普通高等教育“十一五”规划教材
21世纪经管类创新教材

微积分教程

上册

熊章绪 主编

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”规划教材
21世纪经管类创新教材

微积分教程

（上册）

熊章绪　主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是依据教育部制定的《经济管理类数学课程教学基本要求》编写而成，例题全面，习题丰富，且分级安排，便于分级教学. 全书分上、下两册，共12章，上册为1～6章，内容包括函数、极限与连续、一元微积分的概念、一元函数微分法、一元函数积分法、一元微积分的应用；下册为7～12章，内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微积分学、无穷级数、微分方程、差分方程、应用数学模型.

本书可作为高等学校经管类本科生教材使用，也可作为相关人员参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

微积分教程. 上册/熊章绪主编. —北京：科学出版社，2009
普通高等教育“十一五”规划教材. 21世纪经管类创新教材
ISBN 978-7-03-025370-5

Ⅰ. 微…　Ⅱ. 熊…　Ⅲ. 微积分—高等学校—教材　Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第149536号

责任编辑：王雨舸　曾　莉 / 责任校对：李磊东
责任印制：彭　超 / 封面设计：苏　波

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

武汉市科利德印务有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2009年8月第一版　开本：B5(720×1 000)
2009年8月第一次印刷　印张：20 1/2
印数：1—5 000　字数：403 000

定价：33.50元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前言 FOREWORD

微积分是高等学校经管类学生的必修课,“对它的重要性无论作怎样的估计都不过分”. 但在当前我国高等教育大众化的条件下,微积分教学普遍存在着三个问题:一是相当一部分学生感到微积分太抽象,学习起来难度大、困难多;二是微积分与经济学和管理学的衔接上存在问题,如经济学要用到定积分知识,但要到较晚才能讲到,往往影响教学质量;三是学完这门课后,往往只记住一些规则和算法,不会灵活地进行综合应用.

如何解决这些问题? 我们对产生上述问题的原因进行了认真分析,并提出解决问题的三项措施:一是进行分级教学;二是开设必要的习题课,加强辅导;三是编写一套既符合学生实际,又达到教育部有关课程的基本要求,且具有特色的创新教材.

在几年分级教学的实践中,我们在基本保持原内容体系的基础上做了一些改革的尝试,所编的讲义几经修订,形成了现在出版的这套教材. 它包括《微积分教程》(上、下册)、《微积分分级训练教程》.

本书为《微积分教程》上册,是微积分课程主教材,内容包括函数、极限与连续、一元微积分的概念、一元函数微分法、一元函数积分法、一元微积分的应用等. 它具有如下特点:

(1) 本书是依据教育部制定的《经济管理类数学课程教学基本要求》并顾及学生考研需要而编写的. 其起点不太高,但总体要求不低,故其适用面较广.

(2) 与传统教材相比，本教材的内容体系作了一些调整，积分概念提早讲，解决了专业课程的需要.

(3) 书中重要概念、内容都从实际问题引入，学生易于接受.

(4) 一元微积分的概念单列一章，突出微分与积分的对立统一，使学生更易掌握微积分的主要概念和理论的内在联系.

(5) 微积分的应用另设一章，强调微积分的实用性，注重对学生综合运用微积分解决实际问题能力的培养.

(6) 例题全面，习题丰富，且分级安排，便于分级教学.

(7) 以评注方式对定理、概念、公式理解、应用给出了进一步的总结.

(8) 与教材同步配套，简明实用地编写了"大学数学实验指导"，注重培养学生利用计算机求解数学模型的能力.

本书由熊章绪任主编，邢婧任副主编，易风华、黄传喜、魏小燕参编.

由于编者水平有限，书中疏漏及不足之处在所难免，敬请同行、读者不吝指正.

编　者

2009 年 6 月

目录 CONTENTS

第 1 章 函　　数

1.1 预备知识

1.1.1 集合

1. 集合的概念

集合是数学中的一个重要的基本概念，它在现代数学中起着非常重要的作用. 我们先通过例子来说明这个概念. 例如，一间教室里的学生构成一个集合，一批产品构成一个集合，全体整数构成一个集合，等等.

一般地，具有某种特定属性的事物的全体称为一个集合，构成集合的事物或对象，称为集合的元素.

通常，我们用大写字母 A, B, C, …表示集合，用小写字母 a, b, c, …表示集合的元素. 如果 a 是集合 A 的元素，则记为 $a \in A$，读作 a 属于 A 或 a 在 A 中；如果 a 不是集合 A 的元素，则记为 $a \overline{\in} A$，读作 a 不属于 A 或 a 不在 A 中. 例如，如果 $\mathbf{Z}$ 表示全体整数的集合，则 $2 \in \mathbf{Z}$, $2.5 \overline{\in} \mathbf{Z}$.

由有限个元素构成的集合，称为有限集合；由无限多个元素构成的集合，称为无限集合.

我们这里讲的集合，具有确定性的特征，即对于某一个元素是否属于某个集合是确定的，“是”或者“不是”二者必居其一.

2. 集合的表示法

(1) 列举法：将集合里的元素一一列举出来，并用花括号括起来.

例 1.1.1 由 a, b, c, d, e 5 个元素组成的集合 A，可表示为

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

例 1.1.2 由 $x^2-6x-7=0$ 的根所构成的集合 A，可表示为 $A = \{-1, 7\}$.

用列举法表示集合时，必须列出集合的所有元素，不得遗漏或重复.

(2) 描述法：将集合里的各元素所具有的共同属性 P 写出，并用花括号括起来. 即 $A = \{x \mid x \text{ 具有属性 } P\}$.

例 1.1.3 由 $x^2-6x-7=0$ 的根所构成的集合 A，可表示为

$$A = \{x \mid x^2-6x-7=0\}$$

例 1.1.4 设 A 为全体奇数的集合，可表示为

$$A = \{x \mid x = 2n+1,\ n \text{ 为整数}\}$$

3. 集合之间的关系

在研究集合之间的关系之前先介绍全集的概念.

定义 1.1.1 由所研究的事物的全体构成的集合称为全集，记为 I.

全集是相对的，一个集合在一定条件下是全集，在另一条件下可能不是全集. 例如，讨论的问题仅限于正整数，则全体正整数的集合为全集；讨论的问题包括正整数和负整数，则全体正整数的集合就不是全集.

定义 1.1.2 不包含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$.

例 1.1.5 $x^4+1=0$ 的实数根集合为空集.

例 1.1.6 两平行平面的交点集合为空集.

注意 $\{0\}$ 及 $\{\varnothing\}$ 都不是空集，前者含有元素"0"，后者以空集"$\varnothing$"为其元素.

定义 1.1.3 如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，即若 $a\in A$，则 $a\in B$，那么称 A 为 B 的子集，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A.

例 1.1.7 设 $\mathbf{N}$ 表示全体自然数的集合，$\mathbf{Z}$ 表示全体整数的集合，则有 $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}$.

例 1.1.8 设 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，$B=\{2, 3, 4\}$，则 $B\subset A$.

定义 1.1.4 设有集合 A 和 B，如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$.

例 1.1.9 设 $A=\{x \mid x \text{ 为大于 3 小于 6 的整数}\}$，$B=\{x \mid x^2-9x+20=0\}$，则 $A=B$.

关于子集有下列结论：

(1) $A\subset A$，即集合 A 是其自身的子集；

(2) 对任意集合 A，有 $\varnothing\subset A$，即空集是任意集合的子集；

(3) 如果 $A\subset B$ 且 $B\subset C$，则 $A\subset C$，即集合的包含关系有传递性.

4. 集合的运算

集合之间可以进行运算，设 A，B 是任意两个集合，它们的运算主要有以下几种.

定义 1.1.5 由 A 和 B 的所有元素构成的集合，称为 A 和 B 的并，记为 $A\cup B$，即

$$A\cup B = \{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

例 1.1.10 设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{3, 4, 5, 6\}$，则

$$A\cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

例 1.1.11 设 $A=\{x \mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$，$A=\{x \mid x>0\}$，则

$$A \cup B=\{x \mid x \geqslant -1\}$$

集合的并有下列性质：

(i) $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$;

(ii) 对任何集合 A,有 $A \cup \varnothing=A$, $A \cup I=I$, $A \cup A=A$.

定义 1.1.6 由 A 和 B 的所有公共元素构成的集合,称为 A 和 B 的交,记为 $A \cap B$,即 $A \cap B=\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

例 1.1.12 设 $A=\{a, b, c\}$, $B=\{a, b\}$, 则 $A \cap B=\{a, b\}$.

例 1.1.13 如果 A 为正整数集合,B 为负整数集合,则

$$A \cup B=\{x \mid x \text{ 为正整数或负整数}\} \qquad A \cap B=\varnothing$$

例 1.1.14 设 A 为某单位懂法语的人的集合,B 为懂德语的人的集合,则 $A \cup B$ 表示懂法语或懂德语的人的集合,$A \cap B$ 表示既懂法语又懂德语的人的集合.

集合的交有下列性质：

(i) $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$;

(ii) 对任何集合 A,有 $A \cap \varnothing=\varnothing$, $A \cap I=A$, $A \cap A=A$.

定义 1.1.7 由属于 A 而不属于 B 的所有元素构成的集合,称为 A 和 B 的差,记为 $A-B$,即 $A-B=\{x \mid x \in A \text{且} x \overline{\in} B\}$.

例 1.1.15 如果 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$,则

$$A-B=\{2, 4, 6\}$$

定义 1.1.8 全集 I 中所有不属于 A 的元素构成的集合,称为 A 的余集或补集,记为 A^C,即 $A^C=\{x \mid x \in I \text{且} x \overline{\in} A\}$.

余集有下列性质：

(i) $A \cup A^C=I$; (ii) $A \cap A^C=\varnothing$.

例 1.1.16 设 $I=\{x \mid x \geqslant 0\}$, $A=\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$,则 $A^C=\{x \mid x>1\}$.

5. 集合的运算律

(i) 交换律：① $A \cup B=B \cup A$; ② $A \cap B=B \cap A$.

(ii) 结合律：① $(A \cup B) \cup C=A \cup(B \cup C)$;

② $(A \cap B) \cap C=A \cap(B \cap C)$.

(iii) 分配律：① $(A \cup B) \cap C=(A \cap C) \cup(B \cap C)$;

② $(A \cap B) \cup C=(A \cup C) \cap(B \cup C)$.

(iv) 对偶律：① $(A \cup B)^C=A^C \cap B^C$; ② $(A \cap B)^C=A^C \cup B^C$.

下面证明结合律的①式和对偶律的①式,其他几条定律可类似地证明.

结合律①式的证明如下:如果 $x \in(A \cup B) \cup C$,则 $x \in A \cup B$ 或 $x \in C$, 即

$$x \in A \quad \text{或} \quad x \in B \quad \text{或} \quad x \in C$$

因而 $x \in A$ 或 $x \in B \cup C$, 所以 $x \in A \cup(B \cup C)$.

由此可得 $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$. 同理可证

$$A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$$

所以
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

对偶律①式的证明如下：如果 $x \in (A \cup B)^C$，则 $x \bar{\in} A \cup B$，即

$$x \bar{\in} A \quad 且 \quad x \bar{\in} B$$

亦即
$$x \in A^C \quad 且 \quad x \in B^C$$

因此 $x \in A^C \cap B^C$，所以

$$(A \cup B)^C \subset A^C \cap B^C$$

反之,如果 $x \in A^C \cap B^C$，则 $x \in A^C$ 且 $x \in B^C$，即 $x \bar{\in} A$ 且 $x \bar{\in} B$，亦即

$$x \bar{\in} A \cup B$$

因此 $x \in (A \cup B)^C$，所以

$$A^C \cap B^C \subset (A \cup B)^C$$

于是得到
$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

1.1.2 实数集

1. 实数

我们学习数是从自然数,到有理数,再进一步到无理数.

有理数可以表示为 p/q,无理数不能表示为 p/q,其中 p, q 都是整数且 $q \neq 0$.

分数可以用有限小数或无限循环小数表示;反之,有限小数或无限循环小数亦可用分数表示.

因此,有理数可以表示为有限小数或无限循环小数,而无理数为无限不循环小数.

定义 1.1.9 有理数和无理数统称为实数. 其中无理数就是指无限不循环小数,有理数包括整数和分数.

实数可以用来测量连续的量,是不可数的. 理论上,任何实数都可以用无限小数的方式表示(可以是循环的,也可以是非循环的).

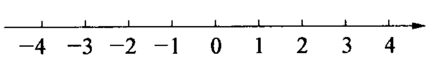

图 1.1.1

2. 数轴

定义 1.1.10 规定了原点、正方向和单位长度的直线称为数轴,如图 1.1.1 所示.

任何一个有理数 p/q,都可以在数轴上找到一个点与之对应,使得由原点到这点的长度与单位长度之比等于 p/q. 这样得到的点称为有理点,它是有理数 p/q 的几何表示,而 p/q 称为有理点的坐标. 反之,数轴上任何一个有理点必对应于一个有理数.

任给两个有理数 a, b $(a < b)$，在 a, b 之间至少可以找到一个有理数 c,使得

$a < c < b$，同样地，在 a，c 之间也至少可以找到一个有理数 d，使得 $a < d < c$. 依此类推，可知不论有理数 a，b 相差多么小，在 a，b 之间总可以找到无穷多个有理数，这就是有理数的稠密性. 因为任何一个有理数必和数轴上的一个有理点相对应，因此数轴上任意两个有理点之间总可以找到无穷多个有理点，即有理点在数轴上是处处稠密的.

虽然有理点在数轴上处处稠密，但是有理点尚未充满数轴. 例如，边长为 1 个长度单位的正方形，其对角线的长度为$\sqrt{2}$个长度单位，可以证明$\sqrt{2}$不是有理数，因此数轴上坐标为$\sqrt{2}$的点不是有理点. 这种点也有无穷多个，而且在数轴上也是处处稠密的. 例如，坐标为 $\sqrt{2}+1$，$\sqrt{2}+0.1$，$\sqrt{3}$，$\sqrt[3]{7}$，π 等的点都不是有理点. 因此，数轴上除有理点之外还有无穷多个“空隙”，这些空隙处的点称为无理点，与无理点相对应的数称为无理数.

因而，实数充满数轴而且没有空隙，这就是实数的连续性. 由此可知，每一个实数必是数轴上某一个点的坐标；反之，数轴上每一点的坐标必是一个实数，这就是说全体实数与数轴上的全体点形成一一对应的关系.

3. 区间

定义 1.1.11 介于某两个实数之间的全体实数称为区间. 这两个实数称为区间的端点. 两端点间的距离称为区间的长度.

设 a，$b \in \mathbf{R}$ 且 $a < b$，则数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 称为开区间，记为 (a, b)，如图 1.1.2.

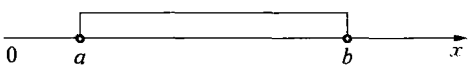

图 1.1.2

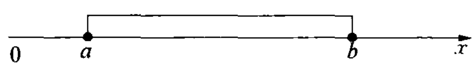

图 1.1.3

数集 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$，称为闭区间，记为 $[a, b]$，如图 1.1.3.

类似地有半开半闭区间 $[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$（图 1.1.4）和 $(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$（图 1.1.5）.

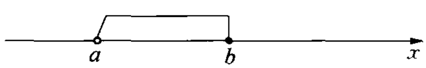

图 1.1.4

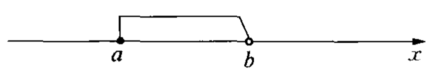

图 1.1.5

以上区间都是有限区间.

引入记号$+\infty$及$-\infty$，分别读作正无穷大和负无穷大. $(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$（图 1.1.6）；$[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$（图1.1.7）；

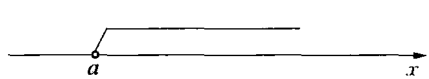

图 1.1.6

$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$（图 1.1.8）；$(-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\}$（图 1.1.9）；$(-\infty, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}$（图 1.1.10）.

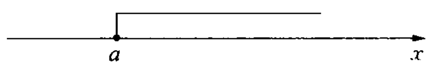

图 1.1.7

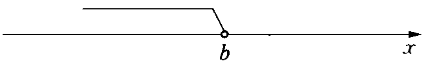

图 1.1.8

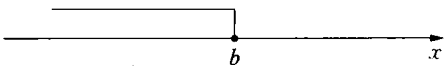

图 1.1.9

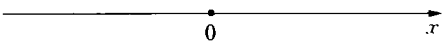

图 1.1.10

4. 绝对值与邻域

1）绝对值

定义 1.1.12 数轴上一个数 a 所对应的点与原点 0 的距离，称为这个数的绝对值，记为 $|a|$，即实数 a 的绝对值为

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

实数的绝对值有如下性质：

(i) $|a| = |-a| \geqslant 0$，当且仅当 $a = 0$ 时有 $|a| = 0$；

(ii) $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$；

(iii) 对于任何实数 a，b 有如下的三角不等式：

$$|a| - |b| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b|$$

(iv) $|ab| = |a|\,|b|$；

(v) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

2）邻域

定义 1.1.13 将满足不等式 $|x - x_0| < \delta$ 的点 x 的集合，称为点 x_0 的 δ 邻域，记为 $U(x_0, \delta)$，其中 x_0 称为此邻域的中心，δ 称为此邻域的半径，即

$$U(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$$

由 $|x - x_0| < \delta$ 可得 $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$，所以有

$$U(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

因此，点 x_0 的 δ 邻域在数轴的表示如图 1.1.11 所示.

点 x_0 的 δ 邻域去掉中心 x_0 后，也就是满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的集合称为点 x_0 的去心邻域，记为 $\mathring{U}(x_0, \delta)$，即

$$\mathring{U}(x_0, \delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$$

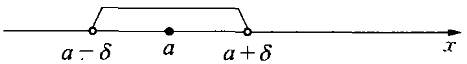

图 1.1.11

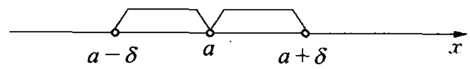

图 1.1.12

所以，点 x_0 的 δ 去心邻域在数轴上的表示如图 1.1.12 所示.

例如，$\{x \mid |x-3|<1\}$ 是以 3 为中心，以 1 为半径的邻域；$\{x \mid 0<|x-3|<1\}$ 是以 3 为中心，以 1 为半径的去心邻域.

无需指明邻域的半径时，可用符号 $U(x_0)$ 和 $\mathring{U}(x_0)$ 表示点 x_0 的邻域和点 x_0 的去心邻域.

习 题 1.1

(A)

用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合，并在数轴上表示出来.

(1) $|x|<5$；

(2) $|x-4|<1$；

(3) $0<|x+1|<2$；

(4) $|x| \geqslant 5$；

(5) $|x-3| \geqslant 1$；

(6) $|x+a|<\delta$ (a 为常数，$\delta>0$).

(B)

用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合.

(1) $2<|x-2|<5$；(2) $1<|x+3|<5$；(3) $1<|x-a|<\delta$ $(\delta>1)$.

1.2 函数的概念

人们注意到在同一个自然现象、生产实践或科学实验过程中，往往同时有几个变量相互联系、相互影响地变化着，这种变化遵循着一定的客观规律. 如果能用数学方式精确地描述出这些变化的因果关系，就有可能准确地预测事物未来的进程，提出有效的工作方案，把握事物的发展趋势. 函数就是变量变化关系最基本的数学描述. 可以说函数是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型.

定义 1.2.1 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个非空实数集合. 如果对于每一个 $x \in D$，变量 y 按照一定的法则 f，有唯一确定的实数与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$. 数集 D 称为这个函数的定义域，记为 D_f，x 称为自变量，y 称为因变量.

当 x 取数值 $x_0 \in D_f$，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 处的函数值，记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 全体函数值的集合 $\{y \mid y=f(x), x \in D_f\}$ 称为函数的值域，记为 R_f.

由定义可见，确定函数只有两个要素：定义域和对应法则. 两函数相等是指两

个函数的定义域和对应法则相同.

关于定义域的确定,在实际问题中则由实际意义具体确定;由解析式表达的函数如不特别说明,则是使其表达式有意义的自变量的全体取值构成的集合.

例 1.2.1 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x-1}}$; (2) $y=\sqrt{x^2+x-2}-\arcsin\dfrac{x+1}{3}$.

解 (1) 要使函数有定义,必须 $\begin{cases}x+1>0,\\x-1>0,\end{cases}$ 即 $x>1$, 所以函数的定义域是 $(1, +\infty)$.

(2) 要使函数有定义,必须 $\begin{cases}x^2+x-2\geqslant 0,\\-1\leqslant\dfrac{x+1}{3}\leqslant 1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\geqslant 1 \text{ 或 } x\leqslant -2,\\-4\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ 所以函数的定义域是 $[-4, -2]\cup[1, 2]$.

下面通过例题介绍几个重要的函数.

例 1.2.2 绝对值函数

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x>0\\0, & x=0\\-x, & x<0\end{cases}$$

的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域是 $[0, +\infty)$, 其图像如图 1.2.1 所示.

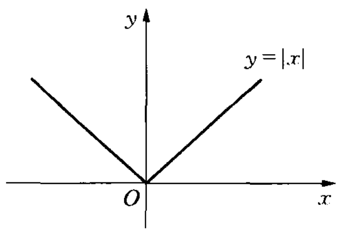

图 1.2.1

例 1.2.3 符号函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\0, & x=0\\-1, & x<0\end{cases}$$

的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域是三个点的集合 $\{-1, 0, 1\}$, 其图像如图 1.2.2 所示.

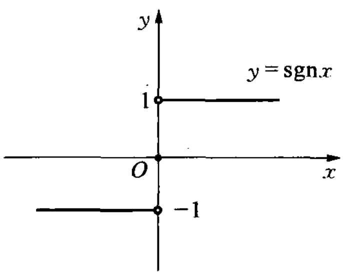

图 1.2.2

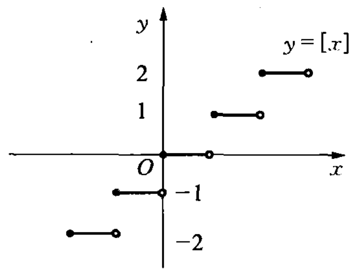

图 1.2.3

例 1.2.4 取整函数 $f(x)=[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,其定义域是