

精

雕

高中数理化生

公式定理

策划总监 杨晨

图解

主 编

贺双桂
唐茂春
陈连清
周筱芳



GAOZHONGSHULIHUASHENG
GONGSHIDINGLI TUJIE

必修+选修



GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS
广西师范大学出版社

细

琢



GAOZHONG SHULIHUASHENG

GONGSHI·DINGLI TUJIE

高中数理化生 公式定理 图解

主 编

贺双桂

唐茂春

陈连清

周筱芳



GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS

广西师范大学出版社

· 桂林 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

高中数理化生公式定理图解 / 贺双桂等主编. — 桂林:
广西师范大学出版社, 2009.7
ISBN 978-7-5633-8333-7

I. 高… II. 贺… III. ①理科 (教育) — 公式 — 高中 —
教学参考资料②理科 (教育) — 定律 — 高中 — 教学参考
资料 IV. G634.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 088826 号

广西师范大学出版社出版发行

(广西桂林市中华路 22 号 邮政编码: 541001)
网址: <http://www.bbtpress.com>

出版人: 何林夏

全国新华书店经销

广西师范大学印刷厂印刷

(广西桂林市临桂县金山路 168 号 邮政编码: 541100)

开本: 890 mm × 1 240 mm 1/32

印张: 11 字数: 545 千字

2009 年 7 月第 1 版 2009 年 7 月第 1 次印刷

印数: 00 001 ~ 30 000 册 定价: 20.00 元

如发现印装质量问题, 影响阅读, 请与印刷厂联系调换。

修订说明

从1997年首次出版到本次修订,《高中数理化生公式定理图解》问世十多年了。十多年来,我们紧跟我国课程与教材改革的步伐,对本书进行不断修订、完善。我们这种努力得到读者的认可:本书累计印数已逾百万。本次修订,在保持其传统风格和优势的基础上,针对新课标的要求和课标版教材的特点,融入新课标理念,对词条和举例作了全面更新;引入了先进的思维方法——思维导图,将单一的知识梳理变为知识梳理与学习方法指导相结合。总体上看,修订后的本书具有以下三大特点:

词条选录全面、系统 本书按学科分编为数学、物理、化学、生物四个部分,按知识模块编写,收入新课程标准规定的全部必修和选修内容;在词条编排上,按学科体系、内容特点和知识内在规律,根据“强干去枝”的原则,将基本概念、规律、公式、定理整理成系统、有序的词条,方便读者查阅。

重点词条附加应用提示与相关链接 本书对重点词条配以“应用提示”和“相关链接”,进行深入浅出的辨析与应用点拨,揭示公式、定理、概念与实际应用的内在联系,启迪读者思维;对相关概念、规律、公式、定理进行图解、表解比较,分类归纳,更有利于读者对知识的理解和记忆。

用思维导图梳理知识 思维导图是英国著名的心理学家、教育学家托尼·巴赞(Tony Buzan)创造的组织性思维工具,是一种有效的学习记忆策略。它可以把知识按逻辑、类别、结构组织起来,形成一个内在相互关联的知识矩阵系,因此既是一种思维工具,又是一种把书“由厚读到薄”的学习记忆方法。在本书修订时,我们引入了这种有效的方法,设计“识记导图”和“考学方略”来构建知识体系,归纳学习方法,目的是使读者在阅读中对知识的理解和记忆变得更轻松、更快捷、更牢固。

用图形化的方式呈现词条 在部分词条中,我们运用了思维导图的方法,将内容以图形的形式呈现出来,目的是使读者能迅速、有效地把握知识的内在联系,从而更好地理解 and 记忆词条内容。

本书不仅是集理论知识和实际应用于一体的大全,而且是一本对学生正确理解和掌握数学、物理、化学、生物的基础知识、基本理论,解决实际问题,提高学习效率和学习能力都有帮助的工具书,我们殷切地希望它永远是广大高中学生学习、复习中的良师益友。

编 者

“中学数理化生公式定理图解”编写委员会

丛书总主编 贺双桂 陈仲芳

丛书编委(按姓氏笔画排序)

于锦华 马文玉 毛 敏 王小健 王晓东 邓明发 伍代刚

刘良书 吕俊文 朱复辉 闫 丽 阳 玲 阳文凤 阳桥明

张进新 张桂英 李红林 李定威 杨友民 杨连爱 杨海燕

谷 平 邵 文 陈元芳 陈凤华 陈连清 陈贵友 周 芳

周智强 周筱芳 贺双桂 凌海波 唐 珩 唐茂春 欧阳建平

徐玉送 莫绍双 黄 燕 黄思红 黄海红 黄靖君 黄耀昌

龚桂珏 曾 刚 葛 静 蒋青梅 蒋新华 潘薇羽

丛书策划 陈仲芳 马文玉



目录

数学

I 必修部分

一、集合…1

1. 集合的含义与表示…1
2. 集合间的基本关系…2
3. 集合的运算…3

二、函数概念…4

1. 函数及其表示…4
2. 函数的基本性质…6

三、基本初等函数 I…8

1. 指数函数…8
2. 对数函数…8
3. 幂函数…10
4. 函数的应用…10

四、基本初等函数 II…12

1. 三角函数…12
2. 三角恒等变换…16
3. 三角函数的图象和性质…19
4. 解三角形…21

五、立体几何初步…23

(一)空间几何体…23

1. 空间几何体的结构…23
2. 三视图…26
3. 表面积与体积…26

(二)点、直线、平面之间的位置关系…28

1. 空间点、直线、平面之间的位置关系…28
2. 直线、平面平行、垂直的判定与性质…31

六、平面解析几何初步…36

(一)直线与方程…36

(二)圆与方程…39

七、算法初步…42

1. 算法与程序框图…42
2. 基本算法语句…44
3. 算法案例…46

八、统计与概率…48

1. 统计…48
2. 概率…50

九、平面上的向量…53

十、数列…56

十一、不等式…61

1. 不等式的性质…61
2. 不等式的证明…62
3. 解不等式…64
4. 不等式的应用举例…67

II 选修部分

一、常用逻辑用语…69

二、圆锥曲线与方程…72

1. 椭圆…72
2. 双曲线…73
3. 抛物线…74

三、导数及其应用…78

1. 导数的概念…78
2. 导数的计算…79
3. 导数的应用…80

四、统计案例…81

五、推理与证明…83

六、数系的扩充与复数的引入…84

1. 复数…84
2. 复数的运算…85

七、框图…87

八、空间中的向量与立体几何…88

1. 空间向量及其运算…88
2. 立体几何中的向量方法…91

九、计数原理…93

1. 排列、组合...93

2. 二项式定理...95

十、概率...97

附录 数学解题思想方法...102

2

物理

I 必修部分

一、直线运动...105

二、力...108

三、牛顿运动定律...113

四、曲线运动...115

五、万有引力定律...117

六、机械能...119

II 选修部分

电磁学

一、静电场...123

二、恒定电流...131

三、磁场...141

四、电磁感应...147

五、交变电流...152

热学

六、分子热运动 能量守恒...157

七、固体、液体和气体...160

力学

八、机械振动...163

九、机械波...165

十、物体的平衡...168

十一、动量...170

光学

十二、光的传播...172

十三、光的波动性...177

近代物理基础

十四、量子论初步...180

十五、原子核...183

附录 各种常用物理规律数据表

附录 1 常用的物理常量...187

附录 2 国际单位制(SI)基本单位表...187

附录 3 常用物理量及其国际单位制单位表...188

化学

I 必修部分

一、基本概念和基础理论

(一)物质的量...189

1. 物质的量...189

2. 摩尔质量...190

3. 气体摩尔体积...190

4. 物质的量浓度...190

(二)胶体的性质及其应用...192

1. 胶体...192

2. 胶体的性质及其应用...193

(三)化学反应及其能量变化...194

1. 氧化还原反应...194

2. 电解质与非电解质 强电解质与弱电解质...197

3. 离子反应...198

4. 化学反应中的能量变化...199

(四)元素周期表与元素周期律...201

1. 元素周期律...201

2. 元素周期表...201

3. 化学键...204

二、元素及其化合物

(一)碱金属...206

1. 钠...206

2. 钠的化合物...207

3. 碱金属元素...208

(二)几种重要的金属...209

1. 金属...209

2. 铝...209

3. 铁和铁的化合物...210

4. 金属的冶炼...212

5. 原电池原理及应用...213

(三)碳族元素 硅及其化合物...214

1. 碳族元素...214

2. 硅和二氧化硅...215

3. 无机非金属材料...216

(四)卤素 氯及其化合物...217

1. 氯气...217

2. 卤族元素...218

(五)氧族元素 硫及其化合物...220

1. 氧族元素...220

2. 二氧化硫...222

3. 硫酸...223

4. 环境保护...224

(六)氮族元素 氮及其化合物...224

1. 氮族元素...224

2. 氨...225

3. 氨 铵盐...226

4. 硝酸...227

5. 氧化还原反应方程式的配平...228

(七)有机化合物...230

1. 基本概念...230

2. 甲烷、乙烯、苯的比较...231

3. 乙醇 乙酸...232

4. 糖 油 脂 蛋白质...234

5. 石油的综合利用...234

II 选修部分

一、物质结构与性质

1. 原子结构...235

2. 非极性分子与极性分子...236

3. 离子晶体、分子晶体和原子晶体...236

4. 金属晶体...237

二、化学反应原理

(一)化学平衡...237

1. 化学反应速率...237

2. 化学平衡...238

3. 影响化学平衡移动的条件...240

4. 合成氨条件的选择...242

(二)电离平衡...243

1. 电离平衡...243

2. 水的电离和溶液的 pH...243

3. 盐类的水解...245

4. 酸碱中和和滴定...248

(三)电解原理及其应用...249

三、有机化学基础

(一)烃...251

1. 烃...251

2. 烷烃、烯烃的命名...252

3. 同分异构体的有关知识...252

4. 烷烃、烯烃、炔烃、苯及苯的同系物的比较...253

5. 烃的基本实验...254

6. 有关烃的计算类型...254

7. 有机物分子中原子共面、共线问题...256

(二)烃的衍生物...256

1. 烃的衍生物...256

2. 烃的衍生物的重要类别和主要化学性质...257

3. 有机反应的主要类型...259

4. 有机物的分离和提纯的方法...259

5. 有机物的燃烧规律...260

6. 求算烃的衍生物分子式的基本方法...261

(三)糖类 油脂 蛋白质...261

1. 糖类...261

2. 淀粉和纤维素...262

3. 油脂...263

4. 蛋白质...264

(四)合成材料...265

1. 有机高分子的基本知识...265

2. 有机高分子化合物的结构、性质特点...266

3. 合成材料...266

4. 新型有机高分子材料...266

四、化学工业

1. 硫酸工业...267

2. 氯碱工业...268

3. 合成氨工业...268

4. 硅酸盐工业...268

五、化学实验

1. 制备实验方案的设计...269

2. 性质实验方案的设计...269

3. 物质检验实验方案的设计...269

4. 化学实验方案设计的基本要求...270

附录

附录 1 部分酸、碱和盐的溶解性表(20℃)
...271

附录 2 元素周期表...272

生物

必修 1 分子与细胞

一、走近细胞...273

1. 从生物圈到细胞...273

2. 细胞的多样性和统一性...273

二、组成细胞的分子...274

1. 细胞中的化学元素和化合物...274

2. 生命活动的主要承担者——蛋白质...275

3. 遗传信息的携带者——核酸...275

4. 细胞中的糖类和脂质...276

5. 细胞中的无机物...277

三、细胞的基本结构...277

1. 细胞膜——系统的边界...278

2. 细胞器——系统内的分工合作...278

3. 细胞核——系统的控制中心...280

四、细胞的物质输入和输出...280

1. 物质跨膜运输的实例...280

2. 生物膜的流动镶嵌模型...281

3. 物质跨膜运输的方式...282

五、细胞的能量供应和利用...282

1. 降低化学反应活化能的酶...282

2. 细胞的能量“通货”——ATP...283

3. ATP 的主要来源——细胞呼吸...283

4. 能量之源——光与光合作用...285

六、细胞的生命历程...287

1. 细胞的增殖...287

2. 细胞的分化...288

3. 细胞的衰老和凋亡...289

4. 细胞的癌变...289

必修 2 遗传与进化

一、遗传因子的发现...290

(一)孟德尔的豌豆杂交实验一...290

1. 遗传的基本定律所涉及的基本概念...290

2. 一对相对性状的杂交实验...291

(二)孟德尔的豌豆杂交实验二...293

二、基因和染色体的关系...295

1. 减数分裂和受精作用...295

2. 基因在染色体上...296

3. 伴性遗传...297

三、基因的本质...298

1. DNA 是主要的遗传物质...298
2. DNA 分子的结构...299
3. DNA 的复制...300
4. 基因是有遗传效应的 DNA 片段...301
- 四、基因的表达...301
 1. 基因指导蛋白质的合成...301
 2. 基因对性状的控制...302
- 五、基因突变及其他变异...303
 1. 基因突变和基因重组...303
 2. 染色体变异...303
 3. 人类遗传病...304
- 六、从杂交育种到基因工程...305
 1. 杂交育种与诱变育种...305
 2. 基因工程的原理...306
 3. 基因工程的应用...306
- 七、现代生物进化理论...306
 - (一)现代生物进化理论的由来...306
 - (二)现代生物进化理论的主要内容...307
 1. 种群基因频率的改变与生物进化...307
 2. 隔离与物种的形成...307
 3. 共同进化与生物多样性的形成...307

必修 3 稳态与环境

- 一、人体的内环境与稳态...308
 1. 细胞生活的环境...308
 2. 内环境稳态的重要性...308
- 二、动物和人体生命活动的调节...309
 1. 通过神经系统的调节...309
 2. 通过激素的调节...311
 3. 神经调节与体液调节的关系...312
 4. 免疫调节...312
- 三、植物的激素调节...313
 1. 植物生长素的发现...314
 2. 生长素的生理作用...315
 3. 其他植物激素...315
- 四、种群和群落...316
 1. 种群的特征...316
 2. 种群数量的变化...317
 3. 群落的结构...317
 4. 群落的演替...318
- 五、生态系统及其稳定性...319
 1. 生态系统的结构...319
 2. 生态系统的能量流动...320
 3. 生态系统的物质循环...321
 4. 生态系统的信息传递...321
 5. 生态系统的稳定性...321
- 六、生态环境的保护...322
 1. 人口增长对生态环境的影响...322
 2. 保护我们共同的家園...322

选修 1 生物技术实践

- (一)传统发酵技术的应用...323
 1. 果酒和果醋的制作...323
 2. 腐乳的制作...323
 3. 制作泡菜并检测亚硝酸盐含量...324
- (二)微生物的培养与应用...324

1. 微生物的实验室培养...324
2. 土壤中分解尿素的细菌的分离与计数...325
3. 分解纤维素的微生物的分离...325
- (三)植物的组织培养技术...326
 1. 菊花的组织培养...326
 2. 月季的花药培养...326
- (四)酶的研究与应用...327
 1. 果胶酶在果汁生产中的作用...327
 2. 探讨加酶洗衣粉的洗涤效果...327
 3. 酵母细胞的固定化...327
- (五)DNA 和蛋白质技术...327
 1. DNA 的粗提取与鉴定...327
 2. 多聚酶链式反应扩增 DNA 片段...327
 3. 血红蛋白的提取和分离...328
- (六)植物有效成分的提取...328
 1. 植物芳香油的提取...328
 2. 胡萝卜素的提取...328

选修 2 生物科学与社会

- (一)生物科学与健康...329
 1. 抗生素的合理使用...329
 2. 基因诊断与基因治疗...329
 3. 人体的器官移植...330
 4. 生殖健康...330
- (二)生物科学与农业...330
 1. 农业生产中的繁殖控制技术...330
 2. 现代生物技术在育种上的应用...331
 3. 植物病虫害的防治原理和方法...331
 4. 动物疫病控制...332
 5. 绿色食品的生产...332
 6. 设施农业...332
- (三)生物科学与工业...333
 1. 微生物发酵及其应用...333
 2. 酶在工业生产中的应用...333
 3. 生物技术药物与疫苗...333
- (四)生物科学与环境保护...333
 1. 生物性污染及其预防...333
 2. 生物净化的原理及其应用...334
 3. 关注生物资源的合理利用...334
 4. 倡导绿色消费...334

选修 3 现代生物科技专题

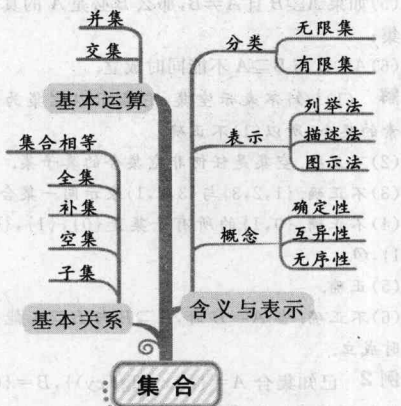
- (一)基因工程...335
 1. DNA 重组技术的基本工具...335
 2. 基因工程的基本操作程序...336
 3. 基因工程的应用...336
 4. 蛋白质工程的崛起...337
- (二)细胞工程...337
 1. 植物细胞工程...337
 2. 植物细胞工程的实际应用...337
 3. 动物细胞工程...337
- (三)胚胎工程...339
 1. 早期胚胎发育...339
 2. 胚胎工程...339
- (四)生物技术的安全性和伦理问题...339
- (五)生态工程...339

I 必修部分

一、集合

识记导图

把握全局



概念图解

掌握要领

1. 集合的含义与表示

集合

是一个原始概念，只能作描述性的说明。某些指定的对象聚集在一起就成为一个集合，简称集

定义

确定性：对于一个给定的集合，集合中的元素是确定的

集合元素的性质

无序性：集合里的元素的构成，与其元素的顺序无关

互异性：一个集合里不允许有相同的元素重复出现

表示方法

列举法：把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法

描述法：把集合中元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法

相关链接

● 点、线、面等概念是几何中原始的、不加定义的概念，集合则是集合论中原始的不加定义的概念。

【元素】 集合中的每个对象叫做这个集合的元素。

【有限集与无限集】 含有有限个元素的集

合叫做有限集;含有无限个元素的集合叫做无限集.

【属于与不属于】 如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A ,记作 $a \in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于 A ,记作 $a \notin A$.例如,设 B 表示集合 $\{1,2,3,4,5\}$,则 $5 \in B, \frac{2}{3} \notin B$.

应用提示 <<<

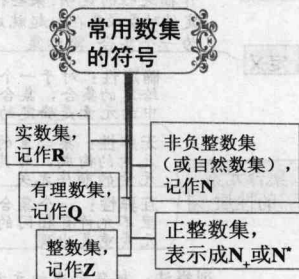
● (1) 可以分别用两种方法表示集合.例如“小于 π 的自然数组成的集合”就可以表示为:

- ① 列举法: $\{0,1,2,3\}$;
- ② 描述法: $\{x \in \mathbb{N} | 0 \leq x < \pi\}$.

● (2) 不宜用列举法表示的集合.例如“由小于 π 的正实数组成的集合”就不宜用列举法表示,因为不能将这个集合中的元素一一列举出来,这个集合可用描述法表示: $\{x | 0 < x < \pi\}$.

● (3) 用描述法表示集合,要特别注意这个集合中的元素是什么,它应该符合什么条件,从而准确理解集合的意义.例如,集合 $\{x | y = \sqrt{x}\}$ 中的元素是 x ,集合 $\{y | y = \sqrt{x}\}$ 中的元素是 y ,集合 $\{(x,y) | y = \sqrt{x}\}$ 中的元素是点 (x,y) .

【常用数集的符号】



相关链接 <<<

● 自然数集与非负整数集是相同的集合,也就是说自然数集中含有数 0.

2. 集合间的基本关系

【空集】 不含任何元素的集合叫做空集,记作 $\emptyset$,例如 $\{x | x^2 + 1 = 0, x \in \mathbb{R}\}$,这个集合是不含任何元素的.

【子集】 对于两个集合 A 与 B ,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,我们就说

集合 A 包含于集合 B ,或集合 B 包含集合 A ,记作 $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$).当集合 A 不包含于集合 B ,或集合 B 不包含集合 A 时,则记作 $A \not\subseteq B$ (或 $B \not\supseteq A$).

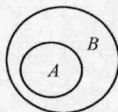
【集合相等】 对于两个集合 A 与 B ,如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素,同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素,我们就说集合 A 等于集合 B ,记作 $A = B$.

【真子集】 对于两个集合 A 与 B ,如果 $A \subseteq B$,并且 $A \neq B$,那么集合 A 叫做集合 B 的真子集,记作 $A \subset B$ (或 $B \supset A$).

应用提示 <<<

- (1) 对于任一集合 A 都有, $A \subseteq A$.
- (2) 对于集合 A, B, C ,若 $A \subseteq B, B \subseteq C$,则 $A \subseteq C$;若 $A \subset B, B \subset C$,则 $A \subset C$.

【韦恩图】 用一个圆或者一条封闭曲线直观地表示集合及其关系的图形称为韦恩图,也称 Venn 图,如图所示.



例 1 判断下列说法是否正确,如果不正确,请加以改正.

- (1) $\{\emptyset\}$ 表示空集;
- (2) 空集是任何集合的真子集;
- (3) $\{1,2,3\}$ 不是 $\{3,2,1\}$;
- (4) $\{0,1\}$ 的所有子集是 $\{\emptyset\}, \{1\}, \{0,1\}$;
- (5) 如果 $A \supseteq B$ 且 $A \neq B$,那么 B 必是 A 的真子集;
- (6) $A \supseteq B$ 与 $B \supseteq A$ 不能同时成立.

解 (1) $\{\emptyset\}$ 不表示空集,它表示以空集为元素的集合,所以(1)不正确.

(2) 不正确.空集是任何非空集合的真子集.

(3) 不正确. $\{1,2,3\}$ 与 $\{3,2,1\}$ 表示同一集合.

(4) 不正确. $\{0,1\}$ 的所有子集是 $\{\emptyset\}, \{1\}, \{0,1\}$.

(5) 正确.

(6) 不正确.当 $A = B$ 时, $A \supseteq B$ 与 $B \supseteq A$ 能同时成立.

例 2 已知集合 $A = \{x, xy, \lg(xy)\}$, $B = \{0, |x|, y\}$ 且 $A = B$,求 x, y 的值.

解 由 $A = B$ 可知,必有 $\lg(xy) = 0$,即 $xy = 1$.若 $xy = y$,则 $x = 1$,于是 $x = xy$,与集合 A 中元素互异性矛盾,故 $xy = |x|$,即 $x = y = -1$ 符合题意,此时, $A = B = \{1, -1, 0\}$,所以 $x = y =$

-1.

【全集和补集】 设 S 是一个集合, A 是 S 的一个子集 (即 $A \subseteq S$), 由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合,



叫做 S 中子集 A 的补集 (或余集), 记作 $\complement_S A$,

即 $\complement_S A = \{x | x \in S, \text{ 且 } x \notin A\}$. 用韦恩图表示, 如图中阴影部分.

相关链接

把实数集 $\mathbf{R}$ 看作全集 U , 有理数集 $\mathbf{Q}$ 的补集 $\complement_U \mathbf{Q}$ 就是全体无理数的集合.

例 设全集 $S = \mathbf{R}$, $A = \{x | x < -1, \text{ 或 } x > 1\}$, $B = \{x | x - 2 \geq 0\}$, 判断 $\complement_S A$ 与 $\complement_S B$ 之间的关系.

解 $\because A = \{x | x < -1, \text{ 或 } x > 1\},$

$$\therefore \complement_S A = \{x | -1 \leq x \leq 1\}.$$

$$\because B = \{x | x - 2 \geq 0\},$$

$$\therefore \complement_S B = \{x | x < 2\}.$$

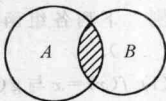
$$\therefore \complement_S A \subseteq \complement_S B.$$

3. 集合的运算

【交集】 由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合, 叫做 A, B 的交集, 记作 $A \cap B$, 读作“ A 交 B ”, 即 $A \cap B = \{x | x \in A, \text{ 且 } x \in B\}$. 用 Venn 图表示, 如图阴影部分.

应用提示

对于任意集合 A, B , 有 $A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap B = B \cap A$.



【并集】 由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合, 叫做 A, B 的并集, 记作 $A \cup B$, 读作“ A 并 B ”, 即 $A \cup B = \{x | x \in A, \text{ 或 } x \in B\}$. 用 Venn 图表示, 如图阴影部分.



应用提示

对于任何集合 A, B , 有 $A \cup A = A, A \cup$

$$\emptyset = A, A \cup B = B \cup A.$$

例 1 若 A, B, C 为三个集合, $A \cup B = B \cap C$, 则一定有 ().

A. $A \subseteq C$

B. $C \subseteq A$

C. $A \neq C$

D. $A = \emptyset$

解 由 $A \cup B = B \cap C$ 知, $A \cup B \subseteq B, A \cup B \subseteq C, \therefore A \subseteq B \subseteq C$. 故选 A.

例 2 若集合 $A = \{x | x^2 + ax + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$,

集合 $B = \{1, 2\}$, 且 $\complement_{\mathbf{R}} A \supseteq \complement_{\mathbf{R}} B$, 求实数 a 的取值范围.

解 (1) 若 $A = \emptyset$, 则 $\Delta = a^2 - 4 < 0$, 解得 $-2 < a < 2$, 符合题意.

(2) 若 $1 \in A$, 则 $1^2 + a + 1 = 0$, 解得 $a = -2$, 此时 $A = \{1\}$, 符合题意.

(3) 若 $2 \in A$, 则 $2^2 + 2a + 1 = 0$, 解得 $a = -\frac{5}{2}$,

此时 $A = \left\{2, \frac{1}{2}\right\}$, 不合题意.

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $[-2, 2)$.

【集合的元素个数】 在研究集合时, 会遇到有关集合中的元素个数问题. 我们把有限集合 A 的元素个数记作 $\text{card}(A)$. 例如, $A = \{a, b, c\}$, 则 $\text{card}(A) = 3$, 对任意两个有限集合 A, B , 有 $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$. 上述结论也称作“容斥原理”.

考学方略

致胜法宝

化简集合是实施运算的前提, 等价转化常是顺利解题的关键

集合问题

要充分发挥数轴或 Venn 图的作用

抓住集合中元素的三个特征, 对互异性要注意检验

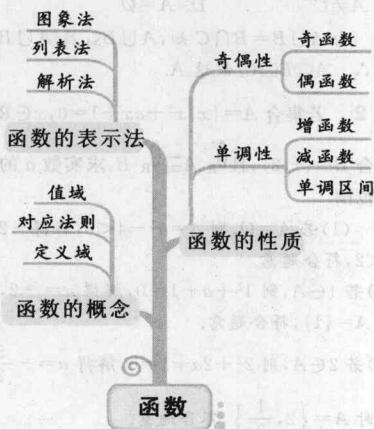
关于空集 空集是任何集合的子集, 是任何非空集合的真子集, 且两个集合的交、并、补还可能为空集

准确识别集合 要学会抓住集合的代表元素去弄清集合的元素是什么

二、函数概念

识记导图

把握全局



概念图解

掌握要领

1. 函数及其表示

【映射】 设 A, B 是两个集合, 如果按照某个对应法则 f , 对于集合 A 中的任何一个元素, 在集合 B 中都有唯一的元素和它对应, 这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的映射, 记作 $f: A \rightarrow B$.

【象和原象】 如果给定一个从集合 A 到集合 B 的映射, 那么 A 中的元素 a 所对应的 B 中的元素 b 叫做 a 的象, a 叫做 b 的原象.

【一一映射】 如果映射 $f: A \rightarrow B$ 满足: 集合 A 中不同的元素在集合 B 中有不同的象, 并且集合 B 中的每一个元素都有原象, 那么这个映射就叫做 A 到 B 上的一一映射.

例 1 下列集合 A 到集合 B 的对应中, 判断哪些是 A 到 B 的映射? 哪些是 A 到 B 的一一映射?

(1) $A = \mathbf{N}, B = \mathbf{Z}$, 对应法则 $f: x \rightarrow y = -x, x \in A, y \in B$.

(2) $A = \mathbf{R}^+, B = \mathbf{R}^+, f: x \rightarrow y = \frac{1}{x}, x \in A, y \in B$.

(3) $A = \mathbf{N}_+, B = \{0, 1\}$, 对应法则 f : 除以 2 得的余数.

(4) $A = \{-4, -1, 1, 4\}, B = \{-2, -1, 1, 2\}$, 对应法则 $f: x \rightarrow y = \pm\sqrt{x}, x \in A, y \in B$.

解 (1) 是映射, 不是一一映射, 因为集合 B 中有些元素 (正整数) 没有原象.

(2) 是映射, 是一一映射. 不同的正实数有不同的唯一的倒数, 且仍是正实数, 任何一个正实数都存在倒数.

(3) 是映射, 不是一一映射, 因为集合 A 中不同元素对应集合 B 中相同的元素.

(4) 不是映射, 因为集合 A 中的元素 (如 4) 对应集合 B 中两个元素 (2 和 -2).

例 2 (1) $A = \mathbf{N}, B = \mathbf{R}, f: x \rightarrow y = \frac{2x-1}{2x+1}, x \in A, y \in B$. 在 f 的作用下, $\frac{11}{13}$ 的原象是多少? 14 的象是多少?

(2) $f: A \rightarrow B$ 是从 A 到 B 的映射, 其中 $A = \mathbf{R}, B = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}\}, f: x \rightarrow (x+1, x^2+1)$, 则 A 中元素 $\sqrt{2}$ 的象是多少? B 中元素 $(2, 2)$ 的原象是多少?

解 (1) 由 $\frac{2x-1}{2x+1} = \frac{11}{13}$, 解得 $x = 6$, 故 $\frac{11}{13}$ 的原象是 6. 又 $\frac{2 \times 14 - 1}{2 \times 14 + 1} = \frac{27}{29}$, 故 14 的象是 $\frac{27}{29}$.

(2) $\sqrt{2}$ 的象是 $(\sqrt{2}+1, 3)$, 由 $\begin{cases} x+1=2, \\ x^2+1=2 \end{cases}$ 解得 $x = 1$, 故 $(2, 2)$ 的原象是 1.

【函数】 如果 A, B 都是非空的数集, 那么 A 到 B 的映射 $f: A \rightarrow B$ 就叫做 A 到 B 的函数, 记作 $y = f(x)$. 其中原象集合 A 称为定义域, 象集 $C (C \subseteq B)$ 称为值域.

例 下列各组函数中, 表示同一函数的是 ().

(1) $f(x) = x$ 与 $g(x) = (\sqrt{x})^2$.

(2) $f(x) = x$ 与 $g(x) = \sqrt[3]{x^3}$.

(3) $f(x) = x|x|$ 与

$g(x) = \begin{cases} x^2 & (x > 0), \\ -x^2 & (x < 0). \end{cases}$

(4) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $g(x) = x+1 (x \neq 1)$.

解 (1), (3) 中的 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同, 不是同一函数; (2), (4) 中的函数, 定义域相同, 且对应法则也相同, 所以此时的 $f(x)$ 与 $g(x)$ 表示同一函数.

应用提示

● 值域是由定义域与对应法则确定的. 两个函数当且仅当其定义域与对应法则相同才是相同的函数.

【区间】

区间

设 a, b 是两个实数, 且 $a < b$, 规定:

满足 $a < x < b$ 的实数 x 的集合叫做开区间, 表示为 (a, b)

闭区间

满足 $a \leq x \leq b$ 的实数 x 的集合叫做闭区间, 表示为 $[a, b]$

开区间

满足 $a < x < b$ 及 $a < x \leq b$ 的实数 x 的集合叫做半开半闭区间, 分别表示为 $[a, b)$, $(a, b]$. 这里的实数 a, b 都叫做相应区间的端点.

半开半闭区间

满足 $x > a, x > a, x < b, x < b$ 的实数 x 的集合都称为无穷区间. 分别表示为 $[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$. 全体实数也可以用区间表示为 $(-\infty, +\infty)$

无穷区间

【分段函数】 函数 $y=f(x)$ 中, 对于自变量 x 的不同取值有着不同的对应法则, 这样的函数, 通常称为分段函数; 如函数

$$y=f(x)=\begin{cases} 2x, & x \in [a, +\infty), \\ 1, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

就是分段函数.

相关链接

● 分段函数是一个函数, 而不是几个函数.

【函数的定义域】 函数关系中自变量可取值集合叫做函数的定义域.

应用提示

● 求函数定义域时, 应注意分式的分母非零; 偶次方根中被开方数为非负数; 对数的真数为正数, 底数大于零且不等于 1; 零指数和负指数幂的底数不为零; 对于含参问题要注意对参数进行分类讨论; 由实际问题建立的函数, 其定义域还应受实际问题的具体条件的制约.

例 求下列函数的定义域, 要求把结果写成区间形式.

$$(1) y = \frac{\sqrt{3x-2-x^2}}{2x-3};$$

$$(2) y = \sqrt{\frac{3-x}{2x+1}} + \sqrt{9-x^2};$$

$$(3) y = \begin{cases} 2x & (0 \leq x \leq 1), \\ 2 & (1 < x < 2), \\ 3 & (x \geq 2). \end{cases}$$

解 (1) 使 $f(x)$ 有意义应满足

$$\begin{cases} 3x-2-x^2 \geq 0, \\ 2x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2, \\ x \neq \frac{3}{2}. \end{cases}$$

故函数的定义域为 $\left[1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right]$.

$$(2) \text{ 使 } f(x) \text{ 有意义应满足 } \begin{cases} \frac{3-x}{2x+1} \geq 0, \\ 9-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2} < x \leq 3.$$

故函数定义域为 $\left(-\frac{1}{2}, 3\right]$.

(3) 分段函数的定义域为 $[0, 1] \cup (1, 2) \cup [2, +\infty) = [0, +\infty)$.

应用提示

● 求定义域的一般步骤: ① 写出使函数的解析式有意义的不等式(组). ② 解上面的不等式(组). ③ 用集合或区间表示函数的定义域.

*【复合函数的定义域】 若已知 $f(x)$ 的定义域为 $[a, b]$, 其复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域由不等式 $a \leq g(x) \leq b$ 解出即可; 若已知 $f[g(x)]$ 的定义域为 $[a, b]$, 求 $f(x)$ 的定义域, 相当于当 $x \in [a, b]$ 时, 求 $g(x)$ 的值域(即 $f(x)$ 的定义域).

例 (1) 若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[-2, 2]$, 求函数 $f(x^2-1)$ 的定义域.

(2) 若函数 $f(x^2+1)$ 的定义域为 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, 求函数 $f(x)$ 的定义域.

解 (1) 由 $-2 \leq x^2-1 \leq 2 \Rightarrow -1 \leq x^2 \leq 3 \Rightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$, 所以 $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

(2) 因 $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 3 \Rightarrow 1 \leq x^2+1 \leq 4$. 令 $t=x^2+1$, 得 $f(t)$ 的定义域是 $[1, 4]$, 这就是所求的 $f(x)$ 的定义域.

【函数值】 函数 $y=f(x)$ 当 x 在定义域内取一个确定的值 a 时, 对应的 y 值称为函数值, 记作 $f(a)$. 例如二次函数 $f(x)=x^2+2x-1$ 在 $x=0$ 时, 它的函数值为 $f(0)=0+2 \times 0-1=-1$.

【函数的值域】 对于定义域内的所有 x 值

对应的函数值形成的集合,叫做函数的值域.

【函数的表示方法】 ①列表法:用列表来表示两个变量之间函数关系的方法. ②解析法:用等式来表示两个变量之间函数关系的方法. ③图象法:用图象表示两个变量之间函数关系的方法.

例 求下列函数的值域:

$$(1) y = \frac{x-2}{x+1}; \quad (2) y = \frac{x^2-x}{x^2-x+1};$$

$$(3) y = x - \sqrt{1-2x}.$$

解 (1) $y = \frac{x-2}{x+1} = \frac{x+1-3}{x+1} = 1 - \frac{3}{x+1}.$

因为 $\frac{3}{x+1} \neq 0$, 所以 $y \neq 1$.

故函数的值域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

(2) 解法一 (配方法)

因为 $y = 1 - \frac{1}{x^2-x+1},$

而 $x^2-x+1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4},$

所以, $0 < \frac{1}{x^2-x+1} \leq \frac{4}{3}.$

故 $-\frac{1}{3} \leq y < 1$ 为所求.

解法二 (判别式法)

由 $y = \frac{x^2-x}{x^2-x+1},$ 得

$(y-1)x^2 + (1-y)x + y = 0.$

因为 $y=1, x$ 无解, 所以 $y \neq 1.$

又 $x \in \mathbf{R}$, 所以, 必须

$\Delta = (1-y)^2 - 4y(y-1) \geq 0.$

所以 $-\frac{1}{3} \leq y \leq 1.$ 又 $y \neq 1$, 故函数的值域

为 $-\frac{1}{3} \leq y < 1.$

(3) 解法一 (换元法)

令 $\sqrt{1-2x} = t$, 则 $t \geq 0$, 且 $x = \frac{1-t^2}{2},$

所以, $y = -\frac{1}{2}(t+1)^2 + 1 \leq \frac{1}{2} (t \geq 0).$

所以, $y \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right].$

解法二 (利用单调性)

定义域为 $x \leq \frac{1}{2}$, 函数 $y = -\sqrt{1-2x}$ 在

$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ 上是增函数, 所以

$$y \leq \frac{1}{2} - \sqrt{1-2 \times \frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}, \text{ 故}$$

$$y \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right].$$

【函数的图象】 所有坐标为 $(x, f(x))$ 的点的集合构成函数的图象 $\{(x, y) | y = f(x), x \in A\}$, 其中 A 为函数 $f(x)$ 的定义域.

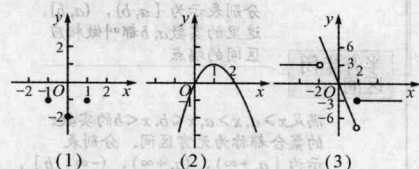
例 画出下列函数的图象.

(1) $y = x^2 - 2, x \in \mathbf{Z}$, 且 $|x| < 2;$

(2) $y = x(2-x);$

(3) $y = \begin{cases} 3, & x < -2, \\ -3x, & -2 \leq x < 2, \\ -3, & x \geq 2. \end{cases}$

解 如图所示:



【求函数的解析式】

求函数
的解析式

如已知所求函数的类型,
如一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$,
二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$
等常用此法

待定
系数法

已知形如 $f(g(x))$
的表达式, 求
 $f(x)$ 的表达式

代换
(配凑) 法

2. 函数的基本性质

【增函数和减函数】 对于给定区间上的函数 $f(x)$, 如果对于属于这个区间的任意两个自变量的值 x_1, x_2 ,

(1) 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是单调增函数;

(2) 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是单调减函数.

【单调性和单调区间】 如果函数 $y = f(x)$ 在某个区间上是增函数或减函数, 就说 $f(x)$ 在这一区间上具有(严格的)单调性, 这一区间叫做 $f(x)$ 的单调区间.

【最大值】 一般地, 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I , 如果存在实数 M 满足: ①对于任意的 $x \in I$, 都有 $f(x) \leq M$; ②存在 $x_0 \in I$, 使得 $f(x_0) = M$. 那么, 我们称 M 是函数 $y=f(x)$ 的最大值.

例 证明函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, -1)$ 上是增函数.

证明 设 $-\infty < x_1 < x_2 < -1$, 则

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= x_2 + \frac{1}{x_2} - \left(x_1 + \frac{1}{x_1} \right) \\ &= (x_2 - x_1) - \frac{x_2 - x_1}{x_2 x_1} \\ &= \frac{(x_2 - x_1)(x_1 x_2 - 1)}{x_1 x_2}. \end{aligned}$$

因为 $x_2 - x_1 > 0$, 又 $x_1 < -1, x_2 < -1$, 故 $x_1 x_2 - 1 > 0$.

于是 $f(x_2) - f(x_1) > 0$, 即 $f(x_2) > f(x_1)$.

所以, $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上是增函数.

应用提示 ◀◀◀

● 证明一个函数在给定区间上为增函数或减函数, 基本方法是根据定义进行. 在上述证明过程中, x_1, x_2 是该区间上任意两个数值, 不能用两个特殊值代替.

【奇函数和偶函数】 对于函数 $f(x)$, 如果对于定义域内任意一个 x , 都有 $f(-x) = -f(x)$, 那么函数 $f(x)$ 叫做奇函数; 如果对于定义域内任意一个 x , 都有 $f(-x) = f(x)$, 那么函数 $f(x)$ 叫做偶函数.

例 1 以下四个函数中:

(1) $f(x) = 2x + 1$;

(2) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$;

(3) $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$;

(4) $f(x) = (1+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

既不是奇函数, 又不是偶函数的是_____.

解 (2), (4) 的定义域分别是 $\{x | x \neq -1, x \in \mathbf{R}\}, (-1, 1]$, 它们关于原点不对称, 对于 (1) $f(-x) \neq f(x) \neq -f(x)$, 是非奇非偶函数. 对于 (3) 有 $f(-x) = f(x)$ 是偶函数. 故填 (1),

(2), (4).

例 2 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的任意函数, 则下列叙述正确的是().

A. $f(x)f(-x)$ 是奇函数

B. $f(x)|f(-x)|$ 是奇函数

C. $f(x) - f(-x)$ 是偶函数

D. $f(x) + f(-x)$ 是偶函数

解 A 中 $F(x) = f(x)f(-x)$,

$$\text{则 } F(-x) = f(-x)f(x) = F(x),$$

即函数 $F(x) = f(x)f(-x)$ 为偶函数.

B 中 $F(x) = f(x)|f(-x)|, F(-x) = f(-x)|f(x)|$,

此时 $F(x)$ 与 $F(-x)$ 的关系不能确定,

即函数 $F(x) = f(x)|f(-x)|$ 的奇偶性不确定.

C 中 $F(x) = f(x) - f(-x)$,

$$F(-x) = f(-x) - f(x) = -F(x),$$

即函数 $F(x) = f(x) - f(-x)$ 为奇函数.

D 中 $F(x) = f(x) + f(-x)$,

$$F(-x) = f(-x) + f(x) = F(x),$$

即函数 $F(x) = f(x) + f(-x)$ 为偶函数, 故选择答案 D.

考学方略——致胜法宝

求函数的解析式的方法有:

- ①待定系数法;
- ②换元法;
- ③配凑法;
- ④消元法;
- ⑤方程组法

具有奇偶性函数的定义域的特征: 定义域必须关于原点对称

函数问题

复合函数单调性的特点是“同增异减”

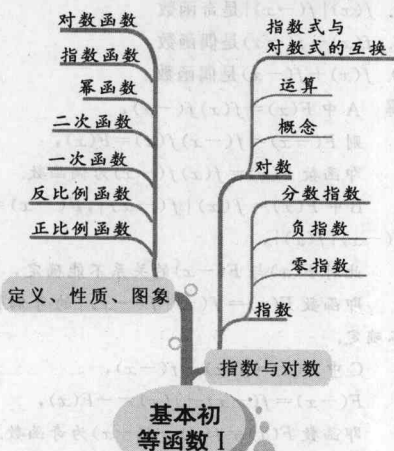
映射中的象与原象: ①A中元素必须都有象且唯一; ②B中元素不一定都有原象, 且原象不一定唯一

复合函数的奇偶性特点是“内偶则偶, 内奇同外”

三、基本初等函数 I

识记导图

把握全局



概念图解

掌握要领

1. 指数函数

【 a 的 n 次实数方根】一般地, 如果一个数的 n 次方等于 a ($n > 1$, 且 $n \in \mathbb{N}$), 那么这个数叫做 a 的 n 次方根. 就是说, 如果 $x^n = a$, 那么 x 叫做 a 的 n 次方根, 其中 $n > 1$, 且 $n \in \mathbb{N}$.

(1) 当 n 是奇数时, 正数的 n 次方根是一个正数, 负数的 n 次方根是一个负数, 这时, a 的 n 次方根用符号 $\sqrt[n]{a}$ 表示.

(2) 当 n 是偶数时, 正数的 n 次方根有两个, 这两个数互为相反数, 这时, 正数 a 的正的 n 次方根用符号 $\sqrt[n]{a}$ 表示, 负的 n 次方根用 $-\sqrt[n]{a}$ 表示.

相关链接

● 0 的 n 次实数方根等于 0.

【根式】式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做根式, 这里 n 叫做根指数, a 叫做被开方数. 当 n 为奇数时, $\sqrt[n]{a^n} = a$, 当 n 为偶数时, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.

【分数指数】我们规定正数的正分数指数幂的意义是 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ($a > 0$, $m, n \in \mathbb{N}$, 且 $n > 1$).

正数的负分数指数幂的意义与负整数指数幂的意义相仿, 我们规定

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad (a > 0, m, n \in \mathbb{N}, \text{且 } n > 1).$$

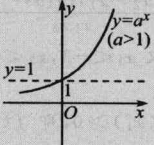
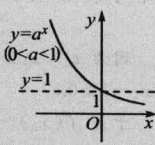
0 的正分数指数幂等于 0, 0 的负分数指数幂没有意义.

相关链接

● 一般地, 无理数指数幂 a^x ($a > 0$, a 是无理数) 是一个确定的实数. 有理数指数幂的运算性质同样适用于无理数指数幂.

【指数函数】函数 $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) 称为指数函数, 它的定义域是 $\mathbb{R}$.

【指数函数的图象和性质】

图 象		
性	① 定义域 $x \in \mathbb{R}$	
	② 值域 $(0, +\infty)$	
	③ 过点 $(0, 1)$	
质	④ $a > 1$ 时, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增	④ $0 < a < 1$ 时, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减

2. 对数函数

【对数】如果 a ($a > 0$, $a \neq 1$) 的 b 次幂等于 N , 就是 $a^b = N$, 那么数 b 叫做以 a 为底 N 的对数, 记作 $\log_a N = b$, 其中 a 叫做对数的底数, N 叫做真数.

【对数的性质】① 零和负数没有对数; ② $\log_a a = 1$; ③ $\log_a 1 = 0$.

【积、商、幂、方根的对数】对于 $M > 0$, $N > 0$, $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 有

$$(1) \log_a (MN) = \log_a M + \log_a N;$$

$$(2) \log_a \left(\frac{M}{N} \right) = \log_a M - \log_a N;$$

$$(3) \log_a M^n = n \log_a M \quad (n \in \mathbb{R}).$$

【对数恒等式和对数换底公式】

$$a^{\log_a N} = N \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1, N > 0),$$

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1, N > 0, b > 0 \text{ 且 } b \neq 1).$$