

應用線性代數詳解

INTRODUCTORY LINEAR ALGEBRA WITH APPLICATIONS

Macmillan Publishing Company

New York

Collier Macmillan Publishers

London

曉園出版社

前 言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與鋪路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精微的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助；而在本身的學問進程上，有更上層樓的成就。

目 錄

第一章	線性方程式與矩陣.....	1
第二章	行列式.....	117
第三章	向量與向量空間.....	191
第四章	線性轉換與矩陣.....	463
第五章	特徵值與特徵向量.....	565
第六章	線性規劃.....	663
第七章	應 用.....	709
第八章	數值線性代數.....	841

第一章 線性方程式與矩陣

習題 1.1

習題 1. 至 14. 中，以消去法求解線性聯立方程組。

1. $x + 2y = 8$

$$3x - 4y = 4$$

【答】

$$\begin{cases} x + 2y = 8 & \text{—— ①} \\ 3x - 4y = 4 & \text{—— ②} \end{cases}$$

由 ② - 3 × ① 得： $-10y = -20$

$$\Rightarrow y = 2 \text{ 代入 ①}$$

得： $x = 4$

$$\therefore \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

2. $2x - 3y + 4z = -12$

$$x - 2y + z = -5$$

$$3x + y + 2z = 1$$

【答】

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -12 & \text{—— ①} \\ x - 2y + z = -5 & \text{—— ②} \\ 3x + y + 2z = 1 & \text{—— ③} \end{cases}$$

由 ① - 2 × ② 得： $y + 2z = -2$ —— ④

由 ③ - 3 × ② 得： $7y - z = 16$ —— ⑤

由 ④ + 2 × ⑤ 得： $15y = 30$

$$\Rightarrow y = 2 \text{ 代入 ⑤}$$

得： $z = -2$

$\therefore$ 將 $y = 2, z = -2$ 代入 ②

$$\text{得： } x = 1 \quad \therefore \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{cases}$$

2 應用線性代數詳解

3. $3x+2y+z=2$

$$4x+2y+2z=8$$

$$x-y+z=4$$

【答】

$$\begin{cases} 3x+2y+z=2 & \text{—— ①} \\ 4x+2y+2z=8 & \text{—— ②} \\ x-y+z=4 & \text{—— ③} \end{cases}$$

$$\text{由②} - 2 \times \text{①} \text{得: } \begin{cases} -2x-2y=4 & \text{—— ④} \end{cases}$$

$$\text{由②} - 2 \times \text{③} \text{得: } \begin{cases} 2x+4y=0 & \text{—— ⑤} \end{cases}$$

$$\text{由④} + \text{⑤} \text{得: } 2y=4$$

$$\Rightarrow y=2 \text{ 代入⑤}$$

$$\text{得: } x=-4$$

$$\therefore \text{ 將 } x=-4, y=2 \text{ 代入③}$$

$$\text{得: } z=10$$

$$\therefore \begin{cases} x=-4 \\ y=2 \\ z=10 \end{cases}$$

4. $x+y=5$

$$3x+3y=10$$

【答】

$$\begin{cases} x+y=5 & \text{—— ①} \\ 3x+3y=10 & \text{—— ②} \end{cases}$$

$$\text{由②} - 3 \times \text{①} \text{得: } 0=-5 \text{ (不合)}$$

$\therefore$ 此題無解

5. $2x+4y+6z=-12$

$$2x-3y-4z=15$$

$$3x+4y+5z=-8$$

【答】

$$\begin{cases} 2x+4y+6z=-12 & \text{—— ①} \\ 2x-3y-4z=15 & \text{—— ②} \\ 3x+4y+5z=-8 & \text{—— ③} \end{cases}$$

由①得: $\begin{cases} x+2y+3z=-6 \end{cases}$ ———— ④

由 $2 \times ④ - ②$ 得: $\begin{cases} 7y+10z=-27 \end{cases}$ ———— ⑤

由 $3 \times ④ - ③$ 得: $\begin{cases} 2y+4z=-10 \end{cases}$ ———— ⑥

由⑥得: $y+2z=-5$ ———— ⑦

由⑤-7×⑦得: $-4z=8$

$\Rightarrow z=-2$ 代入⑦

得: $y=-1$, $\therefore$ 將 $y=-1, z=-2$ 代入④

得: $x=2$ $\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=-2 \end{cases}$

6. $x+y-2z=5$

$2x+3y+4z=2$

【答】

$\begin{cases} x+y-2z=5 \end{cases}$ ———— ①

$\begin{cases} 2x+3y+4z=2 \end{cases}$ ———— ②

由②-2×①得: $y+8z=-8$

$\Rightarrow y=-8-8z$ 代入①

得: $x=5-y+2z=5-(-8-8z)+2z$
 $=13+10z$

$\therefore \begin{cases} x=13+10z \\ y=-8-8z \\ z \text{ 爲任意實數} \end{cases}$

i.e. 此題有無窮解

7. $x+4y-z=12$

$3x+8y-2z=4$

【答】

$\begin{cases} x+4y-z=12 \end{cases}$ ———— ①

$\begin{cases} 3x+8y-2z=4 \end{cases}$ ———— ②

由②-3×①得: $-4y+z=-32$

$\Rightarrow z=4y-32$ 代入①

得: $x=12-4y+z=12-4y+(4y-32)$
 $=-20$

4 應用線性代數詳解

$$\therefore \begin{cases} x = -20 \\ y \text{ 爲任意實數} \\ z = 4y - 32 \end{cases}$$

i.e. 此題有無窮解

$$\begin{aligned} 8. \quad 3x + 4y - z &= 8 \\ 6x + 8y - 2z &= 3 \end{aligned}$$

【答】

$$\begin{cases} 3x + 4y - z = 8 & \text{—— ①} \\ 6x + 8y - 2z = 3 & \text{—— ②} \end{cases}$$

由② - 2 × ①得： $0 = -13$ (不合)

$\therefore$ 此題無解

$$\begin{aligned} 9. \quad x + y + 3z &= 12 \\ 2x + 2y + 6z &= 6 \end{aligned}$$

【答】

$$\begin{cases} x + y + 3z = 12 & \text{—— ①} \\ 2x + 2y + 6z = 6 & \text{—— ②} \end{cases}$$

由② - 2 × ①得： $0 = -18$ (不合)

$\therefore$ 此題無解

$$\begin{aligned} 10. \quad x + y &= 1 \\ 2x - y &= 5 \\ 3x + 4y &= 2 \end{aligned}$$

【答】

$$\begin{cases} x + y = 1 & \text{—— ①} \\ 2x - y = 5 & \text{—— ②} \\ 3x + 4y = 2 & \text{—— ③} \end{cases}$$

由② - ① × 2得： $-3y = 3$
 $\Rightarrow y = -1$

由③ - ① × 3得： $y = -1$ 代入①
得： $x = 2$

$$\therefore \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$11. \quad 2x + 3y = 13$$

$$x - 2y = 3$$

$$5x + 2y = 27$$

【答】

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 & \text{—— ①} \\ x - 2y = 3 & \text{—— ②} \\ 5x + 2y = 27 & \text{—— ③} \end{cases}$$

$$\text{由①} - 2 \times \text{②} \text{得: } 7y = 7$$

$$\Rightarrow y = 1$$

$$\text{由①} \times \frac{5}{2} - \text{③} \text{得: } \frac{11}{2}y = \frac{11}{2}$$

$$\Rightarrow y = 1 \text{ 代入②}$$

$$\text{得: } x = 2y + 3 = 2 + 3 = 5$$

$$\therefore \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$12. \quad x - 5y = 6$$

$$3x + 2y = 1$$

$$5x + 2y = 1$$

【答】

$$\begin{cases} x - 5y = 6 & \text{—— ①} \\ 3x + 2y = 1 & \text{—— ②} \\ 5x + 2y = 1 & \text{—— ③} \end{cases}$$

$$\text{由①} \times 3 - \text{②} \text{得: } -17y = 17$$

$$\Rightarrow y = -1$$

$$\text{由①} \times 5 - \text{③} \text{得: } -27y = 29$$

$$\Rightarrow y = \frac{-29}{27}$$

$$\therefore \begin{cases} x - 5y = 6 \\ y = -1 \\ y = \frac{-29}{27} \end{cases} \Rightarrow \text{此題無解}$$

6 應用線性代數詳解

13. $x + 3y = -4$

$$2x + 5y = -8$$

$$x + 3y = -5$$

【答】

$$\begin{cases} x + 3y = -4 & \text{——— ①} \\ 2x + 5y = -8 & \text{——— ②} \\ x + 3y = -5 & \text{——— ③} \end{cases}$$

由 $2 \times \text{①} - \text{②}$ 得: $y = 0$

由 $\text{①} - \text{③}$ 得: $0 = 1$ (不合)

$\therefore$ 此題無解

14. $2x + 3y - z = 6$

$$2x - y + 2z = -8$$

$$3x - y + z = -7$$

【答】

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 6 & \text{——— ①} \\ 2x - y + 2z = -8 & \text{——— ②} \\ 3x - y + z = -7 & \text{——— ③} \end{cases}$$

由 $\text{①} + 3 \times \text{②}$ 得: $\begin{cases} 8x + 5z = -18 & \text{——— ④} \end{cases}$

由 $\text{③} - \text{②}$ 得: $\begin{cases} x - z = 1 & \text{——— ⑤} \end{cases}$

由 $\text{④} - 8 \times \text{⑤}$ 得: $13z = -26$

$$\Rightarrow z = -2 \text{ 代入 ⑤}$$

得: $x = -1$

$\therefore$ 將 $x = -1, z = -2$ 代入 ①

$$\begin{aligned} \text{得: } 3y &= 6 + z - 2x = 6 - 2 - 2(-1) \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y = 2$$

$$\therefore \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{cases}$$

15. 一石油煉製廠提煉高級與低級汽油。低級汽油在混合工廠中製造每噸須 5 分鐘，在精煉廠須 4 分鐘；而每噸高級汽油在混合工廠須 4 分鐘，在精煉廠須 2 分鐘。如果混合工廠可供使用 3 小時，精煉廠為 2 小時，請問，高

、低級汽油必須被製造幾噸才可使工廠發揮最高使用率？

【答】

假設高、低級汽油分別須被製造 x_H , x_L 噸。

則依條件：

$$\text{混合工廠所使用的時間： } 4x_H + 5x_L = 3 \times 60$$

$$\text{精煉廠所使用的時間： } 2x_H + 4x_L = 2 \times 60$$

$$\text{亦即 } \begin{cases} 4x_H + 5x_L = 180 & \text{—— ①} \\ 2x_H + 4x_L = 120 & \text{—— ②} \\ x_H, x_L \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{由 ①} - 2 \times \text{② 得： } -3x_L = -60$$

$$\Rightarrow x_L = 20 \text{ 代入 ②}$$

$$\text{得： } x_H = 20$$

$$\therefore \begin{cases} x_H = 20 \text{ 噸} \\ x_L = 20 \text{ 噸} \end{cases}$$

16. 一塑膠廠製造兩種塑膠：普通級與特殊級。普通級每噸在 A 廠須 2 小時，在 B 廠須 5 小時；而特殊級每噸在 A 廠須 2 小時，在 B 廠須 3 小時。如果 A 廠每天可供使用 8 小時，而 B 廠為 15 小時，請問，每種塑膠每天該生產多少噸，才能使得各廠達其最高使用率？

【答】

假設普通級、特殊級每天各生產 x_0 , x_s 噸

則依條件：

$$\text{A 廠使用時間： } 2x_0 + 2x_s = 8$$

$$\text{B 廠使用時間： } 5x_0 + 3x_s = 15$$

$$\text{亦即 } \begin{cases} 2x_0 + 2x_s = 8 \\ 5x_0 + 3x_s = 15 \\ x_0, x_s \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 + x_s = 4 & \text{—— ①} \\ 5x_0 + 3x_s = 15 & \text{—— ②} \\ x_0, x_s \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{由 ②} - 5 \times \text{① 得： } -2x_s = -5$$

$$\Rightarrow x_s = \frac{5}{2} \text{ 代入 ①}$$

$$\text{得： } x_0 = 4 - x_s = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \begin{cases} x_0 = 1.5 \text{ 噸} \\ x_s = 2.5 \text{ 噸} \end{cases}$$

17. 一位節食者準備他一餐的食物 A, B, C 。每一盎司的 A 含有 2 單位的蛋白質, 3 單位脂肪, 4 單位醣; 每一盎司的 B 含有 3 單位蛋白質, 2 單位脂肪, 1 單位醣; 每一盎司的 C 含有 3 單位蛋白質, 3 單位脂肪, 2 單位醣, 如果這一餐必須精確地含有 25 單位蛋白質, 24 單位脂肪及 21 單位醣, 請問每種食物必須準備多少盎司?

【答】

假設每種食物 A, B, C 各準備 x_A, x_B, x_C 盎司。

則依條件：

$$\text{這一餐所含的蛋白質：} \quad 2x_A + 3x_B + 3x_C = 25$$

$$\text{這一餐所含的脂肪：} \quad 3x_A + 2x_B + 3x_C = 24$$

$$\text{這一餐所含的醣：} \quad 4x_A + 1x_B + 2x_C = 21$$

亦即：

$$\begin{cases} 2x_A + 3x_B + 3x_C = 25 & \text{——①} \\ 3x_A + 2x_B + 3x_C = 24 & \text{——②} \\ 4x_A + 1x_B + 2x_C = 21 & \text{——③} \\ x_A, x_B, x_C \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{由 } 3 \times \text{③} - \text{①} \text{ 得：} & \begin{cases} 10x_A + 3x_C = 38 & \text{——④} \\ 2 \times \text{③} - \text{②} & \begin{cases} 5x_A + x_C = 18 & \text{——⑤} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{由 } \text{⑤} \times 3 - \text{④} \text{ 得：} \quad 5x_A = 16$$

$$\Rightarrow x_A = \frac{16}{5} \text{ 代入 } \text{⑤}$$

$$\text{得：} \quad x_C = 2$$

$$\therefore \text{ 將 } x_A = \frac{16}{5}, x_C = 2 \text{ 代入 } \text{③}$$

$$\begin{aligned} \text{得：} \quad x_B &= 21 - 4x_A - 2x_C = 21 - 4 \cdot \left(\frac{16}{5}\right) - 2 \cdot 2 \\ &= \frac{21}{5} \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} x_A = \frac{16}{5} \text{ 盎司} \\ x_B = \frac{21}{5} \text{ 盎司} \\ x_C = 2 \text{ 盎司} \end{cases}$$

18. 一製造商製造 2-、6- 及 9- 分鐘的軟片顯相劑，2- 分鐘的每一噸在 A 廠須 6 分鐘，在 B 廠 24 分鐘，6- 分鐘的每一噸在 A 廠須 12 分鐘，在 B 廠 12 分鐘；9- 分鐘的每一噸在 A 廠須 12 分鐘，在 B 廠 12 分鐘。如果 A 廠每天可供使用 10 小時，B 廠為 16 小時，請問每一型的顯相劑各該生產多少噸，才能使得兩工廠充分使用？

【答】

假設 2-、6-、9- 分鐘各型的顯相劑分別生產 x_2 、 x_6 、 x_9 噸，可使 A、B 工廠充分使用。

則依條件：

$$A \text{ 廠使用的時間： } 6x_2 + 12x_6 + 12x_9 = 10 \times 60$$

$$B \text{ 廠使用的時間： } 24x_2 + 12x_6 + 12x_9 = 16 \times 60$$

$$\text{亦即 } \begin{cases} 6x_2 + 12x_6 + 12x_9 = 600 \\ 24x_2 + 12x_6 + 12x_9 = 960 \\ x_2, x_6, x_9 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 + 2x_6 + 2x_9 = 100 \text{ ———— ①} \\ 2x_2 + x_6 + x_9 = 80 \text{ ———— ②} \\ x_2, x_6, x_9 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{由 } 2 \times \text{①} - \text{②} \text{ 得： } 3x_6 + 3x_9 = 120$$

$$\Rightarrow x_6 = 40 - x_9 \text{ 代入 ①}$$

$$\begin{aligned} \text{得： } x_2 &= 100 - 2x_6 - 2x_9 \\ &= 100 - 2(40 - x_9) - 2x_9 \\ &= 20 \end{aligned}$$

$$\text{亦即 } \begin{cases} x_2 = 20 \\ x_6 = 40 - x_9 \\ x_9 = \text{任意實數，使得 } 0 \leq x_9 \leq 40. \end{cases}$$

所以只要 x_9 生產量在 0 ~ 40 噸之間， x_2 、 x_6 及 x_9 的生產量均能符合本題的要求。

理論性習題

- T.1 試證在(2)中交換兩組方程式後，所得到的線性聯立方程組與(2)有完全相同的解。

【證明】

$$\begin{aligned}
 & \therefore ka_{i1} \cdot s_1 + ka_{i2} \cdot s_2 + \cdots + ka_{in} \cdot s_n \\
 & = k(a_{i1} \cdot s_1 + a_{i2} \cdot s_2 + \cdots + a_{in} \cdot s_n) \\
 & = k \cdot b_i
 \end{aligned}$$

亦即(2)之解亦能滿足(2)'

所以(2)與(2)'有完全相同的解。

T.3 試證在(2)中將一方程式乘上某個不為零的常數而後加到另一個方程式；如此所得出的線性聯立方程組與(2)有完全相同的解。

【證明】

可仿T.2

$\therefore s_1, s_2, \dots, s_n$ 為(2)之解，又(2)'中設 $k \neq 0$ 乘上第 i 列 + 第 j 列使第 j 列成為

$$ka_{i1}x_1 + a_{j1}x_1 + ka_{i2}x_2 + a_{j2}x_2 + \cdots + ka_{in}x_n + a_{jn}x_n = kb_i + b_j$$

$$\therefore \begin{cases} a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \cdots + a_{in}s_n = b_i & (\text{由(2)得來}) \\ a_{j1}s_1 + a_{j2}s_2 + \cdots + a_{jn}s_n = b_j \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 & \therefore ka_{i1}s_1 + a_{j1}s_1 + ka_{i2}s_2 + a_{j2}s_2 + \cdots + ka_{in}s_n + a_{jn}s_n \\
 & = k(a_{i1}s_1 + \cdots + a_{in}s_n) + (a_{j1}s_1 + \cdots + a_{jn}s_n) \\
 & = k \cdot b_i + b_j
 \end{aligned}$$

亦即(2)之解滿足(2)'

$\therefore$ 此題得證

習題 1.2

1. 設

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad C = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) a_{12}, a_{22}, a_{23} 是多少？

(b) b_{11}, b_{31} 是多少？

(c) c_{13}, c_{31}, c_{33} 是多少？

【答】

(a) $a_{12} = -3, a_{22} = -5, a_{23} = 4$

(b) $b_{11} = 4, b_{31} = 5$

$$(c) \quad c_{13}=2, \quad c_{31}=6, \quad c_{33}=-1$$

習題 2. 至 7. 中, 設

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{和} \quad F = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

2. 若可能的話, 計算下列式子:

(a) $C+E$

(d) $CB+D$

(b) AB 和 BA

(e) $AB+DF$

(c) $2D-3F$

(f) $(3)(2A)$ 和 $6A$

【答】

$$(a) \quad C+E = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 8 \\ 4 & 2 & 9 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 8 \\ 16 & 9 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 10 \\ 7 & 8 & 17 \end{bmatrix}$$

$$(c) \quad 2D-3F = 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -12 & 15 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 18 & -19 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(d) \quad CB+D = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 21 & 11 \\ 13 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{不合定義})$$

$$\begin{aligned}
 \text{(e)} \quad \mathbf{AB} + \mathbf{DF} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 14 & 8 \\ 16 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16 & 9 \\ 0 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 17 \\ 16 & 31 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(f)} \quad (3)(2\mathbf{A}) &= (3) \left(2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \right) \\
 &= (3) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 12 & 6 & 24 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$6\mathbf{A} = 6 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 12 & 6 & 24 \end{bmatrix}$$

3. 若可能的話，計算下列式子：

(a) $\mathbf{A}(\mathbf{BD})$ 和 $(\mathbf{AB})\mathbf{D}$

(d) $\mathbf{DF} + \mathbf{AB}$

(b) $\mathbf{A}(\mathbf{C} + \mathbf{E})$ 和 $\mathbf{AC} + \mathbf{AE}$

(e) $\mathbf{EF} + 2\mathbf{A}$

(c) $3\mathbf{A} + 2\mathbf{A}$ 和 $5\mathbf{A}$

(f) $(-4)(3\mathbf{C})$ 和 $(-12)\mathbf{C}$

【答】

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 0 \\ 13 & 2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 58 & 4 \\ 66 & 4 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{D} &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 14 & 8 \\ 16 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 58 & 4 \\ 66 & 4 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} + \mathbf{E}) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -5 & 8 \\ 4 & 2 & 9 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 28 & 8 & 38 \\ 34 & 4 & 41 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\
 &\quad + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 17 & 4 & 22 \\ 18 & 3 & 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 4 & 16 \\ 16 & 1 & 18 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 28 & 8 & 38 \\ 34 & 4 & 41 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad 3\mathbf{A} + 2\mathbf{A} &= 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 3 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 10 & 5 & 20 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$5 \cdot \mathbf{A} = 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 10 & 5 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(d)} \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -16 & 9 \\ 0 & 22 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14 & 8 \\ 16 & 9 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -2 & 17 \\ 16 & 31 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$