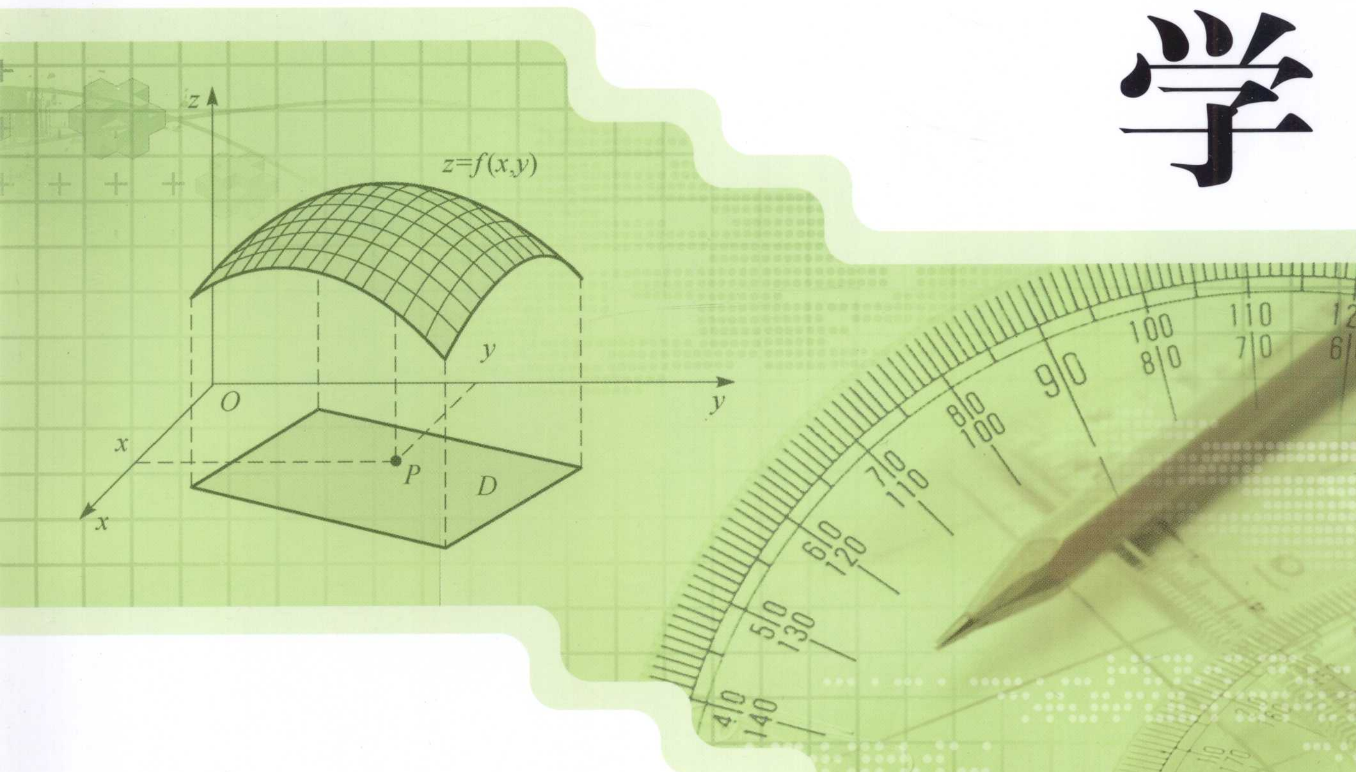
21世纪高职高专规划教材

应用数学

YINGYONG SHUXUE

（下册）

主　编　周金玉
副主编　邓总纲　欧阳章东　肖前军



北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

21世纪高职高专规划教材

应用数学

（下册）

主　编　周金玉

副主编　邓总纲　欧阳章东　肖前军

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书依据“以职业能力为主线构建课程体系和教学内容”的指导思想，力求贯彻“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，在保证科学性的基础上注意讲清概念，减少理论证明，注重对学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养，特别是每个模块中都编写了用数学软件 MathCAD 解决数学问题的内容，突破了高职院校学生学习数学计算的瓶颈，体现了高等职业教育的教学特色。

本书分为上、下两册，上册内容包括一元微积分、线性代数、概率论与数理统计等三部分内容，共分为十一个模块；下册内容包括微分方程、多元函数微分学、无穷级数、离散数学及数学文化等五部分内容，分为九个模块，分别是：向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、二重积分、微分方程、拉普拉斯变换、无穷级数、数理逻辑、图论简介和数学史与数学文化。

本书的基本教学时数约为 110 学时。可供高职院校工科类和经济管理类专业不同学习层次的学生作为教材或教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

应用数学．下册/周金玉主编．—北京：北京理工大学出版社，2009.1
21 世纪高职高专规划教材
ISBN 978 -7 -5640 -1657 -9

Ⅰ. 应…　Ⅱ. 周…　Ⅲ. 应用数学 - 高等学校：技术学校 - 教材　Ⅳ. O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 007716 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http：// www. bitpress. com. cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本 / 787 毫米 ×960 毫米　1/16
印　　张 / 15.75
字　　数 / 325 千字
版　　次 / 2009 年 1 月第 1 版　　2009 年 1 月第 1 次印刷
印　　数 / 1 ~4000 册　　　　责任校对 / 陈玉梅
定　　价 / 28.00 元　　　　责任印制 / 边心超

前　言

为了适应高等职业技术教育培养技术应用型人才的需要，不断提高教学质量，更好地为专业课的教学服务，我们根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程基本要求》编写了本书，本书可作为高职高专院校各专业高等数学课程的选用教材或教学参考书。

本书依据“以职业能力为主线构建课程体系和教学内容”的指导思想，在充分调研的基础上，与专业教师共同商讨，构建了教材的内容，加强了教材的实用性、科学性、针对性，力求贯彻“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，在保证科学性的基础上注意讲清概念，减少理论证明，注重学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养。

特别地，本书的每个模块中都编写了用计算功能强大的、几乎不使用程序语言的、具有所见即所得特点的数学软件——MathCAD 解决数学计算问题的内容，突破了高职院校学生学习数学计算的瓶颈，体现了高等职业教育的教学特色。

本书分为上、下两册，上册内容包括一元微积分、线性代数、概率论与数理统计三部分内容，共分为十一个模块，分别是：高等数学基础与 MathCAD 简介、函数的极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、行列式与矩阵、线性方程组、线性规划、概率论和数理统计；下册内容包括微分方程、多元函数微分学、无穷级数、离散数学及数学文化五部分内容，分为九个模块，分别是：向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、二重积分、常微分方程、拉普拉斯变换、无穷级数、命题逻辑、图论简介和数学史与数学文化。本书内容分模块、分层次编排，供工科类和经济管理类专业不同学习层次的学生选用。

本书的基本教学时数约为 110 学时。

本书的模块十二、十五、十六由肖前军编写，模块十三、十四由邓总纲编写，模块十七、十八由欧阳章东编写，模块十九、二十由周金玉编写。本书由湖南理工职业技术学院周金玉任主编，并统稿，由黄靖龙教授和杨小华副教授任主审。本书在编写过程中得到了有关领导与老师的大力支持，他们为本书的编写提出了许多有益的建议，编者在此表示衷心的感谢！

限于编者的水平，加上成书仓促，书中难免存在缺点和错误，请有关专家及使用本书的师生批评指正。

编　者

目　录

模块十二　向量代数与空间解析几何 …… 1
第一节　向量及其线性运算 …… 1
第二节　向量与向量的乘法 …… 7
第三节　平面与直线 …… 12
第四节　曲面 …… 18
第五节　用 MathCAD 作图 …… 23
模块十三　多元函数微分学 …… 34
第一节　多元函数 …… 34
第二节　偏导数 …… 40
第三节　全微分 …… 45
第四节　复合函数的偏导数 …… 49
第五节　多元函数的极值 …… 52
第六节　MathCAD 在多元函数中的应用 …… 56
模块十四　二重积分 …… 61
第一节　二重积分的概念 …… 61
第二节　二重积分的计算 …… 64
第三节　二重积分的应用举例 …… 69
第四节　用 MathCAD 计算二重积分 …… 71
模块十五　常微分方程 …… 73
第一节　微分方程的基本概念 …… 73
第二节　可分离变量的微分方程 …… 76
第三节　齐次方程 …… 78
第四节　一阶线性微分方程 …… 80
第五节　可降阶的高阶微分方程 …… 81
第六节　二阶常系数线性微分方程 …… 84
第七节　用 MathCAD 解微分方程 …… 91
模块十六　拉普拉斯变换 …… 96
第一节　拉氏变换的基本概念 …… 96
第二节　拉氏变换的性质 …… 98

第三节　拉氏变换的逆变换 …… 103
第四节　拉氏变换的应用举例 …… 106
第五节　用 MathCAD 求拉氏（逆）变换及用拉氏变换求解微分方程 …… 107
模块十七　无穷级数 …… 110
第一节　常数项级数的概念和性质 …… 110
第二节　正项级数及其审敛法 …… 115
第三节　任意项级数及其审敛法 …… 118
第四节　幂级数 …… 121
第五节　函数的幂级数展开 …… 127
第六节 *用 MathCAD 求幂函数展开式 …… 134
第七节　傅里叶级数 …… 135
模块十八　命题逻辑 …… 143
第一节　命题及其表示法 …… 143
第二节　联结词 …… 145
第三节　命题公式与翻译 …… 149
第四节　真值表与等价交换公式 …… 152
第五节　重言式与蕴含式 …… 159
第六节　其他联结词 …… 163
第七节　对偶与范式 …… 168
第八节　推理理论 …… 177
*第九节　应用 …… 185
模块十九　图论简介 …… 191
第一节　图与子图 …… 191
第二节　树 …… 199
第三节　图的连通性 …… 201
第四节　Euler 图与 Hamilton 图 …… 203
第五节　平面图 …… 206
第六节　有向图 …… 207
模块二十　数学史与数学文化 …… 210
第一节　世界数学史 …… 210
第二节　中国数学史 …… 217
第三节　现代数学简介 …… 228
第四节　数学的文化价值 …… 239
参考文献 …… 246

模块十二　向量代数与空间解析几何

学习要求：

1. 理解向量的概念及其表示法，掌握向量的线性运算.
2. 理解向量乘积的定义，掌握用坐标表示进行向量的乘积运算.
3. 掌握平面与直线的几种常用方程.
4. 了解曲面及其方程，并了解常见的二次曲面的方程及其图形.

向量是解决许多数学、物理、力学及工程技术问题的有力工具．本章我们将介绍向量的概念、向量的运算及空间解析几何的有关内容.

第一节　向量及其线性运算

一、空间直角坐标系

要确定空间点的位置，就必须有一定的“参照物”，这个参照物就是坐标系．仿照平面直角坐标系，下面我们来建立空间直角坐标系.

定义 1　在空间内取定一点 O，过点 O 作三条具有相同的长度单位且两两互相垂直的数轴 x 轴、y 轴和 z 轴，这样就建立了空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$，点 O 称为坐标原点，x 轴、y 轴和 z 轴统称为坐标轴，又分别叫横轴、纵轴和竖轴.

通常规定 x 轴、y 轴和 z 轴的正向要遵循右手法则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴的正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴的正向时，大拇指的指向是 z 轴的正向（图 12–1）.

由任意两条坐标轴确定的平面称为坐标面．由 x 轴和 y 轴，y 轴和 z 轴，z 轴和 x 轴所确定的坐标面分别叫 xOy 面，yOz 面，zOx 面．三个坐标面把空间分隔成八个部分（图 12–2），每个部分称为一个卦限．在此 xOy 面的上方有四个卦限，下方有四个卦限，以 x 轴正半轴，y 轴正半轴，z 轴正半轴为棱的那个卦限称为第Ⅰ卦限，在 xOy 平面上方的其他三个卦限按逆时针方向依次称为第Ⅱ、第Ⅲ、第Ⅳ卦限；对分别位于第Ⅰ，第Ⅱ，第Ⅲ，第Ⅳ卦限下面的

四个卦限，依次称为第Ⅴ，第Ⅵ，第Ⅶ，第Ⅷ卦限.

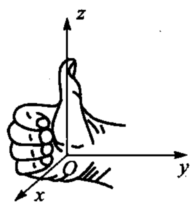


图 12–1

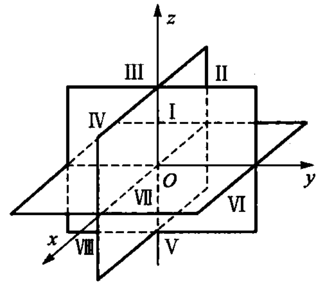


图 12–2

建立了空间直角坐标系，就可以建立起空间内的点与数组之间的对应关系.

设点 M 是空间的一点，过点 M 分别作与三条坐标轴垂直的平面，分别交 x 轴、y 轴和 z 轴于点 P, Q, R，则点 P, Q, R 叫做点 M 在坐标轴上的投影（图 12–3）. 设点 P, Q, R 在三条坐标轴上的坐标依次为 x, y, z，于是点 M 唯一地确定有序数组 x, y, z. 反之，给定有序数组 x, y, z，总能在三条坐标轴上找到以它们为坐标的点 P, Q, R. 过这三点分别作垂直于三条坐标轴的平面，三个平面必然交于点 M. 由此可见，点 M 和有序数组 x, y, z 之间存在着一一对应的关系. 有序数组 x, y, z 称为点 M 的坐标，且依次称 x, y, z 为横坐标，纵坐标和竖坐标. 坐标为 x，y，z 的点 M 记作 $M(x, y, z)$. 很明显，原点的坐标为 $O(0, 0, 0)$；x轴上点的坐标为$(x, 0, 0)$，y 轴上点的坐标为$(0, y, 0)$，z 轴上的点的坐标为$(0, 0, z)$；xOy 平面上点的坐标为$(x, y, 0)$，xOz 平面上点的坐标为$(x, 0, z)$，yOz 平面上点的坐标为$(0, y, z)$.

例 12.1 在空间直角坐标系中，标出下列各点的位置：$A(1, 2, 3)$，$B(0, 0, 1)$，$C(-1, 0, 0)$.

解 根据坐标与点的对应关系，描出各点如图 12–4 所示.

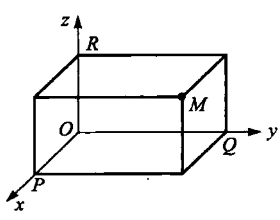


图 12–3

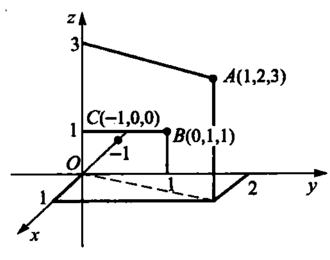


图 12–4

设点 $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$和 $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$是空间两点. 过点 M_1 和 M_2 分别作垂直于 x, y, z 的平面，这六个平面围成一个以 M_1，M_2 为对角线的长方体（图 12–5），从图中容易看到，该长方体的各棱长分别为$|x_2 - x_1|$，$|y_2 - y_1|$，$|z_2 - z_1|$，根据立体几何的知识，长方体的对角线长的平方等于三条棱长的平方和，于是有

$$|M_1M_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$$

所以点 M_1 和 M_2 间的距离为

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

特别地，点 $M(x,y,z)$与坐标原点的距离为

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

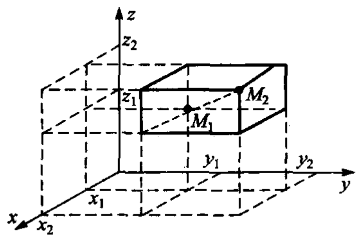


图 12–5

例 12.2　求证：以 $M_1(4,1,9)$，$M_2(10,-1,6)$和 $M_3(2,4,3)$三点为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证：因为 $|M_1M_3|=\sqrt{(4-2)^2+(1-4)^2+(9-3)^2}=7$

$$|M_2M_3|=\sqrt{(10-2)^2+(-1-4)^2+(6-3)^2}=\sqrt{98}$$

$$|M_1M_2|=\sqrt{(10-4)^2+[1-(-1)]^2+(9-3)^2}=7$$

显然$|M_1M_3|=|M_1M_2|$，且$|M_1M_3|^2+|M_1M_2|^2=|M_3M_2|^2$

故三角形 $M_1M_2M_3$ 为等腰直角三角形.

例 12.3　一动点 $M(x,y,z)$到原点 $O(0,0,0)$的距离为定值 1，求动点的轨迹方程.

解　因为$|MO|=1$，所以根据两点间的距离公式，得

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=1$$

化简，得所求轨迹方程为

$$x^2+y^2+z^2=1$$

二、空间向量及其线性运算

定义 2　与平面向量一样，在空间，我们把具有大小和方向的量叫作**向量**. 向量的大小称为向量的模，向量 $\boldsymbol{a}$ 的模记作$|\boldsymbol{a}|$. 模为零的向量称为零向量，记作 $\boldsymbol{0}$，规定零向量的方向可以是任意的；模为 1 的向量称为**单位向量**.

向量的表示方法：一种是用小写黑体英文字母或用小写英文字母上面加箭头表示，如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 或$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$；另一种是用两个大写英文字母写出向量的起点与终点，上面加箭头，起点写在左边，终点写在右边，如向量$\overline{AB}$.

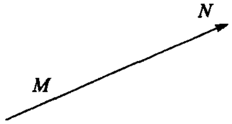


图 12–6

在几何上，空间向量也用有向线段表示，并且方向相同、长度相等的有向线段表示同一向量或相等的向量. 起点为 M，终点为 N 的向量记作$\overline{MN}$（图 12–6）.

定义 3　如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模相等，且方向相同，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$

相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

定义 4 与平面向量一样，方向相同或相反的两个向量相互平行或重合，称为**共线向量**或**平行向量**，向量 $\boldsymbol{a}$ 平行于 $\boldsymbol{b}$，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向是任意的，我们约定零向量与任何向量都平行.

定义 5 向量的加法、减法与数乘统称为**向量的线性运算**.

我们用下面两个向量的加法法则来求两个向量的和.

法则 1（平行四边形法则） 将向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 起点放在同一点，以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形，则从起点指向这个平行四边形对角顶点的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和向量**，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（图 12–7）.

法则 2（三角形法则） 将向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点作为向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点，则从 $\boldsymbol{a}$ 的起点指向 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（图 12–8）.

向量加法的三角形法则可推广应用到有限个向量相加，如向量 $\overrightarrow{A_1B_1}$，$\overrightarrow{A_2B_2}$，…，$\overrightarrow{A_nB_n}$，将这些向量的起点与终点顺次相连，则第一个向量的起点指向最后一个向量终点的向量 $\overrightarrow{A_1B_n}$，即为 $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+\cdots+\overrightarrow{A_nB_n}$.

定义 6 设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量叫作 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$. 因此，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $-\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 向量的减法也可按三角形法则进行，只要把 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 即是以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为起点、以 $\boldsymbol{a}$ 的终点为终点的向量（图 12–9）.

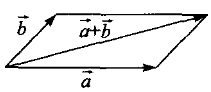


图 12–7

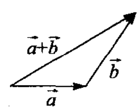


图 12–8

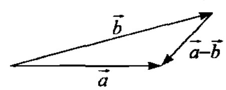


图 12–9

显然，$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0$.

当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，由向量加法的三角形法则可以看出，$|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$，它的几何解释是三角形的两边之和大于第三边.

定义 7 数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个平行于 $\boldsymbol{a}$ 的向量，它的模是向量 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $|\lambda|$ 倍，即 $|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\,|\vec{a}|$. 并规定，当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量.

同样，空间向量的加法、减法与数乘满足以下运算性质：

（1）交换律 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

（2）结合律 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$；$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}=\mu(\lambda\vec{a})$

（3）分配律 $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$；$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

定理 1 向量 $\boldsymbol{b}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 平行的充要条件是存在实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$

设 $\boldsymbol{a}$ 是一个非零向量，则与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量记作 $\vec{a}^0$，且

$$\vec{a}^0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

上式表明，求与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量 $\vec{a}^0$，只需用 $\boldsymbol{a}$ 的模的倒数乘以向量 $\boldsymbol{a}$.

三、向量的坐标表示

如图 12–10，在空间直角坐标系中，分别与 Ox，Oy，Oz 轴方向相同的单位向量依次记作 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$. $\boldsymbol{a}$ 是空间任意向量，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$，点 M 在 Ox，Oy，Oz 轴上的投影依次为 P，Q，R. 如果点 M 的坐标为(x, y, z)，则

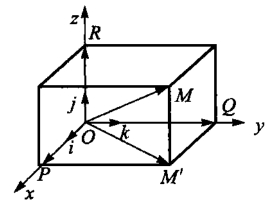


图 12–10

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$$

于是，由向量加法，有

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

很明显，当向量 $\boldsymbol{a}$ 确定时，$\overrightarrow{OM}$ 唯一确定，从而唯一确定有序数组$\{x, y, z\}$；反之，给定有序数组$\{x, y, z\}$，又能唯一确定一个向量 $\overrightarrow{OM}$，从而唯一确定一个与 $\overrightarrow{OM}$ 的大小相等且方向相同的向量 $\boldsymbol{a}$. 所以，有序数组$\{x, y, z\}$与向量 $\boldsymbol{a}$ 之间存在着一一对应关系，可以用它来表示向量 $\boldsymbol{a}$，记作 $\boldsymbol{a}=\{x, y, z\}$. 上式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标表达式**，数 x，y，z 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，向量 $x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$，$z\boldsymbol{k}$ 分别称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴，y 轴，z 轴方向上的**分向量**.

坐标表示下的向量运算

设 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，$\lambda$ 为实数，则有

（1）$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2\}$

（2）$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1\}$

（3）$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1=x_2,y_1=y_2,z_1=z_2$

（4）$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$

注意：在最后一个等式中，当 x_2,y_2,z_2 中至少有一个为零时，例如只有 $x_2=0$ 时，等式应理解为 $\begin{cases}x_1=0\\ \dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}\end{cases}$；当 $x_2=y_2=0$ 时，等式应理解为 $\begin{cases}x_1=0\\ y_1=0\end{cases}$.

设点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，则以 M_1 为起点，以 M_2 为终点的向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$（图 12–11）的坐标为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=\{x_2,y_2,z_2\}-\{x_1,y_1,z_1\}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$$

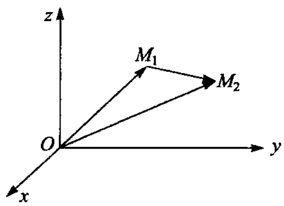


图 12–11

这就是说，一个向量在直角坐标系中的坐标等于表示这个向量的有向线段的终点坐标减去起点坐标.

例 12.4 已知 $M_1(0,-1,2)$和 $M_2(1,0,3)$，求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模及与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 方向相同的单位向量.

解 因为向量的坐标为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(1-0,0-(-1),3-2)=(1,1,1),$$

所以，向量的模为 $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$.

与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 方向相同的单位向量为

$$\overrightarrow{M_1M_2}\frac{1}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

定义 8 设给定两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，将向量 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 平移，使它们的起点重合（图 12–12），它们所在射线之间的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角**，记作 $<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$.

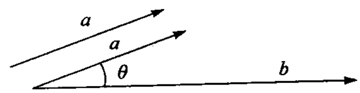


图 12–12

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量时，规定它们的夹角可在 $[0,\pi]$ 中任意取值. 当 $<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\frac{\pi}{2}$ 时，就称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 同样，我们约定零向量与任何向量都垂直.

向量 $\boldsymbol{a}$ 与数轴的夹角即为向量 $\boldsymbol{a}$ 和与该数轴正向同向的向量的夹角.

定义 9 非零向量 $\boldsymbol{a}$ 分别与 x 轴、y 轴、z 轴正向的夹角 α、β、γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角. $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

从图 12–13 上可知，对于给定的一个非零向量 $\boldsymbol{a}$，它的方向可由其方向角或方向余弦来确定.

设 $\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}$，则 $\cos\alpha=\dfrac{x}{|\vec{a}|}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$\cos\beta=\dfrac{y}{|\vec{a}|}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\vec{a}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\text{，且 }\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1\text{，}$$

$$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\left\{\frac{x}{|\vec{a}|},\frac{y}{|\vec{a}|},\frac{z}{|\vec{a}|}\right\}=\frac{1}{|\vec{a}|}\{x,y,z\}=\frac{1}{|\vec{a}|}\boldsymbol{a}$$

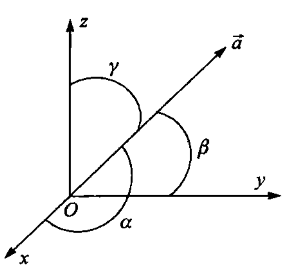


图 12–13

说明 $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 是单位向量，且与向量 $\boldsymbol{a}$ 同向，即是与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量.

例 12.5 已知两点 $P(2,\sqrt{2},2)$，$Q(1,0,3)$，计算向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的模、方向余弦及方向角.

解　$\overrightarrow{PQ}=\{1-2,0-\sqrt{2},3-2\}=\{-1,-\sqrt{2},1\}$；

$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=2$；$\cos\alpha=\dfrac{-1}{2}$，$\cos\beta=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$，$\cos\gamma=\dfrac{1}{2}$，

因此$\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$，$\beta=\dfrac{3\pi}{4}$，$\gamma=\dfrac{\pi}{3}$

习　题　一

1. 已知点$A(2,-1,1)$，则点A与z轴的距离是______，与y轴的距离是______，与x轴的距离是______.
2. 求点$M_1(5,10,15)$到点$M_2(25,35,45)$之间的距离.
3. 设A，B两点为$A(4,-7,1)$，$B(6,2,z)$，它们之间的距离为$|AB|=11$，求z.
4. 求起点为$A(1,2,1)$，终点为$B(-19,-18,1)$向量$\overline{AB}$的坐标表达式及$|\overline{AB}|$.
5. 求平行于$\boldsymbol{a}=\{1,1,1\}$的单位向量.
6. 求λ使向量$\boldsymbol{a}=\{\lambda,1,5\}$与向量$\boldsymbol{b}=\{2,10,50\}$平行.
7. 求与向量$\boldsymbol{a}=\{1,5,6\}$平行，模为10的向量$\boldsymbol{b}$的坐标表达式.

第二节　向量与向量的乘法

一、向量的点积

1. 点积的定义及运算规律

设一物体受到一常力$\vec{F}$作用沿直线由A点运动到B点，由物理学知识知道，力$\vec{F}$在这一段时间内所做的功为$W=|\vec{F}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta$（$\theta$为$\vec{F}$与$|\overrightarrow{AB}|$所夹的角）.

这种由两个向量运算以后得到一个数的式子在解决实际问题中经常遇到. 下面给出向量与向量的内积.

定义 1　两个向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的点积（也称内积、数量积）等于这两个向量的模与它们的夹角的余弦的乘积，记为$\vec{a}\cdot\vec{b}$. 即$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos<\widehat{\vec{a},\vec{b}}>=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$，其中$\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角.

注意：两向量点积运算的结果为一个数，点积运算符不能省略.

根据这个定义，上述力$\vec{F}$所作的功为：$W=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$.

由定义容易推得：

（1）$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ 或 $\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=|\vec{a}|$；

（2）当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 均为非零向量时，$\cos<\vec{a},\hat{\vec{b}}>=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$；

（3）两个向量垂直的充分必要条件是$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

点积满足如下运算规律：

（1）交换律　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

（2）分配律　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

（3）结合律　$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$.（其中$\lambda$为数）

可以看出上述运算规律和代数运算规律相同，因此在作向量的内积运算时可运用我们熟悉的代数运算规律来处理.

例 12.6　已知 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 三个相互垂直的基本单位向量，试证：

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=1,\quad \vec{j}\cdot\vec{j}=1,\quad \vec{k}\cdot\vec{k}=1,\quad \vec{i}\cdot\vec{j}=0,\quad \vec{i}\cdot\vec{k}=0,\quad \vec{j}\cdot\vec{k}=0.$$

证明　因为$|\vec{i}|=1$，$|\vec{j}|=1$，$|\vec{k}|=1$

所以$\vec{i}\cdot\vec{i}=|\vec{i}||\vec{i}|\cos 0=1$，$\vec{j}\cdot\vec{j}=|\vec{j}||\vec{j}|\cos 0=1$，$\vec{k}\cdot\vec{k}=|\vec{k}||\vec{k}|\cos 0=1$；

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=|\vec{i}||\vec{j}|\cos\frac{\pi}{2}=0,\quad \vec{i}\cdot\vec{k}=|\vec{i}||\vec{k}|\cos\frac{\pi}{2}=0,\quad \vec{j}\cdot\vec{k}=|\vec{j}||\vec{k}|\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

例 12.7　已知 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，计算$\vec{a}\cdot\vec{b}$.

解　$\vec{a}\cdot\vec{b}=(2\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k})\cdot(\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k})$

$=2\vec{i}\cdot\vec{i}+6\vec{i}\cdot\vec{j}-4\vec{i}\cdot\vec{k}-3\vec{j}\cdot\vec{i}-9\vec{j}\cdot\vec{j}+6\vec{j}\cdot\vec{k}+5\vec{k}\cdot\vec{i}+15\vec{k}\cdot\vec{j}-10\vec{k}\cdot\vec{k}$

$=2-9-10=-17$

2. 向量内积的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$，$\boldsymbol{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$，则

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

因此两个向量的内积等于这两个向量对应同名坐标乘积之和.

由向量的模与向量的夹角和向量内积的关系，有

（1）$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$；

（2）$\cos<\vec{a},\hat{\vec{b}}>=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a||b|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$；

（3）$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充分必要条件是 $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$.

例 12.8　已知点 $M(1,1,1)$，$A(1,2,2)$，$B(2,1,2)$，求 $\angle AMB$.

解　$\angle AMB$ 是向量 $\overrightarrow{MA}$ 与 $\overrightarrow{MB}$ 的夹角，因为

$$\overrightarrow{MA}=\{1-1,2-1,2-1\}=\{0,1,1\},\ |\overrightarrow{MA}|=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2},$$

$$\overrightarrow{MB}=\{2-1,1-1,2-1\}=\{1,0,1\},\ |\overrightarrow{MB}|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2},$$

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0\times1+1\times0+1\times1=1$$

所以 $\cos\angle AMB=\dfrac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，得 $\angle AMB=\dfrac{\pi}{3}$.

例 12.9　若向量 $\boldsymbol{a}=\{m,2,-3\}$ 与 $\boldsymbol{b}=\{-1,6,m\}$ 垂直，求 m.

解　由向量垂直的充要条件知：$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，即 $m\times(-1)+2\times6+(-3)\times m=0$，解得 $m=3$.

二、向量的叉积

1. 叉积的定义及运算规律

如图 12–14 所示，设 O 为一杠杆 L 的支点，力 $\boldsymbol{F}$ 作用于这杠杆上 P 点处，力 $\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角为 θ，根据力学知识，力 $\vec{F}$ 对支点 O 的力矩是一向量 $\boldsymbol{M}$，$|\vec{M}|=|\overrightarrow{OP}||\vec{F}|\sin\theta$，$\boldsymbol{M}$ 的方向按以下方法确定：伸出右手，让右手四指指向 $\overrightarrow{OP}$ 的方向，当四指以不超过 π 的角度转向 $\boldsymbol{F}$ 握拳时，大拇指所指的方向就是 $\boldsymbol{M}$ 的方向.（在四指转向 $\boldsymbol{F}$ 握拳时，大拇指始终与四指垂直），见图 12–15.

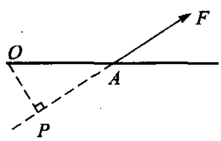


图 12–14

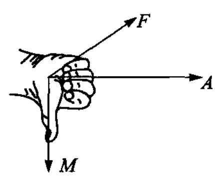


图 12–15

在解决实际问题时，经常遇到和上述同样的情况，即由两个向量按一定的规则来确定一个新的向量.

定义 2　已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，若向量 $\boldsymbol{c}$ 由以下方式确定：

（1）$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin<\widehat{\vec{a},\vec{b}}>$；

（2）$\boldsymbol{c}$ 的方向同时垂直 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 符合右手螺旋法则.

则向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的叉积（也称外积、向量积），记作 $\vec{a}\times\vec{b}$，即 $\boldsymbol{c}=\vec{a}\times\vec{b}$.

（所谓右手螺旋法则是伸出右手，让右手四指指向向量 **a**，当四指以不超过 π 的角度转向 **b** 时（在此过程中，大拇指始终与四指垂直），大拇指所指的方向即为 **c** 的方向.（见图 12–16）因此，上述实例的力矩 $\boldsymbol{M}=\overrightarrow{OP}\times\vec{F}$.

由叉积的定义可推得：

（1）$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$；

（2）向量 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$；

（3）$|\vec{a}\times\vec{b}|$ 的几何意义为以 **a**、**b** 为邻边的平行四边形的面积. 见图 12–17.

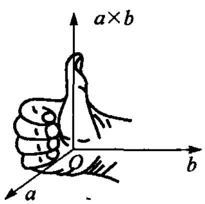


图 12–16

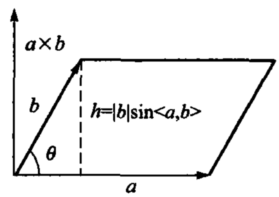


图 12–17

叉积满足如下运算规律：

（1）反交换律　$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

（2）结合律　$(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$（$\lambda$为数）

（3）分配律　$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$；$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}$

叉积的运算不满足交换律，因此在运算时不能随意交换向量的位置.

例 12.10　已知 **i**、**j**、**k** 三个相互垂直的基本单位向量，试证：

$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$，$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$，$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$，$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$，$\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$，$\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$.

证明　只证 $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$，其他的类似.

由于 **i**、**j**、**k** 三个相互垂直的基本单位向量，且 **i**、**j**、**k** 符合右手螺旋法则，因而 $\vec{i}\times\vec{j}$ 的方向与 **k** 的方向相同，又 $|\vec{i}\times\vec{j}|=|\vec{i}||\vec{j}|\sin\dfrac{\pi}{2}=1$，所以 $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$.

2. 叉积的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}=\{a_1,a_2,a_3\}$，$\boldsymbol{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}=\{b_1,b_2,b_3\}$，则

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}+(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}$$

$$=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\vec{k}=\left\{\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right\}$$

上式用一个三阶行列式表示更便于记忆：

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

例 12.11　求同时垂直于向量 $\boldsymbol{a}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ 与 $\boldsymbol{b}=\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ 的单位向量.

解　因为向量 $\vec{a}\times\vec{b}$ 同时垂直于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，故所求向量与 $\vec{a}\times\vec{b}$ 平行.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix}$$

$$=1\times(-2)\vec{i}+2\times3\vec{k}+1\times(-1)\vec{j}-1\times1\vec{k}-(-2)\times2\vec{j}-3\times(-1)\vec{i}=\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{1^2+3^2+5^2}=\sqrt{35}$$

所求的单位向量为 $\pm\dfrac{1}{\sqrt{35}}(\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k})$.

例 12.12　已知三点 $A(3,-1,2)$， $B(-1,2,1)$， $C(1,-1,0)$，求以这三点为顶点的 $\triangle ABC$ 的面积.

解　根据已知可得向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的坐标，由叉积的几何意义可知以这两个向量为邻边的四边形的面积，进而可得所求.

$$\overrightarrow{AB}=\{-4,3,-1\},\quad \overrightarrow{AC}=\{-2,0,-2\},$$

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & 3 & -1\\ -2 & 0 & -2\end{vmatrix}=-6\vec{i}-6\vec{j}+6\vec{k},$$

于是

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|-6\vec{i}-6\vec{j}+6\vec{k}|=\frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+(-6)^2+6^2}=3\sqrt{3}.$$

例 12.13　已知力 $\vec{F}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ 作用于杠杆上点 $A(1,1,1)$ 处，求此力关于另一点 $B(3,-1,1)$ 的力矩.

解　$\overrightarrow{BA}=\{-2,2,0\}$，则力 $\boldsymbol{F}$ 关于点 B 的力矩为

$$\boldsymbol{M}=\overrightarrow{BA}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix}=-6\vec{i}-4\vec{k}-2\vec{k}-6\vec{j}=-6\vec{i}-6\vec{j}-6\vec{k}$$