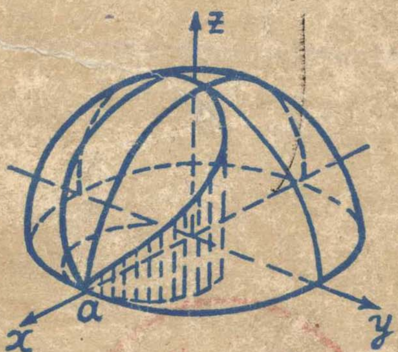
高等数学习题集题解

上册



江西师范学院数学系应用数学教研组

前　言

本题解是我组部分教师为了教学的需要，经整理、修改而成。

题解的解析几何与数学分析习题取之同济大学数学教研室编：高等数学习题集（1965年修订本）、概率论习题取之沈恒范编：概率论讲义。全书共有3000多题，分上下两册，上册内容包括解析几何、函数、极限、连续和一元函数微积分学，下册包括级数、多元函数微积分学、微分方程和概率论。

本书由我组高等数学备课组集体完成，在整理、修改过程中曾得到我系领导、教师的积极支持，热心帮助，谨致谢意。

由于我们水平低，错误不当之处，请批评指正。

江西师范学院数学系
应用数学教研组
1980年2月

李

上 册 目 录

第一编 解析几何

第二编 数学分析

第一编 解析几何

第一章 平面上的直角坐标、曲线及其方程

平面上点的直角坐标、坐标变换

1.1. 设轴上三点A，B，C的排列次序如图，A和B间距离为4，C和B间距离为1.

(a) 求轴上有向线段$\overline{AB}$，$\overline{AC}$，$\overline{BC}$的值

(b) 若以点A为原点，那么点A，B，C的坐标等于什么？

图1.1

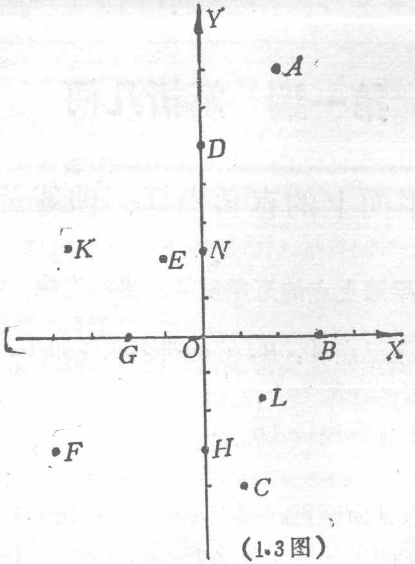
解 (a) $\overline{AB}=-4$，$\overline{AC}=-3$，$\overline{BC}=1$；(b) $A(0)$，$B(-4)$，$C(-3)$.

1.2. 已知数轴上点A，B，C的坐标依次为-6，0，8，求轴上有向线段$\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CA}$的值.

解 $\overline{AB}=0-(-6)=6$，$\overline{BC}=8-0=8$，$\overline{CA}=-6-8=-14$.

1.3. 作下列各点：$A(2,7)$，$B(3,0)$，$C(1,-4)$，$D(0,5)$，$E(-1,2)$，$F(-4,-3)$，$G(-2,0)$，$H(0,-3)$，$K\left(-3\frac{1}{2},2\frac{1}{3}\right)$，$L(\sqrt{2},-\sqrt{3})$，$N(0,\sqrt{5})$.

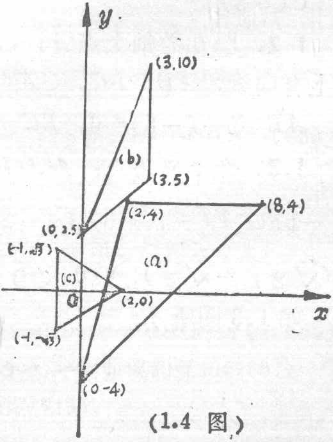
解 如1.3图所示.



（1.3图）

1.4. 三角形的三个顶点的坐标如下：(a) (8,4)，(0, −4)，(2,4)；(b) (3,5)，(3, 10)，(0, 2.5)；(c) (2, 0,) $(-1,\sqrt{3})$，$(-1,-\sqrt{3})$. 求作这些三角形.

解　如1.4图所示.



（1.4 图）

1.5. 设 $a=1$, $b=2$，求作点 (a,b)，(b,a)，$(-a,b)$，$(b,-a)$，$(-b,a)$，$(a,-b)$，$(-a,-b)$和$(-b,-a)$.

解　设各点为$A(a,b)$，$B(b,a)$，

$C(-a,b), D(b,-a), E(-b,a), F(a,-b), G(-a,-b), H(-b,-a)$.

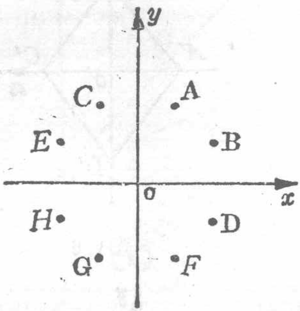


图 1.5

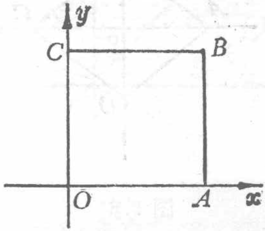


图 1.6

1.6. 一正方形的边长为2单位，如果将两条坐标轴放到这正方形的任意一组邻边上去，问正方形各顶点的坐标等于什么？

解　如果边长为2单位的正方形$ABCO$放到第Ⅰ象限，如图，则各顶点坐标为$A(2,0), B(2,2), C(0,2), O(0,0)$；而在第Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ象限时，分别为

$$(0,-2),(-2,2),(-2,0),(0,0);$$
$$(-2,0),(-2,-2),(0,-2),(0,0);$$
$$(0,-2),(2,-2),(2,0),(0,0).$$

1.7. 菱形的每边长为5单位，它有一条对角线长为6单位，如果把菱形的两条对角线分别放在两坐标轴上．求它各个顶点的坐标．

解　由已知得另一对角线长为8单位，按两种放法建立坐标系．各顶点的坐标为：$A(-4,0)$，$B(0,3)$，$C(4,0)$，$D(0,-3)$；$A'(-3,0), B'(0,4), C'(3,0), D'(0,-4)$.

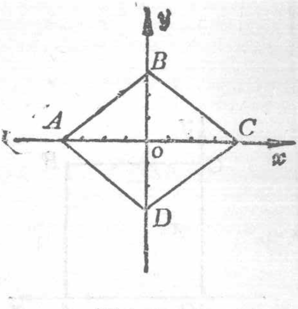


图 1.6

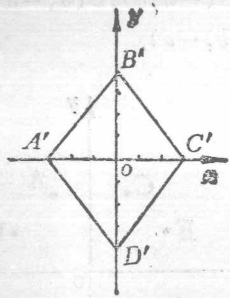


图1.6

1.8. 已知点$M(3,2)$，作它关于横轴，纵轴，原点的对称点．求这些点的坐标．

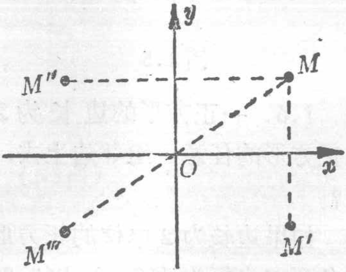


图 1.8

解　关于横轴的对称点为

$M'(3,-2)$．

关于纵轴的对称点为

$M''(-3,2)$．

关于原点的对称点为

$M'''(-3,-2)$．

1.9. 证明点$A_1(a,b)$关于第Ⅰ和第Ⅲ象限角的平分线的对称点A_2必有坐标(b,a)．

证　(1) 若A_1在第Ⅰ象限．A_1，A_2关于直线l对称，则$\angle A_1OM<45°$，$\therefore$ $\angle A_2OM<45°$ $\therefore$ A_2也在第Ⅰ象限，A_1A_2被直线l垂直平分．

$\therefore$ $Rt\triangle A_1OM\cong Rt\triangle A_2OM$．显然

$Rt\triangle A_1OB_1\cong Rt\triangle A_2OB_2$ ($\angle 1=\angle 2, OA_1=OA_2$)

$\therefore$ $|OB_1|=|OB_2|=|b|$ $|A_1B_1|=|A_2B_2|=|a|$．

$\because$ $A_1(a,b)$在第Ⅰ象限．$a>0, b>0$．

$\therefore\quad |OB_2|=b, |A_2B_2|=a$,即$A_2(b,a)$.

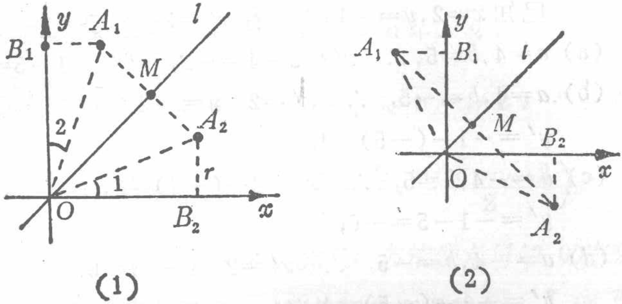


图 1.9

(2) 若A_1在第Ⅱ象限. A_1A_2关于直线l对称. 则l垂直平分A_1A_2, $\therefore \Delta A_1OM\cong\Delta A_2OM$.

$\angle A_2OM=\angle A_1OM$ $(45^\circ<\angle A_1OM<135^\circ)$

$\therefore$ A_2落在第Ⅳ象限，作$A_1B_1\perp y$轴，$A_2B_2\perp x$轴，

显然 $Rt\Delta A_1OB_1\cong Rt\Delta A_2OB_2$

$\therefore\quad |OB_2|=|OB_1|=|b|,\ |A_1B_1|=|A_2B_2|=|a|$

$\because\quad a<0, b>0.\quad \therefore\quad A_2(b,-a)$ 即 $A_2(b,a)$.

若点A_1分别在第、Ⅲ、Ⅳ象限时，证明同上.

1.10. 点B与点$A(2,4)$对称于第Ⅰ和第Ⅲ象限角的平分线，求点B的坐标.

解 $\because$ B与A对称于第Ⅰ和第Ⅲ象限角的平分线，据上题

$\therefore$ B点的坐标为 (4,2)

1.11. 一点在某一坐标系下的坐标为$x=2$，$y=-1$，如果轴的方向保持不变而将原点移至点：

(a) (4,5); (b) (4,−5);(c) (−4,5);(d) (−4,−5).

该点在新系下的坐标等于什么?

解 $\because$ 新坐标(x',y')和旧坐标(x,y)之间的关系为

$$\begin{cases}x'=x-a\\y'=y-b\end{cases},$$

已知$x=2,y=-1$，$\therefore$ 有$x'=2-a$与$y'=-1-b$.

(a) $a=4,b=5$，$\therefore$ $x'=2-4=-2$，$y'=-1-5=-6$;

(b) $a=4,b=-5$，$\therefore$ $x'=2-4=-2$，
$y'=-1-(-5)=4$;

(c) $a=-4,b=5$，$\therefore$ $x'=2-(-4)=6$，
$y'=-1-5=-6$;

(d) $a=-4,b=-5$，$\therefore$ $x'=2-(-4)=6$，
$y'=-1-(-5)=4$.

1.12. 某点在两轴方向相同的两坐标系下的坐标为（12，-7)和(0,15)，各系的原点在他系下的坐标等于什么？

解　设该点在xOy坐标系下的坐标为$(12,-7)$，在$x'O'y'$坐标系下为 $(0,15)$，即$x=12$，$y=-7$；$x'=0$，$y'=15$. 由公式：$x=x'+a,y=y'+b$. 得$a=x-x'=12-0=12$，$b=y-y'=-7-15=-22$. $\therefore O'(12,-22)$为O'在xoy坐标系下的坐标. 显然O在$x'o'y'$坐标系下的坐标为$O(-12;22)$.

1.13. 如果将坐标轴依逆时针方向旋转$60°$，点$M(1,\sqrt{3})$在新系下的坐标等于什么？

解　设点M在新坐标系下的坐标为(x',y'). 由转轴公式：

$$\begin{cases}x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha=1\cdot\cos60°+y\sin60°\\ \quad=1\times\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\\ y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha=-1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=0.\end{cases}$$

$\therefore$　在新坐标系下$M(2,0)$

1.14. 如果将坐标轴依逆时针方向旋转$45°$，点$M(1,\sqrt{3})$

在新系下的坐标等于什么？

解　设点 M 在新坐标系下的坐标为(x',y')．由转轴公式得：

$$x'=\cos 45°+\sqrt{3}\sin 45°=\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

$$y'=-\sin 45°+\sqrt{3}\cos 45°=\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

∴　在新坐标系下 $M\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)$．

1.15 坐标轴应该旋转多少角度，方能使点$M(2,0)$在新系下的横标和纵标变成相等？（我们把角度限制在 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$ 之间．）

解　要使 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=-x\sin\alpha+y\cos\alpha$

$(x+y)\sin\alpha=(y-x)\cos\alpha$，已知 $x=2$，$y=0$．

故　$2\sin\alpha=-2\cos\alpha$，$\sin\alpha+\cos\alpha=0$　∴　$\alpha=-\frac{\pi}{4}$．

两点间的距离，线段的定比分点

1.16．求下列各题中两点间的距离：

(a) $(5,2)$和$(1,-1)$；　(b) $(-6,3)$和$(0,-5)$；

(c) $(0,0)$和$(-3,4)$；　(d) $(9,-7)$和$(4,5)$．

解　(a) $d=\sqrt{(1-5)^2+(-1-2)^2}=5$；

(b) $d=\sqrt{(0+6)^2+(-5-3)^2}=10$；

(c) $d=\sqrt{(-3-0)^2+(4-0)^2}=5$；

(d) $d=\sqrt{(4-9)^2+(5+7)^2}=13$．

1.17．已知三角形的顶点$A(3,2)$，$B(-1,-1)$和$C(11,-6)$．求三角形的周长．

解　$|AB|=\sqrt{(3+1)^2+(2+1)^2}=5$，

$|BC|=\sqrt{(11+1)^2+(-6+1)^2}=13,$

$|AC|=\sqrt{(11-3)^2+(-6-2)^2}=8\sqrt{2}.$

$\therefore$ 周长$=|AB|+|BC|+|AC|=5+13+8\sqrt{2}$

$=2(9+4\sqrt{2}).$

1.18. 试证顶点为$A(0,0)$，$B(3,1)$及$C(1,7)$的三角形是直角三角形.

证明 $|AC|^2=(\sqrt{1^2+7^2})^2=50,$

$|BC|^2=(\sqrt{(3-1)^2+(1-7)^2})^2=40,$

$|AB|^2=(\sqrt{3^2+1^2})^2=10,$

$|AC|^2=|AB|^2+|BC|^2.$

$\therefore$ ΔABC是直角三角形.

1.19. 一点从点$A(-3,-2)$作直线运动移至点$B(4,5)$，求该点所经过的距离.

解 该点所经过的距离：

$$d=|AB|=\sqrt{(4+3)^2+(5+2)^2}=7\sqrt{2}.$$

1.20. 证明点$(7,2)$和点$(1,-6)$在以点$(4,-2)$为圆心的圆周上，并求这个圆的半径.

证明$\because$ $R_1=\sqrt{(7-4)^2+(2+2)^2}=5,$

$R_2=\sqrt{(1-4)^2+(-6+2)^2}=5,$

$\therefore$ 点$(7,2)$和$(1,-6)$到点$(4,-2)$的距离都是5，

$\therefore$ 点$(7,2)$和$(1,-6)$在以$(4,-2)$为圆心$R=5$为半径的圆周上.

1.21. 在x轴上求与点$A(5,12)$的距离为13单位的点的坐标.

解 设所求之点为$P(x,0)$则 $\sqrt{(x-5)^2+12^2}=13^2$，平方整理后得 $x^2-10x=0$ $\therefore x_1=0$，$x_2=10$.

$\therefore$ 所求的点为$P_1(0,0)$和$P_2(10,0)$.

1.22. 在第Ⅰ象限角的平分线上求一点，使它与点$A(0,2)$

的距离为$\sqrt{2}$单位.

解　设所求的点为(x,x)，则$x^2+(x-2)^2=2$，即$x^2-2x+1=0$

$\therefore$　$x=1$，即所求之点为$(1,1)$.

1.23．已知点M的横坐标等于7单位，而到点$N(-1,5)$的距离等于10单位，求点M的纵坐标.

解　设点M的纵坐标为y，　而$|MN|=\sqrt{(7+1)^2+(y-5)^2}=10$，平方整理后得　$y^2-10y-11=0$，

$$(y-11)(y+1)=0,\ y_1=11,\ y_2=-1.$$

则　$M(7,11)$与$M(7,-1)$为所求.

1.24．已知点M到两坐标轴和点$(3,6)$都有相等的距离，求点M的坐标.

解　$\because$　到两坐标轴等距离的点的坐标为(x,x)，

且　$(x-3)^2+(x-6)^2=x^2$　即　$x^2-18x+45=0$；

$x_1=15$，　$x_2=3$.　$\therefore$　所求点的坐标为$(15,15)$及$(3,3)$.

1.25．求与已知三点$A(2,2)$，$B(-5,1)$和$C(3,-5)$等距离的点.

解　设所求点的坐标为(x,y)　则

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2=(x+5)^2+(y-1)^2\\(x-2)^2+(y-2)^2=(x-3)^2+(y+5)^2\end{cases}$$

整理得　$\begin{cases}7x+y+9=0\\x-7y-13=0\end{cases}$

解得　$x=-1$，$y=-2$，　$\therefore$　所求点的坐标为$(-1,-2)$.

1.26．试用解析法证明，任意三角形两边中点连线之长等于第三边之长的一半.

证明　设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$为三角形的三顶点.

则　$|BC|=\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}$，

若AB，AC的中点分别为E，F.

则 $E\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$, $F\left(\dfrac{x_1+x_3}{2},\ \dfrac{y_1+y_3}{2}\right)$,

而 $$|EF|=\sqrt{\left(\frac{x_1+x_2-x_1-x_3}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1+y_2-y_1-y_3}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{x_3-x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y_3-y_2}{2}\right)^2}.$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}.$$

即 $|EF|=\dfrac{1}{2}|BC|$，其余两种情况同理可证.

1.27. 设点$M_1(1,1)$，$M_2(2,2)$，$M_3(3,-1)$是平行四边形的三个顶点，求第四个顶点.

解 设第四个顶点为$M_4(x,y)$平行四边形对角线的交点为$G(a,b)$

(1) 若M_2、M_3是对角点，则根据平行四边形对角线相互平分的性质，$G\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$,

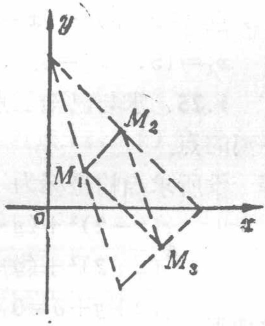


图 1.27

则 M_1、M_4也被G点平分，

$$\frac{x+1}{2}=\frac{5}{2},\quad \frac{y+1}{2}=\frac{1}{2}$$

$\therefore$ $x=4, y=0$ 即 $M_4(4,0)$

(2) 若M_2和M_1为对角点，则 $G\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$,

$$\frac{x+3}{2}=\frac{3}{2},\qquad \frac{y-1}{2}=\frac{3}{2}.$$

$\therefore$ $x=0$，$y=4$. 即 $M_4(0,4)$

(3) 若 M_2 和 M_4 为对角点，则 $G\left(\dfrac{x+2}{2},\ \dfrac{y+2}{2}\right)$.

$$\frac{x+2}{2}=\frac{1+3}{2},\ \frac{y+2}{2}=\frac{1-1}{2},$$

$\therefore\ x=2,\ y=-2,$ 即 $M_4(2,-2)$.

1.28. 设正方形相邻两顶点是 $A(2,3)$ 和 $B(6,6)$，求其余的顶点

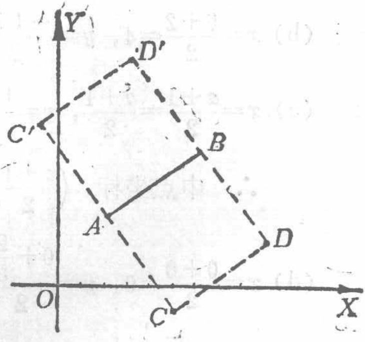


图 1.28

解 设其余的顶点为 $C(x_1, y_1)$，$D(x_2, y_2)$，设对角线的交点为 $G(a,b)$

$$a=\frac{x_2+2}{2}=\frac{x_1+6}{2}$$

$$b=\frac{y_2+3}{2}=\frac{y_1+6}{2}$$

据正方形的性质，

$|AB|=|BD| \quad |AD|=\sqrt{2}\,|AB|$

得 $\begin{cases}(x_2-6)^2+(y_2-6)^2=25\\(x_2-2)^2+(y_2-3)^2=50\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_2=9,\\y_2=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2'=3,\\y_2'=10,\end{cases}$

由 $\begin{cases}x_2+2=x_1+6,\\y_2+3=y_1+6,\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=x_2-4,\\y_1=y_2-3,\end{cases}$

得 $\begin{cases}x_1=5,\\y_1=-1,\end{cases}$ $\begin{cases}x_1'=-1,\\y_1'=7.\end{cases}$

故所求其余的顶点为，$C(5,-1)$，$D(9,2)$ 和 $C'(-1,7)$ $D'(3,10)$.

1.29. 下列各对坐标表示一线段的两端点，试求它们的中点：

(a) $(7,4),(3,2)$； (b) $(6,-4),(2,2)$；

(c) $(a,1),(1,a)$； (d) $(0,0),\left(0,\frac{2}{3}\right)$；

(e) $\left(-3\frac{3}{8},\ -7\frac{5}{8}\right)$, $\left(2\frac{3}{4},\ -4\frac{1}{2}\right)$.

解 (a) $x=\frac{7+3}{2}=5$, $y=\frac{4+2}{2}=3$, ∴ 中点坐标(5,3);

(b) $x=\frac{6+2}{2}=4$, $y=\frac{-4+2}{2}=-1$, ∴ 中点坐标(4,−1);

(c) $x=\frac{a+1}{2}=\frac{a+1}{2}$, $y=\frac{1+a}{2}=\frac{a+1}{2}$

∴ 中点坐标 $\left(\frac{a+1}{2},\ \frac{a+1}{2}\right)$

(d) $x=\frac{0+0}{2}=0$, $y=\frac{0+\frac{2}{3}}{2}=\frac{1}{3}$ ∴ 中点坐标$\left(0,\frac{1}{3}\right)$

(e) $x=\frac{-\frac{27}{8}+\frac{11}{4}}{2}=-\frac{5}{16}$ $y=\frac{-\frac{61}{8}-\frac{9}{2}}{2}=-\frac{97}{16}$

∴ 中点坐标$\left(-\frac{5}{16},\ -\frac{97}{16}\right)$

1.30. 从点 $A(2,3)$引一线段到点 $B(7,-2)$, 再延长同样的长度. 求延长线端点的坐标.

中点 利用公式.

解 设延长线端点坐标为(x,y), 则 $\frac{x+2}{2}=7$, $\frac{y+3}{2}=-2$.

得 $x=12$, $y=-7$. ∴ 延长线端点坐标为(12,−7)

1.31. 已知两点 $A(5,4)$和 $B(6,-9)$. 延长线段 $\overline{AB}$ 至点 C 使 $BC=\frac{1}{2}AB$, 求点 C的坐标.

解 设C点的坐标为(x,y),

∵ C为$\overline{AB}$的外分点. $\lambda=\frac{AC}{CB}=-3$

∴ $x=\frac{5+(-3)\times 6}{1-3}=\frac{13}{2}$, $y=\frac{4+(-3)\times(-9)}{1-3}=-\frac{31}{2}$

即　$C\left(\frac{13}{2}, -\frac{31}{2}\right)$

1.32. 已知两点 $A(2,3)$，$B(3,5)$. 求分线段 $\overline{AB}$ 得比值 1:3 的点 M 的坐标.

解　设分点 $M(x,y)$，

$\because$　$x_1=2$，$y_1=3$；$x_2=3$，$y_2=5$，$\lambda=\frac{1}{3}$

$\therefore$　$x=\dfrac{2+\frac{1}{3}\times 3}{1+\frac{1}{3}}=\dfrac{9}{4}$　$y=\dfrac{3+\frac{1}{3}\times 5}{1+\frac{1}{3}}=\dfrac{7}{2}$.

即　$M\left(\frac{9}{4}, \frac{7}{2}\right)$.

1.33. 已知两点 $A(2,1)$，$B(3,9)$. 求 (a) 分线段 $\overline{AB}$ 得比值 4:1 的点M的坐标；(b)分线段$\overline{BA}$得比值 4:1 的点M的坐标.

解　(a) 设 $M(x,y)$，

$\because$　$x_1=2$，$y_1=1$；$x_2=3$，$y_2=9$，$\lambda=4$.

$\therefore$　$x=\dfrac{2+4\times 3}{1+4}=\dfrac{14}{5}$，$y=\dfrac{1+4\times 9}{1+4}=\dfrac{37}{5}$ 即 $M\left(\frac{14}{5}, \frac{37}{5}\right)$；

(b) 设 $M(x,y)$，$x_1=3$，$y_1=9$；$x_2=2$，$y_2=1$ $\lambda=4$，

$x=\dfrac{3+4\times 2}{1+4}=\dfrac{11}{5}$，$y=\dfrac{9+4\times 1}{1+4}=\dfrac{13}{5}$ 即 $M\left(\frac{11}{5}, \frac{13}{5}\right)$.

1.34. 下列各对坐标表示一线段的两端点，试求它们的两个三等分点.

(a) $(-1,2)$，$(-10,-1)$；(b) $(11,6)$，$(2,3)$.

解　(a) 已知　$x_1=-1$，$y_1=2$；$x_2=-10$，$y_2=-1$.

当 $\lambda_1=\frac{1}{2}$ 时，$x=\dfrac{-1+\frac{1}{2}\times(-10)}{1+\frac{1}{2}}=-4$，