高等学校数学及其应用系列丛书

矩阵论

卜长江 罗跃生◎主编

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

矩 阵 论

卜长江　罗跃生　主编

哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书较为详细地介绍了线性空间、线性映射、酉空间、欧氏空间、若当标准型、矩阵的分解、矩阵的范数、矩阵的导数、积分、级数、矩阵函数和广义逆矩阵等基本内容。全书共分为八章，每章均配有一定数量的习题，供读者练习使用。

本书可作为工科硕士研究生教材，也可供本科生、工程技术人员及科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

矩阵论/卜长江，罗跃生主编.—哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2007.11

ISBN 978-7-81133-071-7

Ⅰ.矩… Ⅱ.①卜… ②罗… Ⅲ.矩阵-理论
Ⅳ.O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 161948 号

出版发行　哈尔滨工程大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码　150001
发行电话　0451-82519328
传　　真　0451-82519699
经　　销　新华书店
印　　刷　黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本　850mm×1 168mm　1/32
印　　张　9.75
字　　数　252 千字
版　　次　2007 年 11 月第 1 版
印　　次　2007 年 11 月第 1 次印刷
定　　价　19.00 元
http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前　　言

由于自然科学、工程技术、经济和管理科学的迅速发展，矩阵理论得到了重要的应用。作者力图编写具有一定的理论深度，且通俗易懂的教材，故在教材的内容取舍上、次序安排上，与以往的教材有一定的不同。

本教材是在总结多年矩阵论课程教学实践的基础上，参照本课程的基本要求编写的，第一章、第二章、第三章、第四章、第八章由卜长江编写，第五章、第六章、第七章由罗跃生编写。本书约用50~60学时讲授，各专业可根据需要灵活掌握。

学习本书的读者，只须具备线性代数、少量的高等数学和复变函数知识即可。

由于编者的水平有限，书中难免存在不足之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

2007年10月

目　　录

第一章　线性空间与线性映射

线性空间是研究矩阵理论的重要基础,本章主要讨论线性空间及其子空间的性质、线性映射与矩阵的关系等.

§1.1　数　　域

定义 1　设 F 是至少包含两个数的数集,如果 $\forall a,b \in F$ 均有 $a \pm b, ab, \frac{a}{b}(b \neq 0) \in F$,则称 F 是**数域**.

例 1　全体实数构成实数域,记为 $\mathbf{R}$. 全体复数构成复数域,记为 $\mathbf{C}$. 全体有理数构成有理数域,记为 $\mathbf{Q}$.

例 2　全体整数不构成数域,因为对除法不封闭.

例 3　设 $F = \{a + \sqrt{2}b \mid a \in \mathbf{Q}, b \in \mathbf{Q}\}$,证明 F 是数域.

证明　$\forall \alpha, \beta \in F$,则 $\exists a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbf{Q}$,使得 $\alpha = a_1 + \sqrt{2}b_1, \beta = a_2 + \sqrt{2}b_2$,易证 $\alpha \pm \beta, \alpha\beta, \frac{\alpha}{\beta}(\beta \neq 0) \in F$.

例 4　证明任何数域 F 都包含有理数域.

证明　因为 F 中至少包含两个不同元素,所以 $\exists a \in F$, $a \neq 0$,由运算的封闭性知 $\frac{a}{a} = 1 \in F, 1+1=2, 1+2=3, \cdots \in F, 1-2=-1, 1-3=-2, \cdots \in F$,所以 F 包含了全体整数,又由除法封闭性知 F 包含有理数域.

和号 $a_{ij} \in F, \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$.

§1.2 线性空间

在线性代数中，$\mathbf{R}^n$ 是 n 维实向量空间，在本节中将此概念推广到一般向量空间.

定义 1 设 V 是一个非空集合，F 是一个数域. 在集合 V 的元素之间定义一种称之为加法的运算，且 V 关于加法封闭，即 $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ 有惟一的 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$. 在 F 与 V 之间定义一种运算称之为数乘，即 $\forall \lambda \in F, \boldsymbol{x} \in V$ 有惟一确定的 $\boldsymbol{\omega} = \lambda \boldsymbol{x} \in V$ 与之对应，如果以上两种运算满足以下八条运算规则，则称 V 为数域 F 上的**线性空间**，V 中元素也称为 V 中的**向量**，记为 $V = V(F)$.

1. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$;
2. $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}), \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$;
3. $\exists \boldsymbol{\theta} \in V$ 使 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in V$，称 $\boldsymbol{\theta}$ 为零元素，也记为 $\mathbf{0}$;
4. $\forall \boldsymbol{x} \in V, \exists \boldsymbol{y} \in V$，使 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\theta}$，记 $\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{x}$;
5. $(\lambda + \mu)\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{x}; \forall \lambda, \mu \in F, \forall \boldsymbol{x} \in V$;
6. $\lambda(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \lambda \boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{y}; \forall \lambda \in F, \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$;
7. $\lambda(\mu \boldsymbol{x}) = (\lambda \mu)\boldsymbol{x}; \forall \lambda, \mu \in F, \forall \boldsymbol{x} \in V$;
8. $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in V$.

例 1 设 F 为数域，则 $F^n = \{[a_1, a_2, \cdots, a_n]^{\mathrm{T}} \mid a_1, a_2, \cdots, a_n \in F\}$ 按通常的 n 维向量加法与数乘，不难证明 F^n 为 F 上的线性空间.

例 2 记 $F^{m \times n}$ 为数域 F 上的 $m \times n$ 矩阵的全体，按通常的矩

阵加法与数乘构成 F 上的线性空间，其中 $\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{O}_{m\times n}$.

例 3 $C[a,b]$ 为区间 $[a,b]$ 上一切一元连续实函数，按通常的实函数加法和数乘，构成了实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间，其中 $\boldsymbol{\theta}=0$.

例 4 $P[x]_n$ 为不超过 $n-1$ 次的实多项式及零多项式的全体，是实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

例 5 复数域 $\mathbf{C}$ 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间，而 $\mathbf{R}$ 却不是 $\mathbf{C}$ 上的线性空间.

以下为线性空间的简单性质.

性质 1 线性空间 $V(F)$ 中零元素惟一.

证明 设有零元素 $\boldsymbol{\theta}_1,\boldsymbol{\theta}_2\in V(F)$，则 $\boldsymbol{\theta}_1=\boldsymbol{\theta}_1+\boldsymbol{\theta}_2=\boldsymbol{\theta}_2$.

性质 2 $\forall\boldsymbol{x}\in V(F)$，$\exists\boldsymbol{y}\in V(F)$ 使得 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\theta}$，则 $\boldsymbol{y}$ 惟一，称为 $\boldsymbol{x}$ 的负元素.

证明 设 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{\theta}$，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{\theta}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_1&=\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{y}_1+(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}_2)=(\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{x})+\boldsymbol{y}_2\\&=\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{y}_2\end{aligned}$$

性质 3 $0\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\theta}$，$(-\lambda)\boldsymbol{x}=-\lambda\boldsymbol{x}$，$\lambda\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}$.

证明 $0\boldsymbol{x}=(0+0)\boldsymbol{x}=0\boldsymbol{x}+0\boldsymbol{x}$，所以 $0\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\theta}$.

因为 $\lambda\boldsymbol{x}+(-\lambda)\boldsymbol{x}=[\lambda+(-\lambda)]\boldsymbol{x}=0\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\theta}$，所以 $(-\lambda)\boldsymbol{x}=-\lambda\boldsymbol{x}$.

因为 $\lambda\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{\theta}=\lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\theta})=\lambda\boldsymbol{x}$，所以 $\lambda\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}$.

性质 4 若 $\lambda\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\theta}$，其中 $\lambda\in F$，$\boldsymbol{x}\in V(F)$，则 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\theta}$.

证明 若 $\lambda=0$ 命题显然成立，不妨设 $\lambda\neq0$，则

$$\boldsymbol{x}=\frac{1}{\lambda}(\lambda\boldsymbol{x})=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}$$

定义 2 设 $W\subset V(F)$，若 W 在数域 F 上也是线性空间，则

称 $W(F)$ 为 $V(F)$ 的**子空间**(按原来的两种运算).

若 W 是线性空间 V 的非空子集,则在线性空间定义的八个条件中除3,4条外,W 显然满足其余条件.而如果封闭性满足了,3,4条就成立了.这是因为 $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in W, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in W, \lambda\boldsymbol{x} \in W(\forall \lambda \in F)$,则 $0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta} \in W, -\boldsymbol{x} = (-1)\boldsymbol{x} \in W$,因此有下面的定理.

定理1 设 $V(F)$ 是线性空间,W 为 V 的非空子集,按原来的两种运算 W 是线性空间 $\Leftrightarrow W$ 按原来两种运算封闭.

例6 数域 F 上的 n 阶对称阵的全体构成了 $F^{n\times n}$ 的一个子空间.

定义3 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 是数域 F 上的线性空间 V 中的向量,则不难证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 的线性组合的全体构成了 V 的一个子空间,记为 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t)$ 或 $\mathrm{span}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t]$,称为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ **生成或张成子空间**.

零向量集合及 V 本身都是 V 的子空间,称为**平凡子空间**.若 W 是 V 的子空间,且不是平凡子空间,则称 W 是 V 的**真子空间**.

§1.3 线性空间的基

与 $\mathbf{R}^n$ 中一样,我们在 $V(F)$ 中也要讨论线性相关性及向量组的秩和极大无关组,向量组的等价性,线性空间和线性子空间的基底、维数,以及向量在一组基下的坐标和相关性质.

一、线性空间的基

定义1 设 $\boldsymbol{x}_i \in V(F), a_i \in F, i = 1,2,\cdots,m$,若

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_m\boldsymbol{x}_m$$

则称 x 可由 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ **线性表示**,或称 x 为 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 的**线性组合**.

定义 2 设 $A: x_1,x_2,\cdots,x_m; B: y_1,y_2,\cdots,y_s$ 是线性空间 $V(F)$ 中的两个向量组,如果 A 中的任一个向量可由向量组 B 线性表示,则称**向量组 A 可由向量组 B 线性表示**.如果向量组 A 与 B 可以互相线性表示,则称向量组 A 与 B **等价**.

定义 3 设 $x_1,x_2,\cdots,x_m \in V(F)$,如果存在一组不全为 0 的常数 $a_1,a_2,\cdots,a_m \in F$ 使

$$a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m = \boldsymbol{\theta}$$

则称向量组 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ **线性相关**,否则称 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ **线性无关**.

定义 4 设 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 是 $V(F)$ 中的向量组,如果 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 中有 r 个向量线性无关,而所有的 $r+1$ 个向量(如果有的话)都线性相关,则称此 r 个向量为向量组 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 的**极大无关组**,称 r 为向量组 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 的**秩**,记为 $\mathrm{rank}[x_1,x_2,\cdots,x_m]$.**规定只含零向量的向量组秩为零**.

与 $\mathbf{R}^n$ 类似,在线性空间 $V(F)$ 中下列命题成立.

命题 1 设 $m \geqslant 2$,则 $V(F)$ 中向量组 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 其中有某个向量可由其余的向量线性表示.

命题 2 若 $V(F)$ 中向量组的某一子向量组线性相关,则该向量组线性相关.

命题 3 若 $V(F)$ 中向量组 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 线性无关,则其任意非空子向量组也线性无关.

命题 4 设 $x \in V(F)$,则 x 线性无关 $\Leftrightarrow x \neq \boldsymbol{\theta}$.

命题 5 设 $x_1,x_2,\cdots,x_m,y \in V(F)$,若 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 线性

无关，$x_1,x_2,\cdots,x_m,y$ 线性相关，则 y 可由 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 惟一线性表示.

定义5 线性空间 V 中的向量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为 V 的**基向量组**或**基(底)**，如果有：

1. $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性无关；

2. $V(F)$ 中任一向量可由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性表示.

则称 n 为 V 的**维数**，记 $\dim V = n$.

如果对 $\forall n$ 均可在 $V(F)$ 中找到 n 个线性无关的向量，则称 $V(F)$ 为**无限维的向量空间**(例如实数域上全体多项式的集合).

只含零向量的线性空间维数规定为 0.

命题6 若 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为线性空间 $V(F)$ 的基，则 $\forall x \in V(F)$，x 可由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 惟一线性表示.

命题7 若 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为线性空间 $V(F)$ 的基，则 $V(F) = L[x_1,x_2,\cdots,x_n]$.

定义6 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 $V(F)$ 的基，则 $\forall x \in V(F)$，有惟一的表达式

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = [x_1,x_2,\cdots,x_n]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, a_i \in F, i = 1,2,\cdots,n$$

称 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 或 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ 为 x 基 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 下的**坐标**.

注：基不惟一，例如在 $\mathbf{R}^n$ 中

$$e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,e_n=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

和

$$e_1'=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix},e_2'=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,e_n'=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

都是的 $\mathbf{R}^n$ 基.称 $e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,e_n=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{C}^n$ 的自然基底.

例 1 $P[x]_n=\{f(x)\mid f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1},a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}\in\mathbf{R}\}$,则 $1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$ 为 $P[x]_n$ 的基.

注: n 次多项式的全体不构成线性空间,因为不封闭.

二、基与基的关系,向量在两组基下的坐标关系

定义 7 设 $V(F)$ 的两组基为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'$,令

$$\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}_1'=a_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{\varepsilon}_n\\\boldsymbol{\varepsilon}_2'=a_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{n2}\boldsymbol{\varepsilon}_n\\\vdots\\\boldsymbol{\varepsilon}_n'=a_{1n}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{2n}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{\varepsilon}_n\end{cases}$$

则

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_1', \boldsymbol{\varepsilon}_2', \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n'] = [\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n] \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

称

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

为由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 到 $\boldsymbol{\varepsilon}_1', \boldsymbol{\varepsilon}_2', \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n'$ 的过渡矩阵.

命题 8 基底过渡矩阵 $\mathbf{A}$ 可逆.

证明 因为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1', \boldsymbol{\varepsilon}_2', \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n'$ 线性无关,所以

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_1', \boldsymbol{\varepsilon}_2', \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n'] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

只有零解,即

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n]\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

只有零解. 又因为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关,所以 $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$,即 $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 只有零解,所以 $\mathbf{A}$ 可逆.

$\mathbf{A}^{-1}$ 为由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1', \boldsymbol{\varepsilon}_2', \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n'$ 到 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的过渡矩阵,这是因为

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_1', \boldsymbol{\varepsilon}_2', \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n']\mathbf{A}^{-1} = [\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n]$$

定理 1 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_1', \boldsymbol{\varepsilon}_2', \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n'$ 是 V 的两组基,且 $\mathbf{A}$ 为由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 到 $\boldsymbol{\varepsilon}_1', \boldsymbol{\varepsilon}_2', \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n'$ 的过渡矩阵, V 中向量 $\boldsymbol{x}$ 在基

$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}'_1, \boldsymbol{\varepsilon}'_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}'_n$ 下的坐标分别为 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_n \end{bmatrix}$,则

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_n \end{bmatrix}$$

证明 $[\boldsymbol{\varepsilon}'_1, \boldsymbol{\varepsilon}'_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}'_n] = [\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n]\boldsymbol{A}$,而

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n = [\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = a'_1\boldsymbol{\varepsilon}'_1 + \cdots + a'_n\boldsymbol{\varepsilon}'_n = [\boldsymbol{\varepsilon}'_1, \boldsymbol{\varepsilon}'_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}'_n] \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_n \end{bmatrix}$$

$$= [\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n]\boldsymbol{A} \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_n \end{bmatrix}$$

因为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关,故

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_n' \end{bmatrix}$$

例 2

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_3' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

是 $\mathbf{R}^3$ 两个基,求由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到 $\boldsymbol{\varepsilon}_1', \boldsymbol{\varepsilon}_2', \boldsymbol{\varepsilon}_3'$ 的过渡矩阵.

解 由于
$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_1' = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_3) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2' = \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_3' = \frac{1}{2}(-\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_3) \end{cases}$$

即

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_1', \boldsymbol{\varepsilon}_2', \boldsymbol{\varepsilon}_3'] = [\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

所以