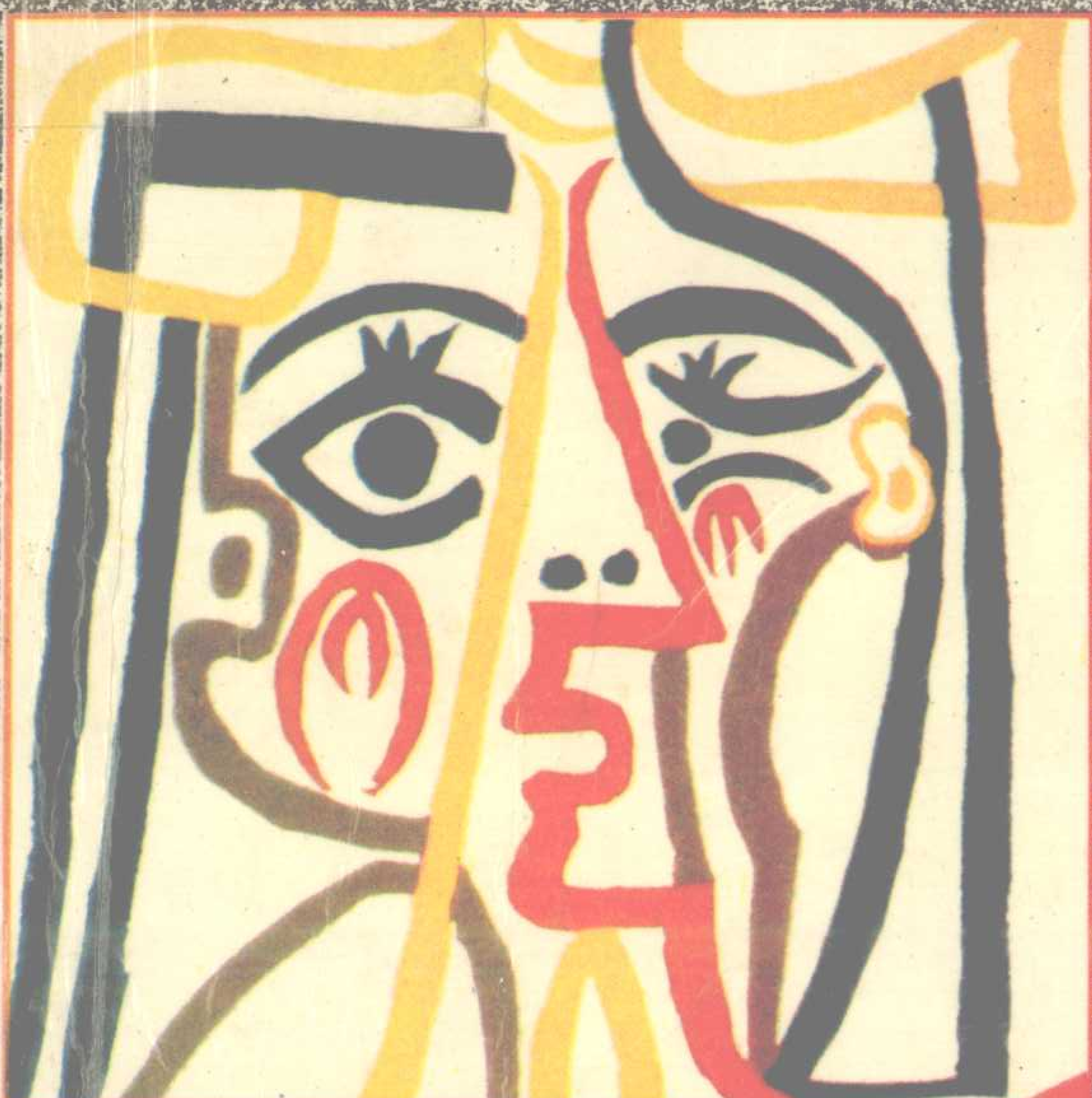
市华罗庚学校奥林匹克系列丛书

华罗庚学校数学课本

初二年级



中国人民大学附中　编

$11a \leqslant 74 \leqslant 11a+18$

中学部

3

m^2

中国大百科全书出版社

北京市华罗庚学校奥林匹克系列丛书

- 华罗庚学校数学课本(一年级)
- 华罗庚学校数学课本(二年级)
- 华罗庚学校数学课本(三年级)
- 华罗庚学校数学课本(四年级)
- 华罗庚学校数学课本(五年级)
- 华罗庚学校数学课本(六年级)
- 华罗庚学校数学课本(初一年级)
- 华罗庚学校数学课本(初二年级)
- 华罗庚学校数学课本(初三年级)
- 华罗庚学校数学课本(高一年级)
- 华罗庚学校数学课本(高二年级)
- 华罗庚学校数学课本(高三年级)

* * * * *

- 奥林匹克中学数学讲座
- 奥林匹克小学数学讲座

* * * * *

- 华罗庚学校计算机教材

* * * * *

- 华罗庚学校数学试题解析(共七册)

ISBN 7-5000-5665-6

9 787500 056652 >

ISBN 7-5000-5665-6/G·1

定价： 9.80元

北京市华罗庚学校奥林匹克系列丛书

(

华罗庚学校
数学课本

（初二年级）

中国人民大学附中编
主编：刘彭芝

中国大百科全书出版社
北京·1996

顾　问：王　元　裘宗沪
冯克勤　陈德泉
主　编：刘彭芝
副主编：童　欣
编　委：周春荔　李珞珈
王健民　颜华菲
邵光砚　邓　均

图书在版编目（CIP）数据

华罗庚学校数学课本：初二年级/刘彭芝主编．北京：中国大百科全书出版社，1996.2
（北京市华罗庚学校奥林匹克系列丛书）
ISBN 7—5000—5665—6

Ⅰ．华…
Ⅱ．刘…
Ⅲ．数学—小学—教材
Ⅳ．G624．501

前　言

北京市华罗庚学校是由中国科学院华罗庚实验室、中国科技大学和中国人民大学附中联合创办的，是中国人民大学附中超常教育体系的重要组成部分。其办学目标是为国家大面积早期发现与培养现代杰出科技人才开辟一条切实可行的途径，为我国教育事业面向现代化、面向世界、面向未来的战略方针探索一项行之有效的举措。在这里，一大批高级教师、大学教授和研究员精心执教，一批批数理超常儿童茁壮成长。华校全体师生缅怀我国著名数学家华罗庚教授，崇尚他为国为民鞠躬尽瘁的高贵品质，决心沿着他的路继续走下去，在教育改革的时代大潮中争做弄潮儿，为实现中华民族重振雄风的宏图大业甘当马前卒。

超常教育与早期教育，为当今各国教育家、心理学家所重视。超常教育研究得到了各国政府以及有远见卓识的社会各界人士的支持和赞助。他们认为，早期教育一旦在世界范围内推广成功，给世界带来的巨大影响，远比世界上任何一次科技革命和产业革命更深刻、更广泛。在前苏联，国家开办有各类天才学校，用于培养科技文体方面的超常儿童。在美国，控制论的创立者、“神童”维纳就是家庭和学校共同精心培育成功的典型。

近年来，我国众多有识之士在改革开放、建设有中国特色社会主义的宏图大业感召下，投身超常教育事业，辛勤耕

耘，刻苦研究，已经取得可喜的成果。超常教育是人类教育史上的一大进步。然而，不言而喻，超常教育又是一个异常复杂的新的教育课题。不论是历史上还是现实生活中，少年出众，而成年寻常的人比比皆是。究其原因，往往在于成长环境不佳，而主要则是未能在超常教育理论指导下施以特殊教育的结果。因此，我们必须更新教育观念，采取新的教育理论和方法，把大批聪慧儿童培养成为高科技时代的栋梁之材。创办华罗庚学校的主旨，就在于探索一条使那些天资优异的孩子们，既不脱离群体，以免身心畸形发展，又使他们的才华得以充分开发的可行之路。

七百多年前，英国思想家、现代实验科学的先驱罗吉尔·培根曾说："数学是科学的大门和钥匙。"时至今日，人们更加清楚地看到了数学在现代教育中占据着永恒的地位。当今世界，自然科学、社会科学和数学已发展成为三足鼎立之势，而数学更是各门科学发展的基础；科学和技术的迅猛、巨大的进步，主要就是得益于数学的现代发展，特别是数学在物理学、生物学以及社会科学中的纵深渗透。因此，华校在以数学为带头学科的施教前提下，同时又鼓励学生们在自己感兴趣的其他课程，如物理、化学、生物、外语、计算机等学科中开拓进取，施展才华。这样，近而言之，希望他们在运用中体验数学的思维模式和神奇魔力；远而图之，则是为他们日后发展的多价值取向打下全面的科学文化素质的坚实基础。

华校采取科学的教学方法，进行开放式教学，努力开发学生的潜在能力，对学生实行超前教育。除由人大附中选派经验丰富的优秀教师任教外，还聘请中国科学院、中国科技

大学、北京大学、清华大学、中国人民大学以及北京师范大学等高校专家、教授来校办讲座。用最新的科技知识丰富学生的头脑，开阔他们的视野。

华校小学部属校外培训性质，从小学二年级选拔招生。入学后每周学习一次，寒暑假进行集中培训。招生时间定于每年10月份，招生范围以北京市为主，面向全国。届时小学各年级同时进行考试。录取时每个年级的前50名编为A班。几年来，华校小学部六年级A班的学生几乎百分之百被保送进入人大附中学习。初、高中部每个年级一个华校班，又称实验班。每年暑期，华校高中部聘请高等学校中的学科奥林匹克的高级教练来校讲授奥林匹克数学、物理、化学等知识，进行较强的针对性学习与训练，培养学生的独立思考、观察、分析和解决问题的能力，为他们参加区、市、全国乃至世界级的学科竞赛准备条件。

实践证明，华罗庚学校对超常儿童的培养方略是可取的。近十年来，华校为高一级学校输送了大量的学业优异的人才。以第一、二、三届试验班为例，三届毕业生总数为136人。其中，直接保送到国家第一流重点大学35人，占25.7%。参加高考的101人中，考入清华大学42人，占30.8%；北京大学41人，占30.1%；中国科技大学10人，占7%。总计考入上述三校为93人，加保送35人，总计为128人。第四届实验班又进一步：全班44人，保送9人，参加高考35人，高考平均分数为610.83分，数学平均分数为137分；总分数超过600分的有25人。不仅如此，还有数以千计的学生在区、市、国家乃至世界级的数理学科的竞赛中获奖夺魁，位居北京市重点中学之首。上述大量事实证明，一种新的教育理论和实

践，使得一批又一批英才脱颖而出，足以显示华罗庚学校的办学方向是正确的，教学是成功的。

更可喜的是：在探索办学的过程中，以华校为核心，造就并团结了校内外一大批具有新思想、新观念、肯吃苦、敢拼搏的优秀教师和教育专家。在这个来自平凡的教学科研岗位的不平凡的群体中，有多年工作在教学第一线的中小学高级教师，有近年来执着于数学、物理、化学、生物、计算机等学科奥林匹克活动的高级教练员，有中国科学院和各高等学校中教学科研上成绩卓著的专家教授。他们就像当年的华罗庚那样，做为人师，做为长者，着眼于祖国的未来，甘愿给下一代当人梯。狭义地说，他们是华校藉以成长、引以自豪的中流砥柱；广而言之，他们是推动中小学教育事业改革的一支特别劲旅；他们的教学经验和长期积累起来的教学资料更是我国中小学生在国内外学科奥林匹克赛场上争雄夺魁的无价“法宝”。

今天，在对华校创办十余年的经验进行总结时，我们可以说，在朝着自己的办学目标的不懈奋斗中，华校具有四大办学特色：

第一，从娃娃抓起的早期智力开发；

第二，必名师启蒙的成功教育传统；

第三，在全面发展时力求业有专精；

第四，处强手如林中敢于应接挑战。

教材是教学质量的基本保证，也是教学的基础建设。高质量的教材，是建立在高水平的学术研究成果和丰富的教学经验的基础上的。因此，华罗庚学校开创了荟萃专家编书的格局，愿将《华罗庚学校奥林匹克系列丛书》奉献给广大教

师、中小学生及学生家长同享。目前已出版和即将出版的有《华罗庚学校数学试题解析》（小学部一册、中学部六册）、《华罗庚学校数学课本》（小学部六册、中学部六册）《奥林匹克中学数学讲座》、《奥林匹克小学数学讲座》、《华罗庚学校计算机教材》、《华罗庚学校图解英语》、《华罗庚学校模范作文》、《华罗庚学校物理试题》、《华罗庚学校物理教材》、《华罗庚学校化学教材》、《华罗庚学校化学试题》。这套丛书的编选者都是华校的骨干教师，他们为了共同的目标献出了自己多年的教学经验和最新的教学科研成果，因而使得这套丛书具有实用、新颖、通俗、严谨的特点。这些特点使全书别具一格，面目一新。我相信，它必将博得广大师生与家长的喜爱。

俗云："一花怒放诚可爱，万紫千红才是春。"华校在努力办学、完善自身的同时，诚望对国内中小学教学水平的提高微尽绵薄，诚望与其他兄弟学校取长补短，携手共进。"合抱之木，生于毫末，九层之台，起于垒土。"遥望未来，我们同呼志士之言：为中国在21世纪成为科技强国而献身。

作为本教材的主编，我谨以一个超常教育的积极参与者与组织者的名义，向各位辛勤的编著者致以衷心的谢意；恳请教育战线的前辈和同仁给予指导和推荐，也恳请广大师生在使用过程中提出宝贵的意见。

刘彭芝

目　录

第一讲　实数(一)——有理数和无理数

初中阶段进行了两次数集的扩展，即：

算术数集(非负有理数集)$\xrightarrow[\text{扩展为}]{\text{引进负分数、负整数}}$有理数集$\xrightarrow[\text{扩展为}]{\text{引进无理数}}$实数集.

数集的每一次扩展都是由于旧的数集与解决具体问题的矛盾而引起的. 在有理数集中，无限多个正有理数不能进行开偶次方运算，这个矛盾在引进无理数后得到了解决. 在实数集中，对于任意非负数都可以施加开方运算，但负数的开偶次方运算尚未解决，因此实数集还需扩展….

一、有理数与无理数的判定方法

有理数与无理数总称为实数，因此我们必须掌握组成实数集的这两类数的判定方法.

有理数是由整数(正整数、0、负整数)和分数(正分数、负分数)组成的，我们把整数都看作分母是1的分数，那么任意有理数均可表示成$\frac{q}{p}$(p、q为整数，$p\neq0$)形式，反之，能表示成$\frac{q}{p}$(p、q为整数，$p\neq0$)形式的数，不是整数就是分数，所以，它一定是有理数，由此得出有理数的一个判定方法如下：

能表示成$\frac{q}{p}$(p、q为整数，$p\neq0$)形式的数是有理数.

在判定一个实数是有理数时，我们常常用到上述方法.

二、有理数与无理数的性质

1. 有理数集对四则运算是封闭的(零不能作除数)，而两个无理数的和、差、积、商却不一定是无理数.

有理数与无理数之间的运算有以下的规律：

有理数±无理数=无理数；

非零有理数×无理数=无理数；

$$\frac{\text{非零有理数}}{\text{无理数}}=\text{无理数}；$$

$$\frac{\text{无理数}}{\text{非零有理数}}=\text{无理数}.$$

2. 有理数集与无理数集无公共元素，即有理数≠无理数.

3. 有理数集与无理数集都具有稠密性和有序性.

由有理数与无理数组成的实数集对四则运算是封闭的，具有稠密性、连续性(即实数集和数轴上的所有点组成的集合是一一对应的)和有序性(即可以比大小).

在实数集中，互为相反数的两数和为零，反之，两数和为零，则这两数必互为相反数.

三、例题选讲

例1 求证 $1.21\dot{3}0\dot{6}$是有理数.

证明：设 $x=1.21\dot{3}0\dot{6}$　　(1)

两边同乘以 1000，得

$1000x=1213.06\dot{3}0\dot{6}$.　　(2)

(2)−(1)，得

$999x=1211.85$，

$\therefore x=\dfrac{121185}{99900}=\dfrac{2693}{2220}$.

$\because$ x 是可以表示成$\dfrac{q}{p}$（p、q 为整数，$p\neq 0$）形式的数，

$\therefore x$ 是有理数.

补充说明：有理数是由整数、有限小数和无限循环小数所组成的，其中整数和有限小数显然可以表达成分数形式，应用例 1 所介绍的方法也可以将任意一个无限循环小数化为分数形式.

要证明一个数是有限小数或是无限循环小数，不是一件容易办到的事. 但是要证明一个数可以表达成$\dfrac{q}{p}$(p、q 是整数，$p\neq 0$)形式，相对来说就容易多了. 所以，当我们要判定一个数是有理数时，经常采取的方法就是证明该数可以表达成$\dfrac{q}{p}$(p、q 是整数，$p\neq 0$)形式.

例 2 求证 $\sqrt{\dfrac{1}{\underbrace{11\cdots\cdots1}_{(n-1)个}\ \underbrace{22\cdots\cdots2}_{n个}\ 5}}$是有理数.

分析 要证明所给数能表达成$\dfrac{q}{p}$(p、q 为整数，$p\neq 0$)形式的关键是证明形如$\underbrace{11\cdots\cdots1}_{(n-1)个}\ \underbrace{22\cdots\cdots2}_{n个}\ 5$的数是完全平方数.

证明：$\underbrace{11\cdots\cdots1}_{(n-1)个}\ \underbrace{22\cdots\cdots2}_{n个}\ 5$

$=\underbrace{11\cdots\cdots1}_{(n-1)个}\times 10^{n+1}+\underbrace{22\cdots\cdots2}_{n个}\times 10+5$

$=\dfrac{10^{n-1}-1}{9}\times 10^{n+1}+2\times\dfrac{10^{n}-1}{9}\times 10+5$

$$=\frac{1}{9}(10^{2n}-10^{n+1}+2\times10^{n+1}-20+45)$$

$$=\frac{1}{9}(10^{2n}+10\times10^{n}+25)$$

$$=\frac{1}{9}(10^{n}+5)^{2}$$

$$=\left(\frac{10^{n}+5}{3}\right)^{2}$$

$$\therefore\quad\sqrt{\frac{1}{\underbrace{11\cdots\cdots1}_{(n-1)\text{个}}\underbrace{22\cdots\cdots2}_{n\text{个}}5}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{3}{10^{n}+5}\right)^{2}}=\frac{3}{10^{n}+5}$$

$\because 10^{n}+5$ 和 3 均为整数，

$\therefore\sqrt{\dfrac{1}{\underbrace{11\cdots\cdots1}_{(n-1)\text{个}}\underbrace{22\cdots\cdots2}_{n\text{个}}5}}$ 可表示成 $\dfrac{q}{p}$（p、q 为整数，$p\neq0$）的形式，$\therefore$ 该数为有理数.

例 3　若 m 是整数，且 $m\neq0$，求证：

实数 $\dfrac{\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}}{m}$ 是有理数.

分析　因为分母 m 是整数且不为 0，所以要证题中所给数是有理数，只需证明 $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ 是有理数即可.

证明：设 $x=\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$，

两边同时立方，得

$$x^{3}=2-\sqrt{5}+2+\sqrt{5}+3\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right),$$

$\therefore x^3=4+3\sqrt[3]{4-5}\,x$,

即　$x^3=4-3x$,

$\therefore x^3+3x-4=0$,

因式分解,得

$$(x-1)(x^2+x+4)=0. \tag{1}$$

对于任意实数 y,有 $y^2+y+4=\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$ 成立,

$\therefore x^2+x+4\neq0$.

$x-1=0$, $\therefore x=1$.

$\because x=1$ 是方程(1)的唯一实根,又由方程(1)的构造过程可知:$x=\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ 是其实根,

$\therefore \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=1$.

$\therefore \dfrac{\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}}{m}=\dfrac{1}{m}$.

由于已知 m 是整数,且 $m\neq0$,

$\therefore \dfrac{\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}}{m}$ 是有理数.

补充说明:构造具有某种性质的数学模型,以达到解题和证明的目的,是一种经常运用的数学思想.

例 3　所应用的证明方法是同一法,要证 $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ 是有理数,我们构造出一个以它为唯一实根的方程,并通过解方程,求出这个方程的唯一实根,所得值恰为有理数,从而得出 $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ 为有理数的结论,同一法不仅是平面几何证明中常用的方法,也是某些具有唯一性的代数习题的常用证明方法之一.

无限不循环小数称为无理数，要证明一个实数是无限不循环小数是一件极难办到的事.我们知道有理数与无理数虽然共同组成了实数集，但它们却是矛盾的两个对立面.因此，要判定一个实数是无理数，我们常常采取反证法.

例 4　求证 $\sqrt{2}$ 是无理数.

证明：假设 $\sqrt{2}$ 不是无理数，因为 $\sqrt{2}$ 是实数，

$\therefore \sqrt{2}$ 必为有理数.

设 $\sqrt{2}=\frac{q}{p}$（p、q 是互质的自然数），

两边平方，得

$2=\frac{q^2}{p^2}$，所以

$q^2=2p^2$，　　(1)

$\therefore q$ 一定是偶数.

设 $q=2m$（m 是自然数），代入(1)得：$4m^2=2p^2$，

$\therefore p^2=2m^2$，$\therefore p$ 也是偶数.

p 与 q 均为偶数和 p 与 q 互质矛盾.

$\therefore \sqrt{2}$ 不是有理数，$\therefore \sqrt{2}$ 是无理数.

补充说明：只要 m 是质数，$\sqrt{m}$ 就一定是无理数，这个结论的证明并不困难，请读者自己写出它的证明.下面我们来证明更一般的结论.

例 5　若 m 是自然数，且 m 不是完全平方数，求证 $\sqrt{m}$ 是无理数.

证明：假设 $\sqrt{m}$ 是有理数，则有以下两种可能性：

① $\sqrt{m}$ 是整数，设 $\sqrt{m}=k$，k 为自然数，则 $m=k^2$，即 m 是完全平方数，这与已知 m 不是完全平方数矛盾，$\therefore \sqrt{m}$ 不是整数.