f(x)$.