伽罗华理论

〔美国〕E. 阿丁 著

上海科学技术出版社

伽罗華理論

〔美國〕E. 阿丁 著

李英 譯

上海科学技术出版社

內容提要

本書大部分內容系根據美國阿丁(Artin)博士的演講稿譯成．內容分为(1)綫性代数，(2)体論，(3)应用，三章．綫性代数一章，学过高等代数的讀者可以略去．体論一章是本書的中心內容．应用一章是密尔格拉姆(Milgram)博士補充的，內容为n次方[illegible]解問題及直尺圓規作圖問題．最后一章譯自迭克遜(D[illegible]kson)著“近世代数理論”第九章中的一部分，介紹[illegible]方程对于特定体的群的实际方法．

数一章，
心內容．
为n次方
迭克遜(1
分，介紹关

伽罗华理論
GALOIS THEORY

原著者 〔美国〕 EMIL ARTIN
原出版者 EDWARDS BROTHERS, INC. 1946年版
譯者 李英

上海科学技术出版社出版
(上海南京西路2004号)
上海市书刊出版业营业許可証出093号
上海市印刷五厂印刷 新华书店上海发行所总經售

开本787×1092 耗 1/32 印張2 578 字数55,000
(原科技版印1,600册)
1959年4月新1版 1959年4月新1版第1次印刷
印数1—1,000

統一書号：13119·119
定价：(十四)0.38元

譯者贅言

本書原稿系爱爾尔-阿丁（Emil Artin）在諾丹大学（Notre Dame）講学的講稿，經阿瑟-密尔格拉姆（Arthur N. Milgram）補充应用一章而成。1946年第二版又增添行列式等兩小節，乃成今日之形狀。本書內容为在有限、可換、可分的情况下，有系統的叙述了伽罗華理論。其处理方法很一般，但所需預备知識并不高深。只要具备現在大学高等代数的知識应該就能看懂它。如果还有近世代数基礎知識，就更能容易掌握。本書程度高低適中，適于讀完大学高等代数，綫性代数后，進一步提高代数方面的水平之用。不揣冒昧特为譯出。不知在这方面对于讀者能不能有些許的帮助？

关于具体的应用方面，原書似尙缺少关于尋找方程对于特定体的群的实际方法；所以譯者在最后增補一節，主要取自迪克森著：近世代数理論（Dickson L. E.: Modern Algebraic theories）第九章的內容。所有譯名都按科学院名詞編訂的数学名詞轉譯。譯者水平有限，錯誤之处，尙祈指正，不勝感激。

目　錄

（有星号的章節是第一版后添加的內容）

I. 綫性代数

A. 体

体是一些元素的集合，其中定义了兩个运算，称为乘法和加法；就和实数系（它本身就是体的一个例子）的乘法和加法类似。在每个体 F 中总存在着唯一的元素，称为 0 和 1，它們在加法和乘法的运算下，对 F 的所有其他元素的作用，就恰和在实数系中它們对应的元素的作用相同。但有兩点是不完全类似的：1）在每一个体中乘法并不假設为可交换的；2）一个体可以只有有限个元素。

更准确些説，体是一些元素的集合，在上述的加法运算之下，成加法可换群；而对除零以外的那些元素成乘法群；并且这兩个群运算是用分配律來联系的。更有，0 和任何元素的乘積定义为 0。

如果在这体中乘法是可交换的，那么这体就称为可换体。

B. 向量空間

如果 V 是一个加法可换群，其中元素是 A, B, $\cdots$；F 是一个体，其中元素是 a, b, $\cdots$；并且如果对每一个 $a\epsilon F$ 和 $A\epsilon V$，乘積 aA 表示 V 中的一个元素，那么当下述条件：

1) $a(A+B)=aA+aB$

2) $(a+b)A=aA+bA$

3) $a(bA)=(ab)A$

4) $1A=A$

成立时，V 就称为 F 上（左）**向量空間**。讀者容易証明，如果 V 是一个 F 上的向量空間，那么 $oA=0$ 和 $a0=0$；这里 o 是 F 的零元素，而 0 是 V 的零元素。例如前一个关系由方程

$$aA=(a+o)A=aA+oA$$

可得。

有些时候，F 和 V 的元素的乘積寫成 Aa 形狀。在这种情况下，V 称为 **F 上的右向量空間**，以表示它和上述用体的元素左边相乘的情况有所区别。如果在討論过程中，左和右向量空間不同时出現时，我們就簡單的用“向量空間”这名詞。

C. 齐次綫性方程

如果 a_{ij}，$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$，是体 F 中的 $m\cdot n$ 个元素，我們常需知道在什么条件下能保証在 F 中有满足下列方程

$$(1)\qquad \begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{array}$$

的元素。讀者应該記得这样的方程称为**綫性齐次方程**。而 F 的元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的集合，对上面全体方程都成立的，称为这方程組的解。如果不是所有的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是 0，这解称为**非顯然的**；否則的話，就称为**顯然的**。

定理 1. 一个綫性齐次方程組，如果未知数的个数多于方程的个数，那么它总有一个非顯然解。

証明采用大多数中学生所熟悉的方法，就是所謂未知数的逐次消元法。如果在 $n>0$ 个变数时，沒有方程是被規定了的話，那么未知数是沒有限制的，我們可以設它們都 $=1$。

我們用完全歸納法來進行。我們假設当 $k<m$ 时，凡是未知数多于 k 个而方程只有 k 个的方程組，都有一个非顯然解。在方程組 (1) 中，假設 $n>m$，并且用 L_i, $i=1, 2, \cdots, m$ 表示式子 $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n$，我們來找不全为 0 的元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，使得 $L_1=L_2=\cdots=L_m=0$。如果对于每一个 i 和 j，有 $a_{ij}=0$，那么 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 选擇任何值都是一个解。如果不是所有的 a_{ij} 都为 0，那么我們可以假設 $a_{11}\neq 0$，这因为所寫方程的次序，或未知数的編号，对于非顯然解的存在或不存在是沒有影响的。我們要能对于所給的方程組找到一个非顯然解，必須而且只須我們对于下列方程組

$$
\begin{aligned}
&L_1=0\\
&L_2-a_{21}a_{11}^{-1}L_1=0\\
&\cdots\cdots\\
&L_m-a_{m1}a_{11}^{-1}L_1=0
\end{aligned}
$$

能找到一个非顯然解。这因为，如果 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是上面这些方程的解，那么由于 $L_1=0$，其余的每一个方程的第二項是 0，因此 $L_1=L_2=\cdots=L_m=0$。反过來，如果 (1) 被滿足，那么这新的方程組也明顯的被滿足。讀者应当注意到这新的方程組是从最后 $n-1$ 个方程中“消去” x_1 的方法得到的。更有，当把最后 $n-1$ 个方程看做 $x_2, \cdots, x_n$ 的方程时，如果存在一个非顯然解，那么取 $x_1=-a_{11}^{-1}(a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n)$ 就給出整个組的一个非顯然解。根据歸納法假設，这最后 $n-1$ 个方程是有一个解的，由此定理就証明了。

注：如果綫性齐次方程是寫成形狀 $\Sigma x_j a_{ij}=0, i=1,2,\cdots,n$，上面定理仍然成立，并且有同样的証明，只不过在少数几处所寫的項的次序改变一下。

D. 向量的相关和無关

对于体 F 上的向量空間 V 中的向量 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，如果 F 中存在有不全为 0 的元素 $a_1, \cdots, a_n$，使得 $a_1A_1+a_2A_2+\cdots+a_nA_n=0$，則称这些向量是相关的。如果这些向量 $A_1, \cdots, A_n$ 不是相关的，就称为無关的。

体 F 上的向量空間的維数，就是 V 中無关元素的最大个数。因此如果在 V 中有 n 个無关的元素，而多于 n 个無关元素的集合不存在时，那么 V 的維数是 n。

如果 V 的每一元素 A 都能用 V 中一組元素 $A_1, \cdots, A_m$ 綫性表示时，就是在 F 中能适当选择 a_i, $i=1, \cdots, m$ 使 $A=\sum_{i=1}^{m} a_iA_i$ 时，$A_1, \cdots\cdots, A_m$ 就称为 V 的生成組。

定理 2. 在任一生成組中，無关向量的最大个数等于这向量空間的維数。

令 $A_1, \cdots, A_m$ 是 n 維向量空間 V 的一个生成組。令 r 是这生成組中無关向量的最大个数。适当的重新排列这些生成元之后，我們可以假設 $A_1, \cdots, A_r$ 是無关的。由維数的定义就得 $r\leqslant n$。对于每一个 j, $A_1, \cdots, A_r, A_{r+j}$ 都是相关的，并且在关系

$$a_1A_1+a_2A_2+\cdots+a_rA_r+a_{r+j}A_{r+j}=0$$

中表示了 $a_{r+j}\neq 0$，因为否則的話就有 $A_1, \cdots, A_r$ 相关了。这样就有

$$A_{r+j}=-a_{r+j}^{-1}[a_1A_1+a_2A_2+\cdots+a_rA_r].$$

所以 $A_1, \cdots, A_r$ 也是生成組，这因为对于 V 的任何元素的綫性关系中所含 A_{r+j}, $j\neq 0$ 的項都能用 $A_1, \cdots, A_r$ 的綫性表式來代替。

現在令 $B_1, \cdots, B_t$ 是 V 中任一个向量組，这里 $t > r$，那么就存在 a_{ij}，使得 $B_j = \sum_{i=1}^{r} a_{ij} A_i$，$j=1, 2, \cdots, t$，这因为 A_i 全体成生成組。如果我們能証明 $B_1, \cdots, B_t$ 是相关的，这就告訴我們 $r \geqslant n$，連同以前的不等式 $r \leqslant n$，定理就得証了。于是我們必須示明方程

$$x_1 B_1 + x_2 B_2 + \cdots + x_t B_t = 0$$

存在非顯然解可从 F 中找出。为此目的，只要选擇 x_i 使它滿足綫性方程 $\sum_{j=1}^{t} x_j a_{ij} = 0$，$i=1, 2, \cdots, r$，就可以了。因为这些表式就是，在 $\sum_{j=1}^{t} x_j B_j$ 中的 B_j 用 $\sum_{i=1}^{r} a_{ij} A_i$ 來代替并合并各項后所得 A_i 的系数。根据定理 1，方程 $\sum_{j=1}^{t} x_j a_{ij} = 0$，$i=1, 2, \cdots, r$ 的解总是存在的。

注：在 n 維向量空間里，任何 n 个無关向量 $A_1, \cdots, A_n$ 都成生成組。因为对于任一向量 A，向量 $A, A_1, \cdots, A_n$ 是相关的，并且在相关的关系中，A 的系数不能是零。解 A 以 $A_1, \cdots, A_n$ 表之，就表明了 $A_1, \cdots, A_n$ 是生成組。

向量空間的一子集，如果它是这向量空間的子群，并且体中的任一元素和这子集中任一元素相乘也在这子集中时，这子集就称为子空間。如果 $A_1, \cdots, A_s$ 是向量空間 V 的元素，那么形如 $a_1 A_1 + \cdots + a_s A_s$ 的元素全体的集合，顯然成 V 的子空間。由維数的定义，顯然任一子空間的維数决不超过整个向量空間的維数。

由体 F 的元素作出的 s-数組 $(a_1, \cdots, a_s)$ 称为行向量。如果我們定义了

α) $(a_1, a_2, \cdots, a_s) = (b_1, b_2, \cdots, b_s)$ 当且僅当 $a_i = b_i$, $i = 1, \cdots, s$,

β) $(a_1, a_2, \cdots, a_s) + (b_1, b_2, \cdots, b_s) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_s + b_s)$,

γ) $b(a_1, a_2, \cdots, a_s) = (ba_1, ba_2, \cdots, ba_s)$, 这里 b 是 F 的元素,

那么这样的 s-数組的全体就成向量空間。

当 s-数組寫成縱列形狀, $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_s \end{pmatrix}$, 就称为列向量。

定理 3. 由体 F 作出所有 n-数組的行(列)向量空間 F^n 是 F 上的 n 維向量空間。

n 个元素

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= (1, 0, 0, \cdots, 0) \\ \varepsilon_2 &= (0, 1, 0, \cdots, 0) \\ &\vdots \\ \varepsilon_n &= (0, 0, \cdots, 0, 1) \end{aligned}$$

是無关的, 它們生成 F^n. 这兩个事实可由关系 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \sum a_i \varepsilon_i$ 得出。

体 F 的元素的長方形陣列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

我們称为矩陣。一个矩陣的右行秩意思是指, 以体的元素从右边乘这矩陣的行 $(a_{i1}, \cdots, a_{in})$ 时, 各行之間無关行向量的最大个数。相似的, 我們定义左行秩、右列秩和左列秩。

定理 4. 在任一矩陣中. 右列秩等于左行秩, 左列秩等于

右行秩。如果体是可换的，那么这四个数目都相等，就称为这矩陣的秩。

命这矩陣的列向量是$C_1, \cdots, C_n$，行向量是$A_1, \cdots, A_m$。列向量0是$\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$，那么决定任意相关的关系$C_1x_1+C_2x_2+\cdots+C_nx_n=0$就等价于求方程

$$(1)\qquad \begin{matrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{matrix}$$

的解。任意改变矩陣各行的次序，仍給出相同的方程組，因之就不改变矩陣的列秩。并且因为行寫成的次序改变后的矩陣，行向量的集合仍然相同，所以行秩也不改变。命c为这矩陣的右列秩，r为左行秩。由前述的說明，我們可以假設前r个行向量是無关的。根据定理1，由矩陣的全部行向量所生成的向量空間的維数是r，恰好是由前r个向量所生成的空間的維数。所以在第r行以后的每行就能用前r行綫性表示。于是在(1)中，前r个方程的任一解也就是全組的解。这因为后$n-r$个方程都是前r个方程的綫性組合得來的。反之，(1)的任一解也必是前r个方程的解。这意思就是說原矩陣的前r行所做成的矩陣

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}$$

和原來的矩陣有相同的右列秩。它也有相同的左行秩，这因为所选的r行是無关的。但这裁截出來的矩陣的列秩，根据定理3，不能超过r。因之$c\leqslant r$。同样的，命c'为左列秩，r'为右行秩，那么$c'\leqslant r'$。如果我們作出原來矩陣的轉置矩陣，就是以行为列，以列为行，那么轉置矩陣的左行秩等于原矩陣的左列秩。

如果此时对于轉置矩陣应用上述討論，我們就有 $r \leqslant c$ 和 $r' \leqslant c'$。

E. 非齐次綫性方程

非齐次綫性方程組

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1\\
a_{21}x_1+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_{2n}x_n&=b_2\\
\vdots\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots\quad&\quad\ \vdots\\
a_{m1}x_1+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_{mn}x_n&=b_m
\end{aligned}
$$

有解当且僅当列向量 $\begin{pmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$ 是在由向量 $\begin{pmatrix} a_{11}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_{1n}\\ \vdots\\ a_{mn}\end{pmatrix}$ 所生成的空間內。这意思就是当且僅当矩陣 $\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n}\\ \vdots\qquad \vdots\\ a_{m1}\cdots a_{mn}\end{pmatrix}$ 的右列秩和增廣矩陣 $\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n}\,b_1\\ \vdots\qquad\ \vdots\quad \vdots\\ a_{m1}\cdots a_{mn}\,b_m\end{pmatrix}$ 的右列秩相同时有解，这因为原矩陣所生成的向量空間必須和增廣矩陣所生成的向量空間相同，而根据定理 2，不論在那种情况下，維数总和矩陣的秩相同。

由定理 4，这意思就是行秩相等。反之，如果增廣矩陣的行秩和原矩陣的行秩相等，那么列秩必須相同，而方程必有解。

如果方程 (2) 有解，那么原矩陣各行之間的任一关系在增廣矩陣各行之間也成立。对于方程 (2) 來說，这意思僅僅就是等量的相同組合仍是等量。反过來，如果原矩陣各行之間所成立的每一个关系在增廣矩陣各行之間也成立，那么增廣矩陣的行秩和原矩陣的行秩相同。用方程來說，这意思就是方程有解，必須而且只須这些方程是相容的，亦即必須而且只須这些方程的左边相互之間的任一相关关系，在右边仍成立。

定理 5. 如果在方程 (2) 中，$m=n$，那么必須而且只須对应的齐次方程

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{array}$$

只有顯然解时，才存在唯一解。

如果它們只有顯然解，那么列向量是無关的。于是，原來含有 n 个未知数的 n 个方程如果有解，就只有唯一的解。这因为兩个不同的解逐項的差就成为齐次方程的非顯然解了。解必然是存在的，这因为 n 个無关的列向量構成列向量的 n 維空間的生成組。

反过來，假設方程有一个也僅僅有一个解。在此情况下，把齐次方程的解逐項加到原方程的解上去，就要產生原方程一个新的解。因此齐次方程只能有顯然解。

F. 行列式❶

本章中所討論的行列式理論在伽罗華理論中不是必須的。如果讀者願意可以略去本節。

我們假設体是可換的，而考慮 n 行 n 列的正方矩陣

$$(1)\qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

我們要定义这个矩陣的某一函数，它的值是体內的一个元素．这

❶ 对于以前的理論中只假設齐次方程的定理 1 和綫性相关的概念是已經足够的

函数叫做行列式，用

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示。或者，如果我們希望把它看做（1）的列向量 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 的函数，就以 $D(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ 表示，如果我們除 A_k 以外，保持所有的列不变，而把行列式看做 A_k 的函数，那么就寫成 $D_k(A_k)$，有时只寫成 D。

定义．如果列向量的函数滿足下列三公理：

1. 做为任一列 A_k 的函数來看待，它是綫性的并且是齐次的，就是

$$(3)\qquad D_k(A_k + A'_k) = D_k(A_k) + D_k(A'_k)$$

$$(4)\qquad D_k(cA_k) = c \cdot D_k(A_k)$$

2. 当兩相鄰的列 A_k 和 A_{k+1} 相等时，它的値等于 0。

3. 当所有的 A_k 都是單位向量 U_k 时，它的値等于 1。

这里

$$(5)\qquad U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, U_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

这样的函数称为行列式。

行列式究竟是否存在这問題，现在着手討論。我們僅由公理可導出下列結果：

a）在（4）中令 $c=0$ 就有：如果有一列是 0，这行列式等于 0。

b）$D_k(A_k) = D_k(A_k + cA_{k\pm1})$，亦即如果把一列的倍数加到

相鄰列上，行列式的值不变。事实上，由公理 2，有

$$D_k(A_k+cA_{k\pm 1})=D_k(A_k)+cD_k(A_{k\pm 1})=D_k(A_k).$$

c) 就 A_k 和 A_{k+1} 兩列來討論，首先我們可以用 A_k 和 $A_{k+1}+A_k$ 來代替它們；接着自前一个减去后一个，可見它們又可以用 $-A_k$ 和 $A_{k+1}+A_k$ 來代替；再把前一个加到后一个，就得可以 $-A_{k+1}$ 和 A_k 來代替它們；最后，把 -1 因子提出來。因此我們的結論是：如果交換相鄰兩列，那么行列式改号。

d) 如果任兩列相等，那么行列式等于 0。事实上我們可用交換相鄰兩列的解法把这兩列放到相鄰位置，然后应用公理 2。如果应用 b) 和 c) 的方法，我們可以証明更一般的規則：

e) 把一列的倍数加到另一列上，行列式的值不变。

f) 交換任意兩列，就要改变 D 的符号。

g) 令 $(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$ 是下标 $(1, 2, \cdots, n)$ 的一个排列。如果我們把 $D(A_{\nu_1}, A_{\nu_2}, \cdots, A_{\nu_n})$ 中的列重新排列回到自然次序，我們看到

$$D(A_{\nu_1}, A_{\nu_2}, \cdots, A_{\nu_n})=\pm D(A_1, A_2, \cdots, A_n).$$

这里的 $\pm$ 号是确定的，它和 A_k 的特殊值無关。如用 U_k 代替 A_k 就有 $D(U_{\nu_1}, U_{\nu_2}, \cdots, U_{\nu_n})=\pm 1$，并且这符号只与單位向量的排列有关。

現在我們用下列 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的綫性組合 A_k' 來代替 A_k：

(6) $$A_k'=b_{1k}A_1+b_{2k}A_2+\cdots+b_{nk}A_n.$$

在計算 $D(A_1', A_2', \cdots, A_n')$ 时，首先我們对 A_1' 应用公理 1，把行列式分解为一个和式；然后在每一項中对 A_2' 同样的做，等等。我們得

(7) $D(A_1', A_2', \cdots, A_n')$

$$= \sum_{\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n} D(b_{\nu_1 1} A_{\nu_1}, b_{\nu_2 2} A_{\nu_2}, \cdots b_{\nu_n n} A_{\nu_n})$$

$$= \sum_{\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n} b_{\nu_1 1} \cdot b_{\nu_2 2} \cdot \cdots \cdot b_{\nu_n n} D(A_{\nu_1}, A_{\nu_2}, \cdots, A_{\nu_n})$$

这里每一个 ν_i 各自分别取遍从 1 到 n 各数。如果下标 ν_i 中有兩个相同的話，就有 $D(A_{\nu_1}, A_{\nu_2}, \cdots, A_{\nu_n})=0$；于是我們只需要保留在它們里面，$(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$ 是 $(1, 2, \cdots, n)$ 的排列的这些項，这就給出

(8) $$D(A_1', A_2', \cdots, A_n') = D(A_1, A_2, \cdots, A_n) \cdot \sum_{\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n} \pm b_{\nu_1 1} \cdot b_{\nu_2 2} \cdot \cdots \cdot b_{\nu_n n},$$

这里 $(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$ 取遍所有 $(1, 2, \cdots, n)$ 的排列，而且这里的 $\pm$ 表明与那排列相联的符号。必須指出，如果函数 D 只滿足头兩个公理的話，我們也能達到同样的公式 (8)。

从 (8) 能導出許多結論。

首先我們引用公理 3，并把 A_k 特定为 (5) 的單位向量 U_k。这使得 $A_k' = B_k$，这里 B_k 是 b_{ik} 的矩陣的列向量。于是 (8) 產生：

(9) $$D(B_1, B_2, \cdots, B_n) = \sum_{\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n} \pm b_{\nu_1 1} \cdot b_{\nu_2 2} \cdot \cdots \cdot b_{\nu_n n},$$

它給了我們行列式的一个顯明的公式而且当它們存在时，示明了它們可由公理唯一确定。

我們回到公式 (8)，由表式 (9) 就得

(10) $$D(A_1', A_2', \cdots, A_n') = D(A_1, A_2, \cdots, A_n) D(B_1, B_2, \cdots, B_n).$$