YINGYONG SHUXUE

应用数学
物理方程

WULI FANGCHENG

吴介儒 陈水利 编著

武汉工业大学出版社

应用数学物理方程

吴介儒　　陈水利　编著

武汉工业大学出版社
·武　汉·

内 容 提 要

本书是根据工科研究生应用数学物理方程课程教学基本要求，在作者多年来教学实践经验及科研成果的基础上充实修改而成的，经原国家教委工科研究生数学课程指导小组评审推荐出版作为工科研究生教学用书。

本书着重介绍了求解数学物理问题的方法。全书共七章。内容包括：导出三类典型偏微分方程及定解条件，三类方程的经典解——分离变量法、积分变换法、行波法和格林函数法，二阶线性偏微分方程的分类与小结，偏微分方程数值解等。

本书内容丰富而系统，概念清楚，理论适度，重点突出，注重应用，符合工科的特点。不仅可作为工科研究生教材，也可供高年级大学本科生选学其中部分内容之用，还可以作为工程技术人员和科技工作者的自学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

应用数学物理方程／吴介儒，陈水利编著. ——武汉：武汉工业大学出版社，1999.8
ISBN 7-5629-1508-3

Ⅰ. 应…
Ⅱ. ①吴… ②陈…
Ⅲ. 数学物理方程
Ⅳ. O175. 24
中国版本图书馆 CIP 数据核字（99）第 38948 号

武汉工业大学出版社出版发行
（武昌珞狮路 122 号 邮编：430070）
各地新华书店经销
武汉测绘院地图印刷厂印刷
＊＊＊
开本：787×1092 1/16 印张：19.5 字数：487 千字
1999 年 8 月第 1 版 1999 年 8 月第 1 次印刷
印数：1—1100 册
定价：29.00 元

序 言

世纪之交，科学技术发展突飞猛进，数学更显出极为重要的基础作用。“求木之长者，必固其根本；欲流之远者，必浚其源泉。”没有数学，就没有科学，也就没有技术。今天，新的数学思想、数学分支层出不穷，在实际应用中显示出其充沛的活力，科学计算已成为科学研究的三大支柱之一，而且还保持着强劲的发展势头。

数学物理方程是指从自然科学、技术科学和工程科学中所产生的偏微分方程，其内容浩瀚，发展迅速，是一门理论性强，与各学科联系密切且应用广泛的数学分支。这方面的知识对于当代工科研究生和大学生都是很重要的。通过对数学物理方程这门课程的学习，可为今后学习后继课程，进一步拓宽知识面，提高数学素质，适应知识经济的到来，以及为从事创新工作打下良好的基础。

本书是作者多年来为工科研究生和高年级本科生开设数学物理方程课程的讲稿基础之上，结合科研成果和教学中的实践经验，参照我国教育部工科研究生数学课程指导小组制定的“应用数学物理方程”课程的教学基本要求，进一步充实和修改而成的。首先，此书内容丰富而系统，对求解数学物理方程问题的常用方法都作了较详细的介绍，除了解析方法外，还介绍了一些常用的数值方法，特别是差分方法的内容更为丰富。其次，此书重点突出，考虑到了工科的特点，着重介绍了方法，理论部分只介绍了最必要的内容，做到了概念清楚，理论适度，注重应用。另外，对于一些抽象数学概念，如$\delta-$函数等，则多从实际背景引入，物理概

念明确，这也符合工科的特点。最后，此书除介绍经典方法外，还介绍了一些现代方法，为今后研究和阅读有关文献资料指明了方向，这是有远见的。我想此书是一本颇具特色的好书。正因如此，我愿为此书写这样一个短序，以表心意。

此书问世于我国教育改革大潮之时，我深信，该书对促进数学物理方程理论的研究和应用的普及，对工科教育改革将会起到积极的作用。读者将会从中汲取许多有益的知识，结合自己的实践，在理论研究和实际应用中推动数学物理方程的进一步发展。我还得知，作者恳切希望读者对此书不妥之处提出批评与指正。“金无足赤，人无完人”，书也无完书，《诗经》讲得好：“嘤其鸣矣，求其友声。”

谨为之序。

中国科学院院士
华中理工大学教授　　杨　叔　子

1999年2月5日于喻园

前 言

本书是根据教育部工科研究生数学课程指导小组1996年制定的“应用数学物理方程”课程的教学基本要求，在多年来为工科研究生和高年级本科生开设数学物理方程课程的讲稿基础之上，结合教学实践经验及科研成果，进一步充实和修改而成的。本书可供工科研究生作为必修或选修这门课程的教材，也可供高年级大学本科生选学其中部分内容之用，还可以作为工程技术人员了解这方面知识的自学参考书。对于从事数学工作的同志也有一定的参考价值。

本书考虑到工科的特点，着重介绍了求解数学物理问题的方法，理论部分只介绍了最必要的内容，论证适度，注重应用。全书共分为七章。第一章着重于从物理模型出发，建立数学模型，导出三类典型方程及定解条件。第二章至第五章以求解方法为主线，阐述三类典型方程的经典解法——分离变量法、积分变换法、行波法和格林函数法，并适当介绍一些现代偏微分方程的内容如δ-函数、基本解等。第六章是二阶线性偏微分方程的分类与小结，希望能通过它对数学物理方程有一个概括性的认识，同时还介绍了广义解的概念。第七章为偏微分方程数值解，主要讲的是有限差分方法，也粗略地介绍了有限元法。它们是当代工程技术领域中使用最多、最广泛的一种数值近似解法。另外，还通过调和方程狄里克莱问题的数值解，着重说明对偏微分方程定解问题解的概念的各种不同理解，也为数值解法提供了不同的出发点，导致不同的数值求解方法，以此强调数学物理方程的理论对其数值解法的指导作用。

本书前五章连同附录Ⅰ约用36～46个学时可以学完，学完全部内容则大约需要54～60个学时，可根据具体情况予以取舍。在编写本书时，把基点放在读者学过工科高等数学和计算方法等课程的基础上，尽量做到由浅入深、由易到难、由简到繁的循序渐进的原则，以便读者自学。另外，本书还配备有相当数量的习题供练习之用。

本书的全部插图及录入和排版工作由吴晓同志完成的。

作者要特别感谢中国科学院院士、华中理工大学博士生导师杨叔子教授，承蒙杨先生诲人不倦，并在百忙之中为本书作序。

本书承蒙陈庆益教授、刘家琦教授、应隆安教授和管平教授认真审阅，并提出了很宝贵的意见。在本书的编写过程中，还得到曹钟灵教授和任善强教授热情鼓励和帮助，在此谨表示衷心的感谢

本书的出版还得到武汉城建学院和江汉石油学院两院的领导、教务处、研究生处、基础科学系及数学教研室的领导和同志们的大力支持；武汉工业大学出版社编辑和工作人员为本书的出版付出了了艰辛的劳动，在此一并表示由衷的谢意！

限于作者水平，书中的疏漏、错误或不妥之处在所难免，恳切地希望同行和读者提出宝贵的意见，给予批评指正。

作　者

1999 年春

目　录

1　数学模型与定解条件

1.1　引　　言

所谓数学物理方程主要是指从物理学、力学和其他自然科学以及工程科学的研究中，所归结出来的偏微分方程（以及某些常微分方程和积分方程）。

偏微分方程的研究已经有了很长的历史。大约在微积分学产生不久，人们就设法把力学、物理学中的一些问题和规律，归结成偏微分方程，从而就开始有了关于偏微分方程的研究。在很长时间里，人们注意力的中心是物理问题中或几何学中的具体的个别的偏微分方程，这是十分自然的，因为许多物理的基本规律（如流体力学、弹性力学和电磁学等），其数学形式都是偏微分方程。这些来自物理的偏微分方程就是通常所说的数学物理方程。例如早在十八世纪初，人们就将弦线的横向振动问题归结成著名的弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

并研究了它的解法。因此数学物理方程是一门历史悠久的学科。由于它具有紧密地、直接地联系着许多自然现象的特点，不论是方程的归结，还是问题的提出都紧密地联系于所考察的物理模型，不少的求解方法及解的性质等等也都或多或少地可以从相应的物理模型中得到启示，而最后所得的解或所阐明的解的性质也要应用于具体的问题，并同时经受检验。因此，生产和科学技术的发展所提出的新课题和新方法又不断地丰富和更新它的研究内容，也促进着许多相关联的数学分支的发展，并从它们之中引进许多解决问题的有力工具。所以数学物理方程既是数学联系实际的一个重要桥梁，又是纯数学的许多分支和自然科学各部门之间的一个重要桥梁，其基本内容已成为广大科技工作者必备的基础知识。

数学物理方程研究的范围十分广泛，是一门发展相当迅速的学科，包含了非常丰富的内容。本书主要讲述一些经典材料，即波动方程、热传导方程和调和方程（Laplace 方程）等简单的典型方程。这是因为，一方面，这些方程很好的描述了一些典型的物理现象，能解决某些重要的问题；另一方面，通过这些问题的研究，可以掌握一些方法，作为探讨新问题的参考。同时，它们也是进一步学习与研究近现代偏微分方程理论的必备的基础。除此之外，我们还力图以简要的方式适当介绍一些与近现代偏微分方程的研究密切相关的概念、内容和方法，如函数空间、$\delta-$函数和基本解等。至于偏微分方程的数值求解方法，由于它是另一门课程的主题，本书亦只作简要介绍，并且着重强调指出有关的数值解法，实际上是以对偏微分方程解的概念的不同理解为出发点，为读者进一步学习、研究偏微分方程的数值解提供一个较好的指南。

1.2　数 学 模 型

一个微分方程，如果除未知函数和自变量外，还包含有未知函数的一个或几个偏导数时，称为**偏微分方程**。一般可以写成

$$f(x,y,\cdots,u,u_x,u_y,\cdots,u_{xx},u_{yy},\cdots)=0$$

的形式。数学物理中的许多问题均可化归为偏微分方程。本书主要研究以下在数学物理中常见的三类经典方程，它们的三维情形分别为

（1）波动方程

$$u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})=0$$

（2）热传导方程

$$u_t-k(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})=0$$

（3）调和方程（拉普拉斯（Laplace）方程）

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$$

这不仅因为它们很简单，尤其因为它们代表了三类不同的典型方程。理解了它们的性质，就在研究一般的偏微分方程时有所遵循。推导方法大体上相同，而且适用于其他的经典的数学物理方程。所谓“经典的”是因为一些重要的偏微分方程（如量子力学中的薛定锷（Schrödinger）方程）的推导是依据的是全然不同的方法，它不在我们讨论之列。

诸如弹性体的振动，电磁波的传播，热的传导，粒子的扩散等研究所归结出来的数学模型都属于以上三类方程。我们的学习就从建立描述物理问题的数学模型开始。

1.2.1 弦振动与膜振动

（一）弦振动

现在为弦振动现象建立数学模型，即推导弦振动方程。首先需要了解它所服从的基本物理规律，同时作一些简化假设。

弦是一个力学系统，是一个连续的而非离散的质点组（进一步说，它是一个一维的连续体），所以它的运动应符合牛顿运动定律。对它的简化假设如下：

设长度为l，拉紧的两端固定的弹性弦，在未受扰动时平衡位置是x轴，其上各点均以该点横坐标表示。弦上各点的位移均假设发生在某个(x,u)平面内垂直于x轴的方向上，因此弦上任一点x在t时刻，弦的形状为曲线$u=u(x,t)$。我们的问题是，对给定的初始扰动，确定弦上各点的运动规律，即建立描述弦上任一点x处，在任意时刻t，位移$u(x,t)$所满足的方程。

现在我们设：

（1）弦的扰动是小扰动。这并不是说$u(x,t)$的数值很小，而是设u_x很小，即$u_x<<1$，从而u_x可以忽略不计。

（2）弦是“柔软”且具有弹性的。弦是一个连续体，所以能维持形状是由于各个部分相互之间有作用力，这种力称为内力。如果要使弦的形状改变就必须抵抗内力而作功。所谓“柔软”是对其内力的性质作的一种规定，即规定内力必须为切线方向的张力，所以如果想把它扭弯，即在法向发生形变，并无内力抵抗，这样就称它为柔软的，即弦不能抵抗弯矩。因而弦上的张力总是沿着弦的振形的切线方向。如图 1-1。弦在P以左和P'以右的部分各以切向张力T和T'作用于弧PP'，而作用点各为P和P'，其方向分别指向P的左方与P'的右方，即由弧PP'之外的部分作用于弧PP'。

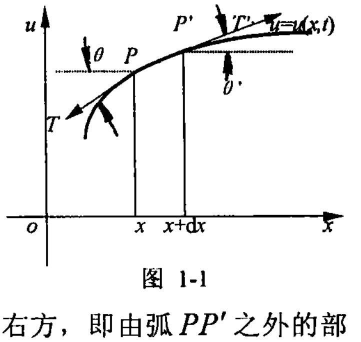

图 1-1

（3）振动弦的任一段都没有伸长。在弦上任取一小段$[x,x+\mathrm{d}x]$，设它在时间t内变成弧PP'，由假设（1），此时它的长度为

$$\mathrm{d}s=\int_x^{x+\mathrm{d}x}\sqrt{1+u_x^2}\,\mathrm{d}x\approx(x+\mathrm{d}x)-x=\mathrm{d}x$$

于是在上述允许的精确度之内，便可以认为在弦的振动过程中长度没有发生变化。因此由虎克（Hooke）定律可知，弦上每点张力T的数值是不随时间t变化的。另外，我们同样由假设（1）还可以证明张力T的数值也不随x而变化，即$T=T'$。事实上，因为作用在弧PP'上有沿端点P与P'的切线方向的张力、外力和惯性力，所有这些力在x轴方向上的分力的总和要等于零，又因为我们要研究的是横向振动，所以外力和惯性力都是平行于u轴，因此

$$T(x)\cos\theta-T(x+\mathrm{d}x)\cos\theta'=0$$

其中，$\theta(x)$是曲线$u(x,t)$上当时间为t，横坐标为x时点切线与x轴的交角，在点P（横坐标为x）和点P'（横坐标为$x+\mathrm{d}x$）处分别为θ和θ'。由假设（1），所以有

$$\cos\theta(x)=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta(x)}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}\approx 1$$

从而得出$T(x)\approx T(x+\mathrm{d}x)$。由于$x$的任意性，所以张力$T$的数值不依赖于$x$。

（4）弦的重量远小于弦中的张力。

（5）弦的挠度远小于弦的长度。

在建立数学模型时，这种简化假设是必须的。作什么样的假设，需由所要解决的问题的性质以及所需要的精确程度而定。过多的假设使得问题的结论不能反映客观情况而失去价值；过少的假设则会使所得到的模型过于复杂。总之这是一个实验与实践的问题而非理论问题。

建立模型的第二步是分析弦上一小段如图 1-1 的弧PP'，其中P'点和P点的坐标差为$\mathrm{d}x$。这是一个“微元”。它必须足够小，使得我们可以无视其内部各点的差别而认为其各点都是均匀的，凡是比$\mathrm{d}x$更高阶的量均可略去。它又必须足够大，使得可以忽略微观效应。还可以认为描述其运动的函数都相当规则。这是具有普遍意义的，大凡讨论连续体的问题时，总是这样作的。这种微元，时常称为一种“物理无穷小”。

设弦是均匀的，其密度ρ是一个常数。现把弧PP'作为一个运动的质点来考虑。因为其长为$\mathrm{d}x$，故质量为$\rho\mathrm{d}x$，加速度为$\partial^2u/\partial t^2$。弦的其余部分作用于它的力是P和P'两点指向外的张力T。由达朗倍尔（D'Alembert）原理，作用这弧上的张力、外力、介质阻力与惯性力之和应等于零。如果忽略介质阻力不计，且不受外力作用，那么，在x方向，其分力为

$$\begin{aligned}T'\cos\theta'-T\cos\theta&=T\left[\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta'}}-\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\right]\\&=T\left[\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2(P')}}-\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2(P)}}\right]=0\qquad（u_x^2\text{ 可略去}）\end{aligned}$$

u方向上的分力为

$$T'\sin\theta' - T\sin\theta = T(\tan\theta' - \tan\theta) = T\left[u_x(P') - u_x(P)\right] = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}x$$

因此，由牛顿第二定律有

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\mathrm{d}x = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}x$$

或者

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \left(a^2 = \frac{T}{\rho}\right) \tag{1.1}$$

式（1.1）称为**均匀弦的自由横振动方程或一维齐次波动方程**。

如果有外力 $p(x,t)$ 作用，类似地可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{1.2}$$

其中，$a^2 = \dfrac{T}{\rho}$，$f(x,t) = \dfrac{p(x,t)}{\rho}$。我们称式（1.2）为**均匀弦的强迫横振动方程或一维非齐次波动方程**。

如果弦不均匀，即 $\rho = \rho(x)$，且有外力 $p(x,t)$ 作用，那么可表示为

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x,t) \tag{1.3}$$

式（1.3）称为**非均匀弦的强迫横振动方程或一维非齐次波动方程**。

（二）膜振动

在数学物理的大量问题中会遇到膜振动方程。类似于弦振动情形，我们首先作某些类似的简化假设：

（1） 膜是柔软而有弹性的。即设它是一块绷紧的弹性薄片，厚度很小，以致它对弯曲变形不会有任何抵抗力，我们称这样的弹性薄片为薄膜。也就是说，膜不抵抗弯矩。

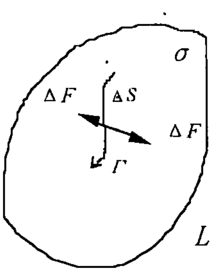

图 1-2

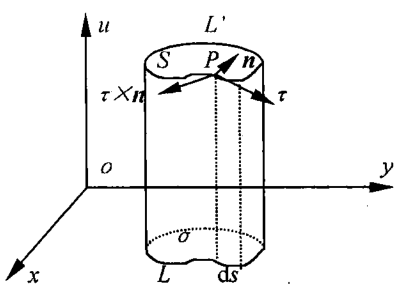

图 1-3

在平衡状态时它位于 xoy 平面内，与某一区域 σ 重合，其边界曲线是一条封闭的曲线 L，如图 1-2。并设薄膜受到边界上张力 T 的作用，此时沿薄膜内部任意方向割出一条曲线 Γ，那么在被割线 Γ 分离出的两部分之间相互作用力 ΔF 是与弧的长度 ΔS 成正比，同时还垂直于弧元素 ΔS，故作用在曲线 Γ 上的弧 ΔS 上的作用力 $\Delta F = T\Delta S$。

（2） 设薄膜上每点的运动方向是平行于 u 轴即垂直于 xoy 平面的，也就是说只有

纯横向振动。如图 1-3。因而薄膜上每点(x,y)的偏位移是(x,y)与时间t的函数，即$u(x,y,t)$。

（3）薄膜做横向微小振动。当这块薄膜失去平衡位置之后，就变成曲面S，其边界曲线为空间曲线L'，显然此时就应有

$$\sigma = S\cos\gamma$$

其中γ是u轴与曲面S的法线之间的交角。由于振动微小，因而$\dfrac{\partial u}{\partial x}$和$\dfrac{\partial u}{\partial y}$平方项可以忽略不计。那么由公式

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2}} \approx 1$$

得出，对任何瞬时t都有$S=\sigma$，即是说，任意取出的薄膜块在允许的精确度内，面积的变化可以忽略不计。因而当薄膜振动微小时，我们仍然可以认为薄膜块S是受到最初张力T的作用。换句话说，薄膜的每个单元没有伸张，因此由虎克定律可知张力是定值。

（4）薄膜的重量远比薄膜的张力小，其重量可以忽略不计。

（5）薄膜的挠度远比薄膜的直径小。

（6）运动的薄膜上任一点处沿任一方向的斜率远比 1 小。

现在我们考察薄膜S上的受力情况，分别计算出作用于这块薄膜S上的张力，外力和惯性力在u轴方向上的分量，同时将介质的阻力忽略不计。

首先计算出薄膜S边界上所分布的张力的合力沿u轴方向的分量。设边界L'上的弧元素为$\mathrm{d}s'$，由假设（1），张力向量$\boldsymbol{T}$位于薄膜块S的切平面上，且垂直于$\mathrm{d}s'$。边界L'上点T处的单位法线向量为

$$\boldsymbol{n} = \cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \cos\beta\,\boldsymbol{j} + \cos\gamma\,\boldsymbol{k}$$

而边界L'的单位切线向量为

$$\tau = \cos\alpha'\,\boldsymbol{i} + \cos\beta'\,\boldsymbol{j} + \cos\gamma'\boldsymbol{k}$$

于是点p处张力方向为

$$\boldsymbol{t} = \tau\times\boldsymbol{n} = (\cos\beta'\cos\gamma - \cos\beta\cos\gamma')\boldsymbol{i} + (\cos\gamma'\cos\alpha - \cos\gamma\cos\alpha')\boldsymbol{j} + (\cos\alpha'\cos\beta - \cos\alpha\cos\beta')\boldsymbol{k}$$

因此作用于边界L'的弧元素$\mathrm{d}s'$上的张力在u方向上的分量等于

$$T(\cos\alpha'\cos\beta - \cos\alpha\cos\beta')\mathrm{d}s'$$

那么沿边界L'上分布的所有均匀张力的合力在u轴方向上的分量等于

$$T\oint_{L'}(\cos\alpha'\cos\beta - \cos\alpha\cos\beta')\mathrm{d}s' = T\oint_{L'}\cos\beta\,\mathrm{d}x' - \cos\alpha\,\mathrm{d}y'$$

其中，$\mathrm{d}x' = \cos\alpha'\mathrm{d}s'$，$\mathrm{d}y' = \cos\beta'\mathrm{d}s'$。又因为

$$\cos\alpha = \frac{-\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2}} \approx -\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\cos\beta=\frac{-\dfrac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2}}\approx-\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2}}\approx 1$$

所以有

$$T\cdot\oint_{L'}(\cos\alpha'\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta')\mathrm{d}s'\approx -T\cdot\oint_{L'}\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x'-\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y'$$

因为我们假设薄膜做横向微小振动，所以$\mathrm{d}s\approx\mathrm{d}s'$，那么，取$L$上的积分代替$L'$上的积分，并应用格林（Green）公式，得出沿边界L'上所分布的张力的合力在u轴方向上的分量为

$$T\cdot\iint_\sigma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{1.4}$$

其次，假设有平行于u轴的外力作用于薄膜上，每单位面积上的力为$p(x,y,t)$，于是作用于所研究的那块薄膜上的合力为

$$\iint_\sigma p(x,y,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{1.5}$$

第三，设薄膜的面密度为$\rho(x,y)$，则惯性力的合力为

$$-\iint_\sigma \rho(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{1.6}$$

根据动力学中的达朗倍尔原理，在任何时间t，作用于所研究的薄膜块s上张力式（1.4），外力式（1.5）与惯性力式（1.6）之和等于零，便有

$$\iint_\sigma\left[\rho(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-p(x,y,t)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$$

由于薄膜块s的选择的任意性，则在薄膜上任意点及任意时间t都成立下述等式

$$\rho(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+p(x,y,t) \tag{1.7}$$

这就是在外力作用下的薄膜的横振动方程，我们称之为**薄膜的强迫横振动方程**或**二维非齐次波动方程**。

如果薄膜是均匀的，即$\rho=$常数，则方程可表示为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t) \tag{1.8}$$