布利氏

新式算學教科書

第四編

余介石譯

商務印書館發行

布　利　氏

新式算學教科書

第四編

余介石譯

商務印書館發行

中華民國二十三年二月初版

（一〇二五九）

布利氏新式[illegible]第四編[illegible]一冊

Correlat[illegible]

每[illegible]

譯述者 [illegible]

發行人 [illegible]雲五 [illegible]南路

印刷所 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

（本書校對者胡達聰）

原序一

本編繼新式算學教科書前三編之後,採用數算科融合編制之法。布利士力君致力於斯,於茲五年,自始至終,各編所取材料,皆以教室中之實地試驗以及教員會議之評隲討論爲依據。

融合編制法較之前此所通用之分門別類法,時間之節省殊多。平面解析幾何及高等代數固美國之大學科目也,今亦得於四年之中學教育課程中習畢之矣。非特中學所固有之算科一無遺漏,卽加入之微分材料,亦復不少。學生之修畢是書者,其算學程度當遠在始業時之美國大學二年級生之上也。

本書之負責者以爲無論何種有計畫之科目,苟處理得宜,當使學生於修畢該科之時,深感學術之無窮而不以已習其書爲滿足。故教法之善否,可以學生之態度驗之。設學生習完一書,反覺惘然若失,以爲該科尙有要點當前,未之或見,雖無繼續修學之力,而亦甚願一窺全豹者,斯得之矣。若以某科目爲最後之課程或最後之必修科目而設教,則學生將以爲彼之所眞正需要者,盡在於是,決非眞美善之教學法也。講一科目而能使學者於造詣態度二者咸有選修之準備,始可以當至善之譽而無愧。斯在算學一科,尤爲重要。布利氏所著各書莫不依此義而編輯。凡各算科之材料,合於某時期之用者,罔不羅列,與以適當之編制。蓋惟能

使不論升學與否之學生,均有作更進一步研究之預備,而後可稱爲最完善之編制法。設預備之觀念不超乎一切,則決無孳生流弊之患也。

布利氏算學教科書實爲改良中學算學之適當途徑。何以言之?芝加哥大學附中採用布利氏之書籍,極有條理者也,而結果非常美滿,觀乎各項標準測驗及大學入學試驗之成績,畢業生升學後功課之優異與夫選修算學課程者之衆多,可以知之矣。自本書第一編出版後,中學及大學教科書之採用混合編制法者,漸次蠭起,而美國學界耆宿與夫優良之公私立中學贊成之者日夥,斯則又其一證也。以布利士力君之貢獻謂爲有功算學教育之人,其誰曰不宜。

校訂者邁爾士謹識

原 序 二

此書爲賡續著者所編新式算學教科書第三編而作。故其程度適合於具有初等代數,平面幾何,立體幾何及三角之必要知識之學生進修之用。高等代數及解析幾何,通常皆分門教授,現將其熔於一爐。以之作爲大學一年級或高中末年之教本,均無不可。

本書之編制,仍依前三編之例,將天然有關係之各算科,與以密切之聯絡。此種融合法使討論各主題之動機,易於觸發。學生藉幾何之圖線公式,對於數理,更能一目了然,而各種函數乃相對應者之重要觀念亦可有天然之啓發。向之分科設教,學者每有不能觸類旁通之弊。惟有此種會通之法,始可一以貫之。既有引起學生興味之益,又可收事半功倍之效。

導微函數之概念,在討論曲線之切線斜率時即有論列。於函數極大極小值之闡明,亦引用之。

本編仍依前編體例,於書中各處,插入關於算學之史料。

爲便於學生温習起見,每章均有提要,已展開之公式亦必列入。書末並附有數學之重要參考表數種及幾何代數三角之公式。

書中一切材料,乃著者在教室中實地試教,幾經竄易而定者。

書中各數學家畫像,皆採自伍本殼(Open Court)書社所出之名人像片集。

芝加哥大學教育學院院長朱特(Charles H. Judd)教授與著者以不少之鼓勵。今付梓在即,附誌於此,以表謝忱。

布利士力序。

目　次

名人像傳

布利氏

新式算學教科書

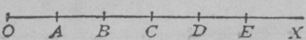
第四編

第一章

點之位置,數系

實數　點在直線上之位置

1. 整數之圖表法. 選一適當線段定爲單位,然後在 OX 線上取 OA, AB, BC 諸線段,使其長均等於 l,如第一圖。如是,則 $OA=l, OB=l+l=2l, OC=l+l+l=3l$,



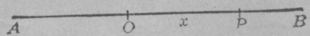
第一圖

餘可類推。

整數 1,2,3 等爲 OA, OB, OC 等線段之度,而 OA, OB, OC 等線段,則稱爲表 1,2,3 諸整數之圖。

反之,對於每一整數,在 OX 上皆有一定點與之相當。

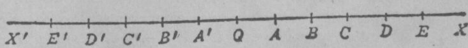
2. 原點, 橫標. 在 AB 直線上可如次法定一點 P:即在 AB 上取一定點 O 爲標準,而使 P 點距 O 之距離爲 x,如第二圖。



第二圖

O點稱為原點，OP線段之長等於x，稱為P點之橫標。

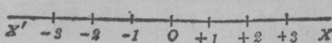
3. 正負數. 圖3中在O點左諸線節OA', OB', OC'等，與右端者之方向不同，欲區別此二相反之向，可命



第三圖

依OX為方向之線段為正。故OA, OB等所表之數稱為正數，而以正號$(+)$冠之。如OA表$+1$, OB表$+2$。如是類推，OA', OB', OC'諸線段依OX'之方向，故皆為負，而表負數-1, -2, -3等。

如是得一正負數記



第四圖

如第四圖。

4. 零. 第四圖中0點可視為表一無長度之線段，或表零值。*

---

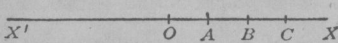
* 吾人記數之號碼，稱亞拉伯碼，係創於印度，經亞人以傳入西土，此法記數係依據位置原則，故增一符號以表零。亞拉伯數碼中需一符號，以示某位置之數，無所增益於總值，必有0之一符號始可。

習　題

1. 在一直線上,定表 $-5, +6, -3, 0, +8$ 諸數之線段。

2. 述下列寒暑計度數之意義: $-2, 0, +8, -7, -4$。

5. 分數之圖表法. 有分數 $\frac{m}{n}$ 式內 m, n 皆整數,可如下法表之。



第　五　圖

分 OA 爲 n 等分,如圖5,而以 $\frac{1}{n}$ 表每分在 OA 間可定諸量,使其橫標爲 $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots\cdots\cdots \frac{m}{n}, \cdots\cdots\cdots$

故分數 $\frac{m}{n}$,皆可在 $X'X$ 線上定其相當點,使此點距 O 之距離表此分數。

6. 有理數. §§1–5中述整數分數之圖表法。整數及分數,合其正負值,共組成有理數類。

7. 無理數. 吾人易知在 OX 上之線段有不表有理數者。例如每邊爲1之平方形,其對角線之值易求得爲 $\sqrt{2}$. 此數既非整數及分數,亦不能藉分數整數表其確值。然可以圖表之,只須在 OX 線上取一線段,其長等於以1爲邊正方形之對角線即可。

OX 線段所表之數若不能藉有理數示其確值者,則爲無理數。依此規定,則在 OX 上之任一線段皆有一相當數

値,而每一有理數或無理數皆可於OX上作一線段表之。*

如是稱數與OX上之線互爲一一對應。

8. 實數. 古時人僅有整數及分數之觀念,希臘人發現無理數之存在。彼等曾示明有種線段對於一定長線段之比不能以分數表其確値,而稱之爲不可度。*

合整數,分數,無理數之全部而組成實數類。

此有理無理諸詞之選定,讀者或覺爲可以任意爲之;然其所蘊觀念實皆應算學上之必要而生。例如無正負數則不能解,形如$x+a=b$之方程。故$x+5=0$不能在正數之範圍內求解。

更進,則解形爲$x^2+a=b$之二次方程時,必有待於無理數,如$x^2+1=4$之解爲$+\sqrt{3}$及$-\sqrt{3}$是。

而解此二次式$x^2+a=b$尙有一困難存焉,卽當b小於a時$\pm\sqrt{b-a}$一式之意義應若何解釋,蓋當此時$b-a$爲負故也。無論$-\sqrt{-n}$之意義若何規定,必昔所定之代數諸律藉以運算者亦能馭,此新數方可,$\sqrt{-a^2}$一符號稱爲虛數式內a爲正負整數,分數或無理數均可,此種數將於§§12—13中討論之。

---

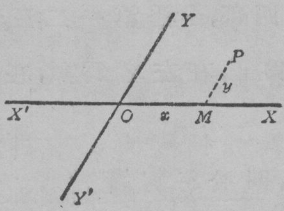
*不可度之比,例如平方形對角線與其邊之比,羣信爲畢達哥拉斯 (Pythagoras) 所發現, 氏及其門人始區分有理數與無理數爲二類。至於無理數之定義,則直至近代方確立,立之者爲第得琴德 Tedekind (1831–1916) 及坎托耳 (Contor) (生於 1845) 二氏、[坎托耳氏於 1918 逝世——譯者註]

習　題

以圖表下數：$-5, \sqrt{3}, \pi, \frac{2}{3}, 2\sqrt{2}, 0$。

點在平面內之位置

9. 笛氏坐標系. 取二相交直線$X'X$及$Y'Y$為標準,如第六圖,而在平面內一點P之位置,可定之如次:



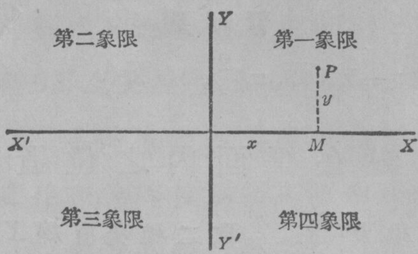
第　六　圖

作PM平行於$Y'Y$,設y表MP之長,x表OM之長,則(x,y)一對數值確定P點位置,二標準直線稱為坐標軸或簡稱軸,而其交點為原點OX為x軸,OY為y軸。

$OM=x$為P之橫標,$MP=y$為P之縱標,x,y二數稱為P點之坐標以x,y為坐標量之點,吾人記之為「點(x,y)」。

此種坐標系為哲學家笛卡兒(Rine Descrates) (1637) 所創,故名。又稱直線坐標系。

二軸普通常為正交,如第七圖,在此x,y表P點距二軸之垂直距離,是為直角坐標系。一詞本於服爾夫(Wolff)氏(1710), ordinate, coördinates 二詞本於來布尼茲 Leibnitz 氏 (1694, 1692)。諸詞自是始成科學專名用者漸歸統一。



第　七　圖

二軸更分平面為四部,各稱第一,二,三,四象限。

在y軸右之線段為正,在左者為負,在x軸上者為正,而在下者為負。

據上述之坐標系,則於每對實數x,y恆可在平面中定一點,而僅有此點與之相當,而平面中每一點恆表一對確定之實數。

讀者須知上述之定點法,本為習見之法,吾人常言城中某屋在北往第幾街,西往第幾街,或藉經緯度以定一地之位置,於航海時求舟之所在地皆係用此法。

習　題

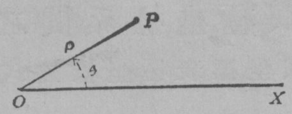
1. 求定四點之坐標如下者:

$(-3,1)$; $(4,-2)$; $(0,2)$; $(-6,0)$

2. 求作二三角形,其頂點之坐標如下:

$(1,-4)$, $(3,2)$, $(-5,-6)$; $(-2,-3)$, $(1,3)$, $(0,0)$。

10. 極坐標系.　在平面中之一點又可據其對於他一定點O之方向及距離定之,如第八圖,O點為極,OP與

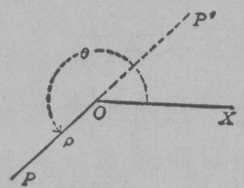


第八圖

其首線OX所成角$X\hat{O}P$稱爲P之幅角。OP名幅距,首線OX日極軸,極經緯之創始者爲長柏努利氏(James Bernoulli)時1691年。

P之極坐標,卽其幅距ρ*及其輻角θ*。

使ρ及θ有一定之正負值,卽可定P在平面中之位置。幅之正負,視幅距旋轉之方向與時計者異或同而定,第九圖中之極徑爲正,苟反向量之得OP'則爲負。



第九圖

習題

定下點之位置:

1.　$(\rho, \theta)=(2-\frac{\pi}{3}), (-4, 60^\circ), (-2, -45)$

2.　$(3, \text{arc} \tan 1)$; $(-5 \text{ arc } \cos\frac{1}{2})$; $(4, \text{arc } \sin\frac{\sqrt{3}}{2})$

* 希臘字母,讀如 Rho.

* 希臘字母,讀如 Theta.