微積分學講義

中華民國八年七月初版
中華民國二十二年五月國難後第一版
中華民國二十四年七月國難後第三版

(522283)

微積分學講義一册

每册定價大洋貳元肆角
外埠酌加運費匯費

編譯者　匡文濤
校訂者　壽孝天
發行兼印刷者　商務印書館　上海河南路
發行所　商務印書館　上海及各埠

◆○二四六六

微分學講義原緒言

著者當起本書之稿時。本期作一通俗易解之微分講義。此非今日最要求者乎。而此事之難。實有出乎意料以外者。故作稿愈多。而自歎力微亦愈甚。順是爲之。遂成此書。

理論缺嚴密。在本書趣旨固爲當然。而又不能敝蹝之者。則著者之病也。例如「無限制之大」。不能安於「無限大」。故作「比甚大數更大」。又深慮甚大云云之觀念。人各不同。且恐「比任何大數更大」一語。更不透徹。故終作「比任何數更大之數曰無限大」。以爲界說。諸如此類。均與通俗易解之旨。互相僢馳。

雖然。反覆思之。是非高等數學之一端乎。世之習高等數學者。如此之點。稍注意焉。則著者之所切望也。

微分學之本體。唯在研究微分法及由微分法所得之微係數。級數及極大極小等。不過屬之應用。倘僅欲知微分及微係數之所謂 $\dfrac{dy}{dx}$ 者。則讀本書最初四編足矣。

際今日文運駸進之盛。國文自有之微積分書亦屬不少。先輩所著。固無俟推讚。然即予拙著之一小册。亦自有其特色在。此可自信者也。

本書級數一編。如普通德人之書。就不與代數重複之範圍內。自收斂之檢定說起。又平面曲線上微分之應用。常例置諸微分學之後。而本書則更列舉著名之平面曲線一編。以爲曲線追跡之例。並記其應用最廣之性質。之一端者。殆亦本書之特色歟。

編幅之限制。與著者之習慣。往往不知不覺。混入於省筆略算之處不少。法學專家。語及「債權者」「債務者」時。常告吾人。謂以「權」爲甲以「務」爲乙而直譯之。則大意瞭然。由是觀之。數學本稱專門。今強稱爲通俗。或實爲不可能之事歟。

讀者諸君。倘因拙著而微有所獲。則著者至以爲榮也。

明治四十四年夏　　根津千治識

積分學講義原緒言

本書係繼本叢書之微分學。而以簡明方法。講述積分學及其應用者也。

因之本書往往避嚴密之理論。而致力於幾何學力學等之應用方面。且於彼特種之定積分等。多從省略。而於微分方程式。記述特詳。此卽其第一事實也。

曲面及空間曲線之應用。其於微分學中所遺略者。均論及之。微分方程式問題中。多舉力學問題。其中如解追跡曲線惑星運動等。則亦本書所自負之一端也。又最後設變分法一章。論述極小回轉面及最速落著線者。亦信其於斯學研究上稍有裨益故也。

本書於先輩著書。多所採擇。固不待言。

讀者諸君。因拙著而獲得積分學之要領。則本書至以爲榮也。

明治四十四年　　根津千治識

微積分學講義勘誤表

頁數	行數	原文	訂正
39		圖中曲線上右之P字	應改爲 P_1
46	12	$y=arc\ tg\ x$ 之右補數語以便閱者	
		(譯注) arc 德法用以記反三角函數與英美所用之 -1 號同本書兩種符號均用之又 tg 之符號與 tan 同	
71	5	試將此而……	試將此式而……
83	13	$\cdots-W_1$	$\cdots-W_l$
	14	$-S''_1$	$-S''_l$
	15	$-Lim\ S''_1$	$-Lim\ S''$
		上三行原文之 l 與 1 最易混淆	
183	1	亦使用	使用
199	12	$=cot^{-2}x$	$=cot^{-1}x$
213	1	若 $m\leqq n$	若 $m\geqq n$
	5	則假定 $m<n$	則假定 $m>n$
225	2	$f\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{a'x+b'}},dx\right.$	$f\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{a'x+b'}}\right)dx$
	8	$-\int\frac{dx}{z^2+z+1}$	$-\int\frac{dz}{z^2+z+1}$
235	5	$6\int z^9(\quad)^{-\frac{1}{3}}dz$	$6\int z^{14}(\quad)^{-\frac{1}{3}}dz$
249	9	$\int z^4(1-z^2)dx$	$\int z^4(1-z^2)dz$
260	11	$=\phi_2\{\quad\}\int^\beta\phi_1(x)dx$	$=\phi_2\{\quad\}\int_a^\beta\phi_1(x)dx$
261	5	$<\int^a$	$<\int_o^a$
270	5	$\int^a x^n dx$	$\int_o^a x^n dx$
271	10	〔例〕 $7\int^x$	〔例〕 $7\int_o^x$
272	16	於 $\gamma,\delta)$	於 (γ,δ)
329	4	$=n\ logn+c$	$=n\ log\ x+C$
347	18	$1+p^2$	$1+p^3$

微積分學講義

上卷微分學

前篇本論

第一章 緒論

1. 數之分類。

數數時稱為幾個幾個之數。曰正整數。施四則之運算於正整數時為包括例外起見。再設負整數及分數(以0約之數尙省略)

正整數與負整數及分數。總稱之曰有理數(*Rational number*)。

由次於四則運算之開方法。又不得不設不盡根數及虛數(*Imaginary number*)。

其他如圓周率π亦為不盡數。因該數以小數表之。只能表其近似值。故云不盡。

實則不盡數(含不盡根數)者。可作得一分數。(小數係其特別者)與此數之差。能比任何數更小之數之謂也。

不盡數一稱無理數(*Irrational number*)。有理數與無理數。總稱之曰實數(*Real number*)。與此對待之數為虛數。而在高等數學。於實數虛數以外。殆無導入新種類數之必要。然則實數虛數。於現今為最廣義之數也。

於一直線上取一點O。規定線分AO之他端A。為與一實數a相對應之點。則

凡實數皆得令與直線之點相對應。又直線上之一切點。皆得令與實數相對應。

此解析學與幾何學相關連之第一步也。直線上之點有連續性(*Continuity*)。同時實數亦有連續性。

以直線上之點表實數時。其定點O稱原點(*Origin*)。又$a=1$。則OA為一單位之長。因之OA規定適宜之單位。則就與實數x相對應之點P言之。OP之長必為單位之x倍。

此等規約。以下略而不言。

[注意]　數之分類。為最有興味之基礎數學之一分科。其精密之研究。應取 *Stolz, Hankel, Dedekind* 等所著之書觀之。

2. 變數及常數。

於一事件。某量(*Quantity*)得以數表之。其所表之數名為其量之數值(*Numerical value*)。數值之研究。乃以該事件為數學之一問題者也。然攷其事件之進行。則其數值於進行中。可分為變與不變二種。

其變者曰變數(*Variable*)。不變者曰常數(*Constant*)。

通常表此等之記號

在變數用$x, y, z, \ldots\ldots;\ \xi, \eta, \epsilon, \ldots\ldots$

在常數用$a, b, c, \ldots\ldots;\ \alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$

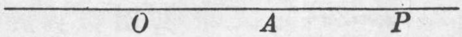
變數亦得為虛數。但茲限定以論實數值為主。

實數值之變數。一名實變數(*Real variable*)。但依前限以免紛歧。略稱變數。

[例]　從一直線上之定點A。以一定之速度a(每秒)。在此直

線上之同方向行等速運動。得其點P。關於A而與P反對之方向有b距離之定點O。

則x秒之後OP之距離y。可以次式表之。



$$y=ax+b.$$

就此例考之。a, b為常數。x為變數。而y亦為變數。

3. 連續變數及其區域。

變數在α, β $(\alpha<\beta)$ 二數之間。得順次占得實數。則自α至β之區域 (*Interval*) 內。稱為連續變數 (*Continuous variable*)。

表示「自α至β」之區域。以 (α, β) 及 $\alpha \leqq x \leqq \beta$。其區域亦得以直線上之線分表之。

於某區域內。若非連續變數。則稱其區域內為不連續 (*Discontinuous*)。

4. 函數。

於一區域(α, β)內。由一變數x之各值。常得確定他變數y之值。則於區域(α, β)內稱y為x之函數 (*Function*)。

此種關係。以 $y=f(x)$, $y=\psi(x)$ 等表之。

此處之x。稱自變數 (*Independent variable*)。其y稱被變數 (*Dependent variable*)。

要之函數與被變數。同一物也。換言之。函數之變數。即為被變數。

〔例〕就$y=ax+b$。其a, b為常數。x在某區域內變化。則x為自變數。而y為被變數。換言之。y為x之函數。

於(α, β)一區域內。對於自變數x之各值。y常得惟一之確定值。則於(α, β)區域內。y稱為x之一價函數 (*One-valued function*)。若y常得二確定值。則稱二價 (*Two-valued*)。二價以上。準此命名。又二價及二價以上。一般稱為多價 (*Many-valued*)。

〔例〕1. $y=4x^2$ 於任何區域內 y 爲 x 之一價函數。∵ $x=0$ 則 $y=0$, $x=1$ 則 $y=4$, $x=2$, 則 $y=16$,...

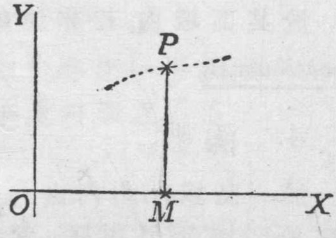
〔例〕2. $y^2=3x+1$。試求其函數 y。於 $x\geqq-\frac{1}{3}$ 區域內。常爲二價函數。例如 $x=\frac{1}{3}$ 則 $y=\pm\sqrt{2}$, $x=1$ 則 $y=\pm2$,... 而 $x=-\frac{1}{3}$ 則 $y=0$。∴如題言。

〔例〕3. 於 $y=f(x)$。其 $f(x)$ 爲 $3x^2+2x+1$ 之記號。則 $f(0)$, $f(1)$ 是何意義。

(解) $f(0)=3\times0^2+2\times0+1=1$,

$f(1)=3\times1^2+2\times1+1=6$.

有 OX, OY 二直線。互相直交。令 OX 上之點 M。表 x 之值。($OM=x$)。從此點引 OY 之平行線。表 y 之值。($PM=y$)。則點 P 之坐標。爲變數 x 與函數 y 之對應值。今與 x 以諸值則 y 亦得確定之值。P 之坐標變易。可得點羣。



5. 函數之形式。

x 之函數 y 多爲 $y=f(x)$ 之形式。然 x, y 往往有相混淆於一方程式之內者今以 $F(x, y)=0$ 表示之。解此方程式。得視作 $y=f(x)$ 之形式。因之方程式 $F(x, y)=0$ 之 y。一般爲多價函數。而於此形式之 y。曰 x 之陰函數 (*Implicit function*)。

與此對照。$y=f(x)$ 形式之 y。曰 x 之陽函數 (*Explicit function*)。

〔例〕 $x^2+y^2=a^2$。其 y 爲 x 之陰函數。試解原式爲 $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$。則 y 爲 x 之陽函數。即普通之形式。

6. 函數之分類。

令 $F(x, y)=0$ 爲有理整方程式。則稱滿足此式之 y 爲 x 之

代數函數(*Algebraic function*)。特此方程式爲y之一次式。則得

$$uy+v=0.\ (u, v \text{僅爲} x \text{之有理整式})。$$

若u不含x。則u視爲常數可也。由是當有下式之形。

$$y=-\frac{v}{u}=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n.$$

此爲x之有理整函數(*Rational integral function*)。

若u爲x之m次有理整式。則

$$y=-\frac{v}{u}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}.$$

此稱x之有理分數(*Rational fraction*)。

有理整函數及有理分數。總稱之曰有理函數。

與此相反之代數函數。曰無理函數(*Irrational function*)。

代數函數以外其他之函數。曰超越函數(*Transcendental function*)。超越函數。其種類不能限制。然次之四種。乃應用最廣者。是名初等超越函數。

(1)　指數函數(*Exponential function*)

$y=a^x$　　但$a>0$

(2)　對數函數(*Logarithmic function*)

$y=\log x$

(3)　三角函數(*Trigonometric function*)

$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x$, 等

(4)　圓函數(*Cyclometric functions*)

$y=\arc\sin x$　又$=\sin^{-1}x.$

$y=\arc\cos x$　又$=\cos^{-1}x.$

$y=\arc\tan x$　又$=\tan^{-1}x$等。

7.　逆函數。

於(α, β)區域內。$y=f(x)$之函數y。其各確定值亦爲連續變數

在 (A,B) 區域內。可占得各實數值。則 y 可作自變數觀。是 x 爲 y 之陰函數。從此得 $x=\psi(y)$。則 x 在於 (A,B) 區域內爲 y 之函數。此爲 $y=f(x)$ 之逆函數 (*Inverse function*)。

〔例〕 從 $y=a^x$ $(a>0)$ 得 $x=log_a y$ $(y>0)$。此於任何區域內。其指數函數與對數函數。互爲他之逆函數。又從 $y=\sin x$ 得 $x=\sin^{-1}y$。令 $-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ 及 $-1\leqq y\leqq 1$。則無論何者。均爲一價函數。且互爲他之逆函數。

8. 極限值。

變數 x 順次變易其值漸近於一確定值 a 時。x 與 a 之差之絕對值(此以 $|x-a|$ 表之) 能令比任何之數更小。則 a 稱爲 x 之極限值 (*Limiting value*)。又稱 x 收斂 (*to converge*) 於極限值 a。或稱 x 歸着於極限值 a。以 $Lim\, x=a$ 表之。

然 x 若經過比 a 較小之數歸着於此。則須 $Lim\, x=a-0$ 表之。

變數 x 收斂於極限值 a 時。同時 x 之函數 y。亦收斂於他之確定值 b。

此以下式表之。

$$\underset{\mathrm{Lim}\, x=a}{Lim}\, y=b \quad 又 \quad \underset{\mathrm{Lim}\, x=a\pm 0}{Lim}\, y=b\pm 0.$$

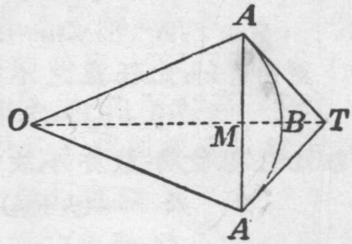
欲避其繁。特簡略書之如次。

$$\underset{x=a}{Lim}\, y=b \quad 又 \quad Lim\, y=b.$$

〔例〕1. $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$。此 x 突然爲 1。則原式爲 $\dfrac{0}{0}$。是無意義。若 x 不爲 1。則約分之爲 $\quad y=x+1.$

此 x 雖不爲 1。若與 1 極近。則極限值必收斂爲 1。因之 y 之極限值爲 2。即 $\quad \underset{x=1}{Lim}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2.$

〔例〕2. $\underset{x=0}{Lim}\frac{\sin x}{x}$。此$\frac{\sin x}{x}$之$x$突然爲0。則$\frac{\sin x}{x}$爲$\frac{0}{0}$。然於單位之半徑之圓。令$\widehat{AA}$比半圓周小。



則　$\overline{AA}'<\widehat{ABA}'<\overline{AT}+\overline{A'T}$,

卽　$2\overline{AM}<2\widehat{AB}<2\overline{AT}$.

令$\widehat{AB}=x$, 則$AM=\sin x$, $AT=\tan x$。

$$\sin x<x<\tan x.$$

以$\sin x$約之。則

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}.$$

然　$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x.$$

令此與1相減則

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x.$$

卽　$$0<1-\frac{\sin x}{x}<2\sin^2\frac{x}{2}.$$

然　$$\sin\frac{x}{2}<\frac{x}{2},$$

而　$$0<1-\frac{\sin x}{x}<\frac{x^2}{2}.$$

此x收歛爲0。則$\frac{x^2}{2}$亦收歛爲0。

然$1-\frac{\sin x}{x}$亦當收歛爲0。卽$\frac{\sin x}{x}$收歛爲1。

$$\therefore\quad \underset{x=0}{Lim}\frac{\sin x}{x}=1.$$

9. 關於極限值之定理。

x之二函數設爲$y_1=f_1(x)$, $y_2=f_2(x)$。令$x=a$。其極限值收歛爲b_1, b_2。則有次之定理。

(I) 二個變數之極限值之和。等於變數之和之極限值。

(證明) ϵ_1, ϵ_2 為任何小數。從極限值之定義。得

$$|y_1-b_1|<\epsilon_1, \quad |y_2-b_2|<\epsilon_2$$

更令 $\epsilon_1+\epsilon_2$ 比任意之小數 ϵ 亦小。則

$$|(y_1+y_2)-(b_1+b_2)|<\epsilon$$

即比任意之小數亦小。故得

$$Lim\,(y_1+y_2)=b_1+b_2.$$

$$\therefore \quad Lim\,y_1+Lim\,y_2=Lim\,(y_1+y_2).$$

(II) 二個變數之極限值之積。等於變數之積之極限值。

(證明) 試用前之記號。則

$$|y_1y_2-b_1b_2|=|y_1y_2-b_1y_2+b_1y_2-b_1b_2|$$
$$<|y_1-b_1||y_2|+|y_2-b_2||b_1|$$
$$<\epsilon_1|y_2|+\epsilon_2|b_1|$$

然 ϵ_1, ϵ_2 如 $\epsilon_1|y_2|+\epsilon_2|b_2|<\epsilon$ (任意之小數) 則從此得 $|y_1y_2-b_1b_2|<$

即 $$Lim\,y_1y_2=b_1b_2$$

$$\therefore \quad Lim\,y_1\,Lim\,y_2=Lim\,y_1y_2.$$

(III) 二個變數之極限值之商。等於變數之商之極限值。

(證明) $$\left|\frac{y_1}{y_2}-\frac{b_1}{b_2}\right|=\frac{|y_1b_2-y_2b_1|}{|y_2b_2|}=\frac{|y_1b_2-b_1b_2+b_1b_2-y_2b_1|}{|y_2b_2|}$$
$$<\frac{|y_1-b_1||b_2|+|y_2-b_2||b_1|}{|y_2b_2|}$$
$$<\frac{\epsilon_1|b_2|+\epsilon_2|b_1|}{|b_2|(|b_2|-\epsilon_2)}.$$

然如 $\dfrac{\epsilon_1}{|b_2|-\epsilon_2}<\dfrac{\epsilon}{2}$, $\dfrac{\epsilon_2|b_1|}{|b_2|(|b_2|-\epsilon_2)}<\dfrac{\epsilon}{2}$ 以定 $\epsilon_1\,\epsilon_2$.

得 $$\left|\frac{y_1}{y_2}-\frac{b_1}{b_2}\right|<\epsilon.$$

$$\therefore \quad Lim\frac{y_1}{y_2}=\frac{b_1}{b_2}.$$

$$\therefore \quad \frac{Lim\,y_1}{Lim\,y_2}=Lim\frac{y_1}{y_2}$$ (但除去 $Lim\,y_2=0$).

10. 無限大無限小。

變數x之絕對值能比任何正數更大。則稱x為無限(*Without limit*)增大。或無限減小。又稱極限值的無限大(*Infinity or Infinitely great*)。或稱「x成無限大」。以∞表之。卽 $\operatorname{Lim} x=\infty$。

∞為一般無限增大之正數量與無限減小之負數量併用之記號。然有時必加$+\infty$, $-\infty$及$\pm\infty$之號以區別之。

∞為示比任何之正數更大。又比任何之負數更小之記號。並非一定之値。

變數x以0為極限値而收歛時。則稱x為無限小(*Infinitesimal or Infinitely small*)。此以下式表之。 $\operatorname{Lim} x=0$.

無限小與$-\infty$。不可誤解。又無限小不可與絕對的零$(a-a)$混同。

蓋無限小乃表收歛於極限値0之記號。而非數値。

無限小亦有$+0$, -0, ± 0之區別。

本節x之變數。無論自變數,因變數均同。

〔例〕1. $\operatorname{Lim}_{x=1}\dfrac{1}{1-x}$. x收歛為1。則能令$\dfrac{1}{|1-x|}$比任何之正數更大。

例如令比任意正數K更大。則從

$$\frac{1}{1-x}>K \quad \text{得} \quad x>\frac{K-1}{K}$$

卽x如上式取之足矣。

$$\therefore \quad \operatorname{Lim}_{x=1}\frac{1}{1-x}=\infty.$$

詳言之。x經過僅比1更小之數。而近於1。則為$+\infty$。經過僅比1更大之數而近於1。則為$-\infty$。

〔例〕2 $1-0.\dot{9}$為無限小。何則。欲令比$\epsilon=0.00001$更小。則取$1-0.999999$足矣。欲令比$\epsilon=0.0000001$更小。則取$1-0.99999999$足矣。故得令其差比任何之數更小。而$0.\dot{9}$決不為1故也

11. 無限小及無限大之位置。

令二個變爲無限小之變數爲y_1, y_2則

$$Lim\, y_1=0, \qquad Lim\, y_2=0.$$

然y_1, y_2收斂於極限值時。亦有遲速緩急之差。

例如小數y_1^2比較y_1收斂爲0甚急速。此可由檢$y_1^2 : y_1$之比值爲y_1之小數知之。故有二個變數。欲計其變爲無限小之遲速。則取商之極限值$Lim\dfrac{y_1}{y_2}$可也。其法分敘如次。

(I) $\underline{Lim\dfrac{y_1}{y_2}}$爲0以外之有限值。

此y_1, y_2稱同位(*Same order*)之無限小。

(II) $\underline{Lim\dfrac{y_1}{y_2}=0}$。

此y_2比y_1稱高位(*Higher order*)之無限小。

(III) $\underline{Lim\dfrac{y_1}{y_2}=\infty}$。

此y_2比y_1稱低位(*Lower order*)之無限小。

位亦可以適宜之數字表之。如y_1爲第一位(*First order*)。若$Lim\dfrac{y_1}{y_2}$爲0以外之有限值。則y_2當爲第一位之無限小。

若$Lim\dfrac{y_1}{y_2}$爲0叉爲∞。且定$Lim\dfrac{y_1{}^n}{y_2}$爲0以外之有限值n。則y_2稱爲第n位(n^{th} *order*)之無限小。

普通稱$Lim\, x=0$爲第一位無限小。其他與此對照。宜呼爲第幾位無限小。可以知之。

無限大若爲第n位無限小之逆數。故由上之規定。稱「第n位無限大」。

〔例〕1. $\displaystyle\lim_{x=0}\frac{\sin x}{x}=1$〔第8節例2〕。

故$\sin x$與x爲同位無限小。故$\displaystyle\lim_{x=0}\sin x$爲第一位無限小

〔例〕2. $\displaystyle\lim_{x=0}(1-\cos x)=0, \qquad Lim\, x=0$。

然 $$\lim_{x=0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x=0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x=0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x=0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\lim_{x=0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}.$$

故 $\lim\limits_{x=0}(1-\cos x)$ 爲第二位無限小。

〔例〕3. $\lim\limits_{x=0}\cot x=\infty$, $\lim\limits_{x=0}\frac{1}{x}=\infty$。

因就其各逆數爲

$$\lim_{x=0}\frac{\frac{1}{\cot x}}{x}=\lim_{x=0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x=0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x}$$

$$=\lim_{x=0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x=0}\frac{1}{\cos x}=1\times1=1$$

故 $\cot x$ 與 $\frac{1}{x}$ 爲同位無限大。卽第一位之無限大。

12. 函數之連續。

於 (α,β) 區域內。x 爲連續變數。y 亦爲連續變數。則於 (α,β) 區域內。稱 y 爲 x 之連續函數 (*Continuous function*)。

一函數欲檢查其爲連續函數與否。可就其區域內各點檢查之。今設 x 在某區域內有 a 之一値。x 經過 a 時。若其函數 $y=f(x)$ 亦經過 $f(a)$ 而爲連續變數。則與 $a-|h|, a, a+|h|$ (任何區域內之値) 三値相對應之 $f(a-|h|), f(a), f(a+|h|)$。在 $\lim h=0$ 時。非均收斂爲 $f(a)$ 不可。由是得連續查定之法則如次。

$$y=f(x)$$

若經過$x=a$時爲連續。則令

$$|f(a+h)-f(a)|<\epsilon.$$

任意之正數ϵ設能存立。而與此相應。非有$|h|\leqq\delta$之正數δ不可。否則不能爲 $\lim\limits_{h=0} f(a+h)=f(a)$ 故也。

反之。與以任何之正數ϵ爲

$$|f(a+h)-f(a)|<\epsilon,\quad |h|\leqq\delta.$$

如能決定如此之正數δ。則$f(x)$經過$x=a$時爲連續。

何則。因$\lim|f(a+h)-f(a)|=0$。即$\lim f(a+h)=f(a)$故也。

故x經過a時。其函數y爲連續。簡稱之曰y於$x=a$時連續。

如上之檢定於某區域內各點施行之。若施行此法則。有不適用之點。則謂函數在該點爲不連續。其點稱不連續點(*Discontinuous point*)。

初等函數(即代數函數,初等超越函數,及其他函數之總稱)中不連續點。常孤立存在。其種類之重要者有三。列舉如次。

(I) 無限大之不連續點。

於$x=a$之點。若$y=f(x)=\infty$。則與連續變數之定義相背戾。又與前記之查定法則不合。

〔例〕1. $y=\dfrac{1}{x-a}$.

於$x>a$及$x<a$之區域內。y雖爲連續函數。而若於$x=a$之點。則爲 $\lim\limits_{x=a} y=\infty$.

但 $\lim\limits_{x=a-0} y=-\infty,\quad \lim\limits_{x=a+0} y=+\infty$.

〔例〕2. $y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$.

於$x=1$之點爲$\lim\limits_{x=1} y=\infty$。詳表之爲$\lim\limits_{x=1\pm0} y=+\infty$.

(II) 飛變之不連續點。

x經過比a小之值。而漸近於a時。y雖收斂爲b。x若經過比a大之值而漸近於a。有時y收斂爲b_1。