矩阵结构力学

荆广生　叶志明　著

兰州大学出版社

矩阵结构力学

荆广生
叶志明 著

兰州大学出版社

（甘）新登字第08号

内 容 简 介

本书共分七章，内容包括矩阵基础，梁的矩阵计算方法，压杆稳定的矩阵计算方法，结构分析的基本方法，结构分析的位移法，结构分析的力法和结构振动分析的矩阵方法。全书较为系统地介绍了矩阵理论在结构分析中的应用，并重视对问题的物理概念的讨论，并且对数值计算方法也作了一些介绍。书中包含了著者的研究成果以及对前人工作的补充和发展。

本书论述深入浅出，可作为高等院校力学、结构工程、工业与民用建筑、机械等专业高年级本科生和研究生的教材或教学参考书，亦可作为从事有关专业的 教师、科研人员和工程技术人员的参考书。

矩阵结构力学

荆广生
叶志明 著

兰州大学出版社出版
（兰州大学校内）

兰州大学出版社激光照排中心排版
定西地区印刷厂印刷　甘肃省新华书店发行
开本：850×1168 毫米 1/32　印张：4.75

1993 年 7 月第 1 版　1993 年 7 月第 1 次印刷
字数：10 千字　印数：1—1500 册

ISBN7－311－00616－3/O・83　定价：2.95 元

目 录

第一章　矩阵的基础知识

在本章中，只介绍矩阵的基本运算，这是矩阵代数的基本知识。

§1.1　矩阵

在材料力学中经常遇到的一组线性方程式，例如图 1—1 所示的梁，可求得在 A 点的挠度、转角、力矩与剪力为：

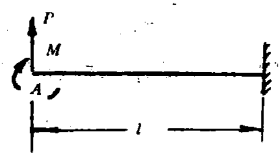

图 1—1

$$\delta_A = \frac{l^3}{3EI}P + \frac{l^2}{2EI}M$$

$$\theta_A = \frac{l^2}{2EI}P + \frac{l}{EI}M$$

$$M_A = 0 \cdot P + 1 \cdot M$$

$$V_A = 1 \cdot P + 0 \cdot M$$

这样我们就遇到四个方程，而每个方程都是两个自变数 P 与 M 的线性方程，这只是一个例子。一般地，设有 m 个变数，n 个自变数，它们之间具有线性关系（在上例中 m=4，n=2）。设此方程组是齐次的，则可写为下列的形式：

$$\begin{cases} (y_1)_a = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \\ (y_2)_a = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots \\ (y_m)_a = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases} \tag{1.1}$$

如另有一组如下：

$$\begin{cases}(y_1)_b = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n \\ (y_2)_b = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n \\ \cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots \\ (y_m)_b = b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \cdots b_{mn}x_n\end{cases}$$

并且使 $y_1 = (y_1)_a + (y_1)_b, y_2 = (y_2)_a + (y_2)_b, \cdots\cdots$

$y_m = (y_m)_a + (y_m)_b$

则得：

$$\begin{aligned}y_1 &= (a_{11} + b_{11})x_1 + (a_{12} + b_{12})x_2 + \cdots + (a_{1n} + b_{1n})x_n \\ y_2 &= (a_{21} + b_{21})x_1 + (a_{22} + b_{22})x_2 + \cdots + (a_{2n} + b_{2n})x_n \\ &\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots \\ y_m &= (a_{m1} + b_{m1})x_1 + (a_{m2} + b_{m2})x_2 + \cdots + (a_{mn} + b_{mn})x_n\end{aligned}$$

综观上式，这种加法计算只限于系数的变化，与自变数无关。所以最好设法把系数（如 a_{ij} 与 b_{ij}）与自变数（如 x_1、x_2、$\cdots x_n$）分离开，如果能做到这一点，以后任何变化只是在系数部分打主意，而可把自变数放在一旁。矩阵就是应这个要求而产生的计算方法。

将式(1.1)写成下列形式：

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

简写为 $AX = Y$

式中：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

A,X 和 Y 称为矩阵。以 A 为例,它有 m 行,n 列,是一个 $m\times n$ 的矩阵,其中的 a 称为此矩阵的元素,第 i 行第 j 列的元素为 a_{ij}。在 X 和 Y 中只有一列,称为列矩阵。X 是 n 行的列矩阵,Y 是 m 行的列矩阵。

如仍以图 1—1 的梁为例,则可写成下面形式:

$$\begin{bmatrix} \delta \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} \frac{l^3}{3EI} & \frac{l^2}{2EI} \\ \frac{l^2}{2EI} & \frac{l}{EI} \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ \\ \\ M \end{bmatrix}$$

此处 m=4,n=2。例 $a_{22}=\frac{l}{EI}$ 等,余类推。

§1.2 矩阵的加、减法

如前所示,两矩阵相加必须行数与行数、列数与列数分别相等。矩阵加法是相应的元素分别相加。例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 13 \\ 10 & 14 \\ 11 & 15 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+9 & 5+13 \\ 2+10 & 6+14 \\ 3+11 & 7+15 \\ 4+12 & 8+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 18 \\ 12 & 20 \\ 14 & 22 \\ 16 & 24 \end{bmatrix}$$

很显然矩阵的减法仿此。

两个矩阵如果相等,则各相应元素皆相等,这可以从矩阵的由来上直接看出。如果

$$A = B \qquad \text{则} \quad a_{ij} = b_{ij}$$

显然加法的交换律及结合律同样适用于矩阵的加减法,即

$$A + B = B + A, \quad A - (B + C) = (A - B) - C$$

§1.3 矩阵的乘法

设

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{cases} \tag{1.3}$$

另外有

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 \\ x_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 \\ x_3 = b_{31}z_1 + b_{32}z_2 \end{cases} \tag{1.4}$$

将(1.4)式代入(1.3)式，即得出 y 与 z 之间的关系如下：

$$\begin{cases} y_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})z_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})z_2 \\ y_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})z_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})z_2 \end{cases} \tag{1.5}$$

如将(1.3)、(1.4)和(1.5)各写成矩阵的形式：

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

简写成　　$Y=AX, X=BZ, Y=CZ$

则可写为：　$Y=AX=ABZ=CZ$

所以　　$C=AB$

即 C 矩阵为 A 和 B(A 先 B 后，次序不能颠倒)的乘积，所以

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

观察上式 $A_{2\times3} \cdot B_{3\times2}=C_{2\times2}$，此处下标的第一个数字代表矩阵的行数，第二个数字代表矩阵的列数。可见两个矩阵相乘，前矩阵的列数必须等于后矩阵的行数，否则不能相乘。原因可从(1.3)和(1.4)两个方程看得很清楚，即(1.3)式中 x 的个数，当然是与(1.4)中的 x 的个数相同。所以这个矩阵相乘的基本要求是很明显的事。同理可以看出乘积的矩阵的行和列的数目必是 A 的行和 B 的列的数目，即

$$A_{m\times q} \cdot B_{q\times n} = C_{m\times n}$$

其次我们再观察 C 矩阵中的元素与 A、B 矩阵中的元素的关系，以 C 矩阵中的 C_{21} 为例：

$$C_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}$$

C_{21} 是由 A 的第二行和 B 的第一列的各相应元素分别相乘后相加的结果，推而广之 C_{ij} 项元素是由矩阵 A 的第 i 行和矩阵 B 的第 j 列的元素各自两两相乘的和。所以当

$$A_{m\times q} \cdot B_{q\times n} = C_{m\times n}$$

有 $$C_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{q} a_{i\alpha}b_{\alpha j} \tag{1.6}$$

或者写成张量形式：$C_{ij}=a_{i\alpha}b_{\alpha j}$，$(\alpha=1,2,\cdots q)$。

关于 C_{ij} 项的计算，下述方法也较易记忆，且在工程计算中已普遍采用。

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{q1} & b_{q2} & \cdots & b_{qj} & \cdots & b_{qn} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{iq} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mq} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & C_{ij} & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix}
\end{array}
$$

采用这种方法，将两个矩阵的前一个矩阵置于左侧，后一个矩阵置于上方，则乘得的矩阵中的各元素如 C_{ij}，即可按两个矩阵相应的行与列之各元素两两相乘再求其和即得该数。

$$
A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B_{3\times 4} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 4 \end{bmatrix}
$$

这里 q 皆为 3，故可相乘。乘积为一个 2 行 4 列的矩阵，算法如下：

$$
\begin{array}{rc}
 & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 4 \end{bmatrix} = B \\
A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 6 & 5 & -14 & -7 \\ 4 & 6 & -34 & 0 \end{pmatrix} = C
\end{array}
$$

以 C_{22}为例：$C_{22}=1\times 4+3\times(-1)+1\times 5=6$，余类推。

$$
\text{又如 } A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad Y_{2\times 1} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, X_{3\times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
$$

$$
Y_{2\times 1} = A_{2\times 3} X_{3\times 1}
$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = X$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{pmatrix} = Y$$

所以 $$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$

这个结果可以反过来说明把(1.1)写成(1.2)的理由。

下列的矩阵称为单位矩阵，除去在主对角线上的各元素为1以外，其余各元素皆为零。

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

显然 $$IA = A$$

在矩阵乘法中，交换律一般不成立，即 AB≠BA。

例如：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -10 & -4 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$$

显然 $AB \neq BA$。

§1.4 增广矩阵

在以矩阵表示一组非齐次线性方程组时，例如

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + c_1 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + c_2 \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + c_3 \end{cases}$$

c 是常数项，用矩阵表示如下：

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

上式可以用下式来代替：

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \hdashline 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \hdashline 1 \end{bmatrix}$$

当然这样表示的结果出现一个 1=1 的式子，但是原式右边的两项简化为一项了。这种矩阵称为原矩阵的增广矩阵，以 $\tilde{A}$ 表示，即 $\tilde{A}$ 为 A 的增广矩阵。

以上是矩阵的最基本的运算法则，至于其它法则如转置矩阵、逆矩阵等，将在有关章节中用时再论述。

第二章　梁的矩阵计算方法

梁的计算目的是求其变形（挠度和转角）及内力（弯矩和剪力），前者决定刚度条件，后者决定强度条件。设有一梁如图 2—1 所示，先将此梁分段，分段的原则是凡是挠度、转角、力矩、剪力有不连续的地方都作为分段的点。所以图中的支点（剪力不连续）、梁间铰（转角不连续）、作用力 P（剪力不连续）、作用力矩 M（力矩不连续）的地方都是分段的点，这样就将该梁分成五段，自左到右依次命名各点为 0,1,2,3,4,5。另外有时由于 EI 有突变也要分段，如图 2—2 所示。

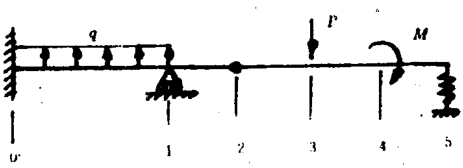

图 2—1

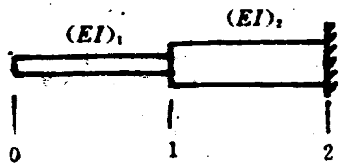

图 2—2

§ 2.1　传递矩阵

现在考虑梁的任意一段，不失一般性，我们考虑 $(i-1,i)$ 段，显然在此段内作用的外力只能是分布载荷。为简单起见，我们先设为均匀载荷，如图 2—3 所示。δ_{i-1}^R、θ_{i-1}^R、M_{i-1}^R、V_{i-1}^R 是此部分梁的左端挠度、转角、弯矩和剪力，上注脚 R 是表明在 $i-1$ 点右面的量（因为有的量值在分界点可能有突变），此部分梁的右端的挠度、转

角、弯矩、剪力为 δ^L_i、θ^L_i、M^L_i 和 V^L_i，上注脚 L 表示在 i 点的左面的量。

现在要求以 δ^R_{i-1}、θ^R_{i-1}、M^R_{i-1}、V^R_{i-1}表示的 δ^L_i、θ^L_i、M^L_i 和 V^L_i 的方程式。

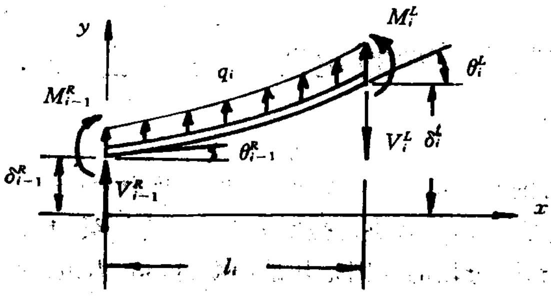

图 2—3

由材料力学，我们知道在图示的梁中(图中所示均为正值)有下列关系存在：

$$(EI)_i \frac{d^2y}{dx^2} = M, \quad \frac{dM}{dx} = V, \frac{dV}{dx} = q_i$$

及 $$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{1}{(EI)_i} q_i$$

上面方程式解为：

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D + \frac{q_i}{24(EI)_i} x4$$

在 $x = 0$ 处：$y|_{x=0} = \delta^R_{i-1}, y'|_{x=0} = \theta^R_{i-1}$

$$y''|_{x=0} = \frac{M^R_{i-1}}{(EI)_i}, y'''|_{x=0} = \frac{V^R_{i-1}}{(EI)_i}$$

这就决定了 A、B、C、D 四个积分常数的值为：

$$A = \frac{V^R_{i-1}}{6(EI)_i}, \quad B = \frac{M^R_{i-1}}{2(EI)_i}, C = \theta^R_{i-1}, D = \delta^R_{i-1}$$

从而原式为：

$$y = \delta^R_{i-1} + \theta^R_{i-1} x + \frac{M^R_{i-1}}{2(EI)_i} x^2 + \frac{V^R_{i-1}}{6(EI)i} x^3 + \frac{q_i}{24(EI)_i} x^4$$

在上式及其微分式中令 $x=l_i$，即得：

$$
\begin{aligned}
\delta_i^L &= \delta_{i-1}^R + l_i\theta_{i-1}^R + \frac{1}{2}\frac{l_i^2}{(EI)_i}M_{i-1}^R + \frac{1}{6}\frac{l_i^3}{(EI)_i}V_{i-1}^R + \frac{1}{24}\frac{l_i^4}{(EI)_i}q_i \\
\theta_i^L &= \theta_{i-1}^R + \frac{l_i}{(EI)_i}M_{i-1}^R + \frac{1}{2}\frac{l_i^2}{(EI)_i}V_{i-1}^R + \frac{1}{6}\frac{l_i^3}{(EI)_i}q_i \\
M_i^L &= M_{i-1}^R + l_iV_{i-1}^R + \frac{1}{2}l_i^2q_i \\
V_i^L &= V_{i-1}^R + l_iq_i
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

为方便起见，将上式化为无量纲形式，令

$$\bar{\delta}=\delta/l,\bar{\theta}=\theta,\bar{M}=Ml/EI,\bar{V}=Vl^2/EI,\bar{q}=\frac{ql^3}{EI}$$

则得：

$$
\left\{
\begin{aligned}
\bar{\delta}_i^L &= \bar{\delta}_{i-1}^R + \bar{\theta}_{i-1}^R + \frac{1}{2}\bar{M}_{i-1}^R + \frac{1}{6}\bar{V}_{i-1}^R + \frac{1}{24}\bar{q}_i \\
\bar{\theta}_i^L &= \bar{\theta}_{i-1}^R + \bar{M}_{i-1}^R + \frac{1}{2}\bar{V}_{i-1}^R + \frac{1}{6}\bar{q}_i \\
\bar{M}_i^L &= \bar{M}_{i-1}^R + \bar{V}_{i-1}^R + \frac{1}{2}\bar{q}_i \\
\bar{V}_i^L &= \bar{V}_{i-1}^R + \bar{q}_i
\end{aligned}
\right.
\tag{2.2}
$$

为省事，略去各量上面的一杠，以后的 δ、θ、M、V 都是无量纲量。上式(2.2)可写成增广矩阵形式如下：

$$
\begin{bmatrix}\delta\\ \theta\\ M\\ V\\ \hline 1\end{bmatrix}_i^L
=
\left[\begin{array}{cccc:c}
1 & 1 & 1/2 & 1/6 & q/24\\
0 & 1 & 1 & 1/2 & q/6\\
0 & 0 & 1 & 1 & q/2\\
0 & 0 & 0 & 1 & q\\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]_i
\begin{bmatrix}\delta\\ \theta\\ M\\ V\\ \hline 1\end{bmatrix}_{i-1}^R
$$

简写为：$\tilde{Z}_i^L=\tilde{F}_i\tilde{Z}_{i-1}^R$

式中：$\tilde{Z}$ 称为梁的状态向量，$\tilde{F}$ 称为传递矩阵。

$$\tilde{F}_i = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1/2 & 1/6 & q/24 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 & q/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & q/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & q \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_i \tag{2.3}$$

此矩阵中最后一列是由均布载荷得来的。下面介绍两种非均布载

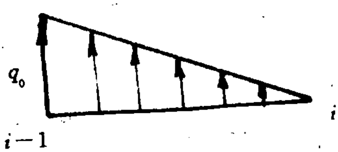

图 2—4

图 2—5

荷的结果，见图 2—4 与 2—5 所示。显然，图中这两列之和就是均布载荷的结果。

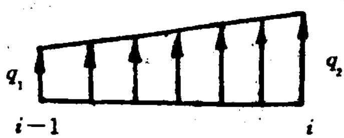

图 2—6

图 2—6 所示的分布载荷则可用迭加法得出 $\tilde{F}$ 的最后一列为：

$$\frac{1}{24}q_1 + \frac{1}{120}(q_2 - q_1)$$

$$\frac{1}{6}q_1 + \frac{1}{24}(q_2 - q_1)$$

$$\frac{1}{2}q_1 + \frac{1}{6}(q_2 - q_1)$$

$$q_1 + \frac{1}{2}(q_2 - q_1)$$

有时各段的 EI 不同，l 也不同，可选一段（通常选最左一段为基本段），令此段的 EI 及 l 为基本 EI 值及 l 值，其他段的如 i 段之 EI 为 $(EI)_i$，l 为 l_i，并令 $\alpha_i = \dfrac{(EI)_i}{EI}$，$\beta_i = \dfrac{l_i}{l}$，由式(2.1)可以看出，对于 i 段来说，(2.3)式的传递矩阵化为下式：