北京启航考试学校教学用书

启航

# 考研数学名师讲义

组编 北京启航考试学校
主编 邵峰

数学

中国市场出版社
China Market Press

# 启航考研数学名师讲义

组编　北京启航考试学校
主编　邵　峰
编者　邵　峰　王圣东　许新琨

中国市场出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

启航考研数学名师讲义/邵峰主编;北京启航考试学校组编.—北京:中国市场出版社,2010.4
ISBN 978-7-5092-0544-0

Ⅰ.启… Ⅱ.①邵…②北… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 061698 号

**书　　名**:启航考研数学名师讲义
**组　　编**:北京启航考试学校
**主　　编**:邵　峰
**出版发行**:中国市场出版社
**地　　址**:北京市西城区月坛北小街 2 号院 3 号楼(100837)
**电　　话**:编辑部(010)68034190　　读者服务部(010)68022950
发行部(010)68021338　68020340　68053489
68024335　68033577　68033539
**经　　销**:新华书店
**监　　印**:北京富泰印刷有限责任公司
**规　　格**:787×1092 毫米　1/16　32.5 印张　750 千字
**版　　本**:2010 年 4 月第 1 版
**印　　次**:2010 年 4 月第 1 次印刷
**书　　号**:ISBN 978-7-5092-0544-0
**定　　价**:58.00 元

# 前　言

《启航考研数学海选精编习题》一书自问市以来，得到了广大考生的一致好评：该习题集抓住了考研试题的命题趋势、数学考试的特点以及学生的认知规律，使考生复习数学事半功倍。为了让广大考生复习数学更加得法与充分，我们特编写了本套辅导讲义。

下面介绍一下本系列辅导讲义的特点。

**一、基本知识框架与配套习题**

基本知识框架是以启航考研辅导数学班讲义为蓝本，重新优化结构、充实内容，使基本知识讲解全面、到位、规范，方便考生学习；内容紧扣数学考试大纲和近年来命题趋势，考查重心回归课本，回归基本知识点和基本解题方法；配套习题注重基本，注重考研实战，没有题海战术或硬套题型战术，目的是不浪费同学们的时间。

**二、例题与习题的内在分类**

现在很多辅导书把题细分为很多题型，让考生硬套题型，把数学分死了。而考研题是很灵活的，题目形式稍微变动，硬套题型的考生就不会做了。可见硬套题型是很害人的。针对这一问题，本书按照数学解题的特点只把题目分为两大类：一类是基本题，是数学题的基础。强调其解题方法中的基本方法（即课本上的方法），是具有普遍意义、以无招胜有招、以不变应万变的方法。而一题一法的玄妙技巧、特殊方法不具有普遍意义，是害人的，本书坚决不涉及。另一类是非基本题，是数学题的难点。本书把非基本题看作是基本题的简单变形或综合，即基本题的衍生题，就是我们常说的：这道题转了一个弯，那道题转了两个弯……从这个意义上说，题都是基本题。希望考生在做题时多用这样的观念来看题。

**三、解题的基本方向：基本方法与化归法**

很多考生可以一直有这样一个疑问：为什么课本上的内容很简单，而试卷上的考题那么难？因为求解数学题一般有两种方向：一个方向是直接的解题方法，即针对题目本身寻找新的解题方法，是硬碰硬的解题方向，一般比较难办到。本书不采用这一解题方向。另一方向是间接的解题方法，即利用化归思想将题目逐步化归为基本题，从而利用基本方法解决问题。这种化归法是一种能力——利用基本方法解决复杂问题的能力，这正是考试要考查的能力。正如四两拨千斤，是用“四两”把“千斤”化解、转化掉了，“拨”是化解、转化，而不是硬碰硬。从这个意义上说，解题方法都是基本方法。这一点，外面的书没有做到，而本书正做到了这一点。希望考生在做题时多用化归观念来寻找解题方法，学会“拨”题。当一道题做不好时，请想想课本上的基本方法。

本辅导讲义是专门为考研学生量身编写的，针对性很强。希望能给考研路上的学生指明复习方向，节省时间。祝大家考研成功！

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中难免有不足和疏漏之处，恳请读者和同行专家批评指正！

编者

2010 年 4 月

# 目　　录

## 高等数学

## 线性代数

## 概率论与数理统计

# 第一章　函数　极限　连续

**本章考试要求**

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示方法，会建立应用问题的函数关系.

2. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

3. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

4. 理解函数极限的概念和性质，理解函数左、右极限的概念，以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.

5. 掌握极限的四则运算法则和复合函数的极限运算法则，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

6. 理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限.

7. 利用洛必达法则求未定式极限的方法.

8. 了解数列极限和函数极限(包括左、右极限)的概念.

9. 掌握极限存在的两个准则，会利用极限存在的两个准则求极限.

10. 理解函数连续性的概念(含左、右连续)，会判断函数间断点的类型.

11. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最值、介值定理、零点定理)，并会应用这些性质.

## ☞第一节　函　　数

### 一、函数的定义

设 $x$ 和 $y$ 是两个变量，$D$ 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x\in D$，变量 $y$ 按照一定法则，总有唯一确定的数值 $y$ 和它对应，则称 $y$ 是 $x$ 的函数，记为 $y=f(x)$.

**注**　① 定义域 $D$ 是给定的，对任一个 $x\in D$ 的值，只有唯一的 $y$ 的值与之对应.

② 函数的两个要素：定义域和对应关系.

③ 同一个函数的判定：定义域相同且定义域内的点函数值相等.

④ 函数的表示方法只与定义域和对应关系有关，而与用什么字母表示无关，即 $f(t)$，$f(u)$ 是同一函数.

### 二、函数的表示方法

1. 显函数：由解析式 $y=f(x)$所确定的函数.

(1) 用一个解析式子表示的函数.

如：$y=x^2+2x+3$，$y=3\sin^2(2x+1)+4$.

(2) 分段函数：在定义域内不能用同一个式子表示的函数.

如：几个特殊函数(图形)

1) $y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$(绝对值函数)(见图 1)

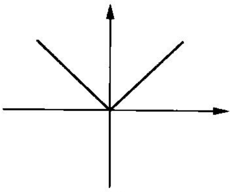

图1

2) $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ -1, & x<0 \end{cases}$(符号函数)(见图 2)

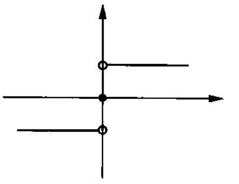

图2

3) $y=[x]$(取整函数)(见图 3)

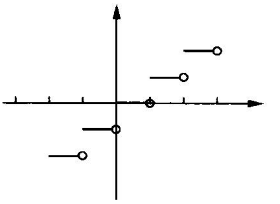

图3

2. 隐函数：由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数.

如：$x-y+1=0$，$y^5+2y-x-3x^7=0$

3. 由参数方程确定的函数：由参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 所确定的函数.

如：由参数方程确定的函数 $\begin{cases} x=t^3 \\ y=t^2 \end{cases}$.

4. 积分上限函数：由变上限积分所确定的函数.

如：$y=\int_0^{2x}\sin t^2\,\mathrm{d}t$；$y=\int_{\sin x}^{2x^2+3} t^2 \mathrm{e}^{\sin t}\,\mathrm{d}t$.

**三、函数的几种特性**

1. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 在数集 $X$ 上有定义，若存在正数 $M$，使得对于每一个 $x\in X$，都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称 $f(x)$ 在 $X$ 上有界. 否则，即这样的 $M$ 不存在，则称 $f(x)$ 在 $X$ 上无界，即对任何 $M>0$，总存在 $x_0\in X$，使 $|f(x_0)|>M$.

如：有界函数：$y=\sin x, x\in(-\infty,+\infty)$，　$y=\arctan x, x\in(-\infty,+\infty)$

无界函数：$y=\dfrac{1}{x}, x\in(0,1)$，　$y=\tan x, x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

2. 单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 上有定义，若对于 $I$ 上任意两点 $x_1$ 与 $x_2$，且 $x_1<x_2$ 时，均有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 上单调增加(或单调减少).

如果其中的"$<$"(或"$>$")改为"$\leqslant$"(或"$\geqslant$")，称函数 $f(x)$ 在 $I$ 上单调不减(或单调不增).

如：$y=\tan x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，即 $y$ 值随着 $x$ 值的增加而增加.

3. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-a,a)$，其中 $a>0$，

(1) 若对 $\forall x\in(-a,a)$ 都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数(其图像关于 $y$ 轴对称)；

(2) 若对 $\forall x\in(-a,a)$ 都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数(其图像关于原点对称).

4. 周期性

对于函数 $y=f(x)$，若存在常数 $T>0$，有 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为周期函

数，$T$ 称为 $f(x)$ 的周期.

## 四、反函数与复合函数

1. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的值域为 $D_y$，如果对于 $D_y$ 中任意一 $y$ 值，从关系式 $y=f(x)$ 中可确定唯一的 $x$ 值，则此时按照函数的定义，也确定了 $x$ 是 $y$ 的函数，称此函数为 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$.

习惯上把 $x=f^{-1}(y)$ 记成 $y=f^{-1}(x)$，则 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数.

**注**　这两个函数 $x$ 的范围是不同的，函数与自变量的记号无关.

如：$y=\dfrac{1+x}{1-x}$ 的反函数 $x=\dfrac{y-1}{y+1}$，习惯上记为 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

2. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $D_f$，函数 $u=g(x)$ 的定义域为 $D_g$，且值域 $g(D_g)\subset D_f$，则函数 $y=f[g(x)]$，$x\in D_g$ 称为由函数 $y=f(u)$ 和函数 $u=g(x)$ 构成的复合函数，定义域为 $D_g$，变量 $u$ 称为中间变量.

**注**　函数 $f$ 和 $g$ 能构成复合函数的条件是：函数 $g$ 在 $D_g$ 上的值域 $g(D)$ 必须含在函数 $f$ 的定义域 $D_f$ 内，即 $g(D_g)\subset D_f$；否则，不能构成复合函数.

如：$y=\sqrt{x}$，$u=\sin x-3$

由于 $x\geqslant0$，而 $u\leqslant-2$，所以 $y=\sqrt{x}$ 与 $u=\sin x-3$ 不能复合.

## 五、初等函数

1. 基本初等函数

(1) 幂函数 $y=x^u$，定义域与 $u$ 有关.

(2) 指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$，$x\in(-\infty,+\infty)$

(3) 对数函数：$y=\log_a x(a>0,a\neq1)$，$x\in(0,+\infty)$

**注**　① 当 $a=\mathrm{e}$ 时，记为 $y=\ln x$，称为自然对数.

② 当 $a=10$ 时，记为 $y=\lg x$ 称为常用对数.

(4) 三角函数：$y=\sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\sec x,\csc x$

(5) 反三角函数：$y=\arcsin x,\arccos x,\arctan x,\mathrm{arccot}\,x$

**注**　① 复杂的函数也是由这五类基本初等函数构成的，搞清楚它们的性质是很重要的.

② 函数 $y=C$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 称为常函数.

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合，并且在定义域内具有统一的解析表达式的函数称为初等函数.

**例 1**　设 $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，求 $\varphi(x)$ 的解析式及定义域.

**解**　$f[\varphi(x)]=\sin\varphi(x)=1-x^2\Longrightarrow\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$

$-1\leqslant1-x^2\leqslant1\Longrightarrow-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$，即 $\varphi(x)$ 的定义域为 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

**例 2**　设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & 0\leqslant x\leqslant1\\-2 & 1<x\leqslant2\end{cases}$，求 $f(2x+3)$ 的表达式及其定义域.

**解** $f(u)=\begin{cases}u^2 & 0\leqslant u\leqslant 1\\ -2 & 1<u\leqslant 2\end{cases}, u=2x+3$

$$f(2x+3)=\begin{cases}(2x+3)^2 & 0\leqslant 2x+3\leqslant 1\\ -2 & 1<2x+3\leqslant 2\end{cases}\Longrightarrow f(2x+3)=\begin{cases}(2x+3)^2 & -\dfrac{3}{2}\leqslant x\leqslant -1\\ -2 & -1<x\leqslant -\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

定义域 $x\in\left[-\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2}\right]$

**注** $f(x)$与$f(2x+3)$中的$x$是不同的,函数与自变量记号无关.

**例 3** 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0\\ x+2, & x>0\end{cases}, f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\geqslant 0\end{cases}$,求 $g(f(x))$.

**解** $g(f(x))=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0\\ f(x)+2, & f(x)>0\end{cases}\Longrightarrow f(x)=\begin{cases}2-(-x), & x\geqslant 0\\ 2+x^2, & x<0\end{cases}$.

**例 4** 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义,在区间$[0,2]$上 $f(x)=x(x^2-4)$,若对任意的 $x$ 都满足 $f(x)=2f(x+2)$,求 $f(x)$在$[-2,0)$上的表达式.

**解** 当$-2\leqslant x<0$时,$0\leqslant x+2<2$

当 $t\in[0,2]$时,$f(t)=t(t^2-4)$,所以 $f(x+2)=(x+2)((x+2)^2-4)$

有 $f(x)=2f(x+2)=2(x+2)(x^2+4x)$,$x\in[-2,0)$.

**注** ① $f(x)$在 $x=0$ 处是否可导?

② 若 $f(x)=kf(x+2)$,问 $k$ 取何值时,$f(x)$在 $x=0$ 处可导?

## ☞第二节　函数的极限

### 一、函数极限的概念与性质

1. 函数极限的定义

(1) **定义 1** 设函数 $y=f(x)$在 $x_0$ 的某个去心邻域内有定义,若对$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时,恒有$|f(x)-a|<\varepsilon$,则称 $y=f(x)$在 $x\to x_0$ 的极限为 $a$,记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$.

直观解释:$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$:当 $x$ 无限趋近 $x_0$ 时,函数 $f(x)$无限趋近常数 $a$.

**注** 定义的第一句话(设函数 $y=f(x)$在 $x_0$ 的某个去心邻域内有定义)告诉这样的结论:

① $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$与 $f(x)$在 $x_0$ 点是否有定义及 $f(x_0)$的大小无关.

② 极限是函数的局部性质,只与很邻近值有关.

(2) **定义 2** 设函数 $y=f(x)$在$|x|>E>0$内有定义,若对$\forall\varepsilon>0$,$\exists M>0$,使得当$|x|>M$时,恒有$|f(x)-a|<\varepsilon$,则称 $y=f(x)$在 $x\to\infty$的极限为 $a$,记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$.

直观解释:$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$:当$|x|$无限增大时,函数 $f(x)$无限趋近常数 $a$.

2. 左、右极限的定义

(1) 左极限:$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=a$

$$\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{当}-\delta<x-x_0<0\text{时,恒有}|f(x)-a|<\varepsilon.$$

（2）右极限：$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=a$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-a|<\varepsilon$.

如：$f(x)=\begin{cases}\sin 3x, & x<0\\ x^2+1, & x\geqslant 0\end{cases}$

$$\lim_{x\to 0-0}f(x)=\lim_{x\to 0-0}(\sin 3x)=0,\quad \lim_{x\to 0+0}f(x)=\lim_{x\to 0+0}(x^2+1)=1.$$

3．极限存在的充要条件

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=a$

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a$

**注**　分段函数在分段点处的极限，用此法.

4．函数极限的性质

（1）唯一性：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$（或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$）存在，则该极限唯一.

（2）局部有界性：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$（或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$），则存在 $x_0$ 的去心邻域（或 $|x|>M>0$），使 $f(x)$ 在此邻域（或 $|x|>M>0$）内有界.

**注**　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$，在 $x=0$ 处找不到去心邻域使之有界.

（3）局部保号性：设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，

① 若 $a>0$，则存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)>0$；

② 若 $a<0$，则存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)<0$.

**注**　① 若 $a=0$，是什么情况？

② 对 $x\to\infty$ 的情况，也有局部保号性.

**注**　对于工科类的考生，极限的定义，尤其是利用定义来求极限是一个不易掌握的内容. 不过考纲中不作重点要求，同学们只需要对概念准确理解即可.

**例 5**　求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}e^x$；$\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$；$\lim\limits_{x\to 1}e^{\frac{1}{x-1}}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0+0}\ln x$；$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$；$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$；

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$；$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x$；

（5）$\lim\limits_{n\to\infty}x^n$（$n$ 为自然数）；$\lim\limits_{x\to 0+0}x^p$；$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$.

**解**　（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^{-x}}=0\xRightarrow{\text{由于左右极限不相等}}\lim\limits_{x\to\infty}e^x$ 不存在

同理可得：$\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$ 不存在；$\lim\limits_{x\to 1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 不存在.

（2）$\lim\limits_{x\to 0+0}\ln x=-\infty$；$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 振荡不存在.

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}\Longrightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\tan x=-\infty\xrightarrow{\text{左右极限不相同}}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x$ 不存在极限

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=\begin{cases}1, & x=1\\ 0, & -1<x<1\\ \infty, & x\leqslant-1, x>1\end{cases}$; $\lim\limits_{x\to0+0}x^p=\begin{cases}0, & p>0\\ 1, & p=0;\\ \infty, & p<0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to0+0}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0+0}\frac{x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to0-0}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0-0}\frac{-x}{x}=-1\Longrightarrow\lim\limits_{x\to0}\frac{|x|}{x}$ 不存在

## 二、求函数极限的方法

1. 用极限四则运算法则求极限

设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}(\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq0)$

**注** ① $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=a\lim\limits_{x\to x_0}g(x)(\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a\neq0)$

② $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)+\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$（只要有一个存在可以）

**小注** 1）一个存在一个不存在，结论如何？

2）两个都不存在，结论如何？

2. 用复合函数的极限运算法则求极限

设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$.

如：(1) $\lim\limits_{x\to1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{t\to\infty}e^t$

(2) $\lim\limits_{x\to1+0}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{t\to+\infty}e^t$; $\lim\limits_{x\to1-0}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{t\to-\infty}e^t$.

3. 用两个重要极限求极限

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ 或 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

**注** $\lim\limits_{f(x)\to0}\frac{\sin[f(x)]}{f(x)}=1$; $\lim\limits_{f(x)\to0}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}=e$

**例 6** 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x+2}-\sqrt{x^2-2x-1})$

**解** 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x+3}{\sqrt{x^2+4x+2}+\sqrt{x^2-2x-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}}=3$

**注** $x\to-\infty$，$x\to\infty$如何？

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$

**解** 原式$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}}{x}+1+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2+\sin x}}{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{\dfrac{4x^2+x-1}{x^2}}+1+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}\sin x}}=1$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2\cos x}$

**解** 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\arctan(1+x^2)}{2\sin x+x\cos x}$

**解** 原式$=2\arctan1\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{2\sin x+x\cdot\cos x}=\dfrac{\pi}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2\cdot\dfrac{\sin x}{x}+\cos x}=\dfrac{\pi}{6}$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x+x^2}$

**解** 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{\sin x}{x}+x\sin\dfrac{1}{x}}{1+x}=1$

**总结** 若分子、分母极限都为无穷大或无穷小(未定式)，则总可以对分子、分母同除无穷大或无穷小，使分母的极限存在且不为零，再用四则运算法则求.

**例7** $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$

**解** $\lim\limits_{x\to0+0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to0+0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{x}\right)=1+\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}$

$$=1+\lim_{x\to0+0}\frac{(2+e^{\frac{1}{x}})/e^{\frac{4}{x}}}{(1+e^{\frac{4}{x}})/e^{\frac{4}{x}}}=1+0=1$$

$$\lim_{x\to0-0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0-0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1.$

4. 用等价无穷小求极限

(1) 无穷小的定义

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$，则称 $\alpha(x)$为 $x\to x_0$ 时的无穷小.

**注** $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有$|f(x)|<\varepsilon$ 能说明为什么称它为无穷小.

(2) 无穷小与极限存在之间的关系

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

**例 8** 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(x)-1}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2}\right]=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

**解** $\dfrac{f(x)-1}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2}=2+\alpha(x)$， $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$

$\Rightarrow f(x)=1+\dfrac{\sin x}{x}+(2+\alpha(x))\cdot x, \lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$

(3) 无穷小的运算

1) 加减：有限个无穷小的和差，仍然是无穷小.

2) 乘积：有限个无穷小的乘积，仍然是无穷小.

3) 无穷小与有界量的乘积，仍然是无穷小.

4) 无穷小与常数的乘积，仍然是无穷小.

**注** 无穷小的商如何?

(4) 无穷小的比较

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0, \lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=l$，

1) 若 $l\neq 0$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小；

2) 若 $l=1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小，记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$；

3) 若 $l=0$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小，记为 $\alpha(x)=0(\beta(x))$；

4) 若 $l=\infty$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的低阶无穷小；

5) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=l\neq 0$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 $k$ 阶无穷小.

常用等价无穷小：

1) 当 $k(x)\to 0$ 时，$\sin k(x)\sim k(x)$；$1-\cos k(x)\sim\dfrac{1}{2}[k(x)]^2$；$\ln(1+k(x))\sim k(x)$；

$\arcsin k(x)\sim k(x)$；$\arctan k(x)\sim k(x)$；$e^{k(x)}-1\sim k(x)$；$a^{k(x)}-1\sim k(x)\ln a$；

$[1+k(x)]^{\alpha}-1\sim\alpha k(x)$.

2) $\ln k(x)\sim k(x)-1$，其中 $k(x)\to 1$

3) $\alpha(x)+o(\alpha(x))\sim\alpha(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$

(5) 利用等价无穷小求极限

**定理** 设 $\alpha(x)\sim\alpha_1(x), \beta(x)\sim\beta_1(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)\alpha(x)}{g(x)\beta(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)\alpha_1(x)}{g(x)\beta_1(x)}$.

**例 9** 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

**解** 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cdot\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$

**解** 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{\sin x}\cdot\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=\dfrac{1}{6}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x+(1-\cos x)}{\ln(1-2x)+(1-e^{x^2})}$

**解法 1**　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\ln(1-2x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x}=-\dfrac{1}{2}$

**解法 2**　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\tan x}{x}+\dfrac{1-\cos x}{x}}{\dfrac{\ln(1-2x)}{x}+\dfrac{(1-e^{x^2})}{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-e^{x^2})}{x}}=-\dfrac{1}{2}$

**例 10**　设 $f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\,dt$, $g(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}$,则当 $x\to 0$ 时,$f(x)$是 $g(x)$的(　　)

(A) 低阶无穷小　　(B) 高阶无穷小

(C) 等价无穷小　　(D) 同阶但不等价

**解**　根据 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$的值 $0,\infty,\alpha\neq 0$ 进行判断.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\,dt}{\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}}=\lim_{x\to 0}\frac{[\sin(1-\cos x)^2]\sin x}{x^4+x^5}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{x^3+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{4}x^4}{x^3+x^4}=0$$

答案(B)

**例 11**　设当 $x\to 0$ 时,$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小,而 $x\sin x^n$ 是比 $e^{x^2}-1$ 高阶的无穷小,求正整数 $n$.

**解**　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\ln(1+x^2)}{x\cdot\sin x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}x^2\cdot x^2}{x^{n+1}}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}x^{3-n}=0\Longrightarrow 3-n>0\Longrightarrow n<3.$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x^n}{e^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{n+1}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}x^{n-1}=0\Longrightarrow n-1>0\Longrightarrow n>1$,　∴　$n=2$.

(6) 无穷大的定义

当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,$|f(x)|$无限增大,则称 $f(x)$在 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)为无穷大,记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty\Longleftrightarrow$对任意 $M>0$,存在 $\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,$|f(x)|>M$.

**注**　① 无穷大是极限不存在的一种形式.

② 无穷大与无穷小之间的关系:在自变量的同一变化过程中,若 $f(x)$为无穷大,则 $\dfrac{1}{f(x)}$必为无穷小;反之,若 $f(x)$为无穷小,且 $f(x)\neq 0$,则$\dfrac{1}{f(x)}$必为无穷大.

③ 无穷大没有大小之分,只有趋于无穷大的快慢之分.

④ 无穷大的四则运算.

⑤ 无穷大与无界函数的关系:无穷大$\Longrightarrow$无界函数;但反之,不成立.

**例 12**　当 $x\to+\infty$时,$f(x)=x\sin x$ 是(　　)