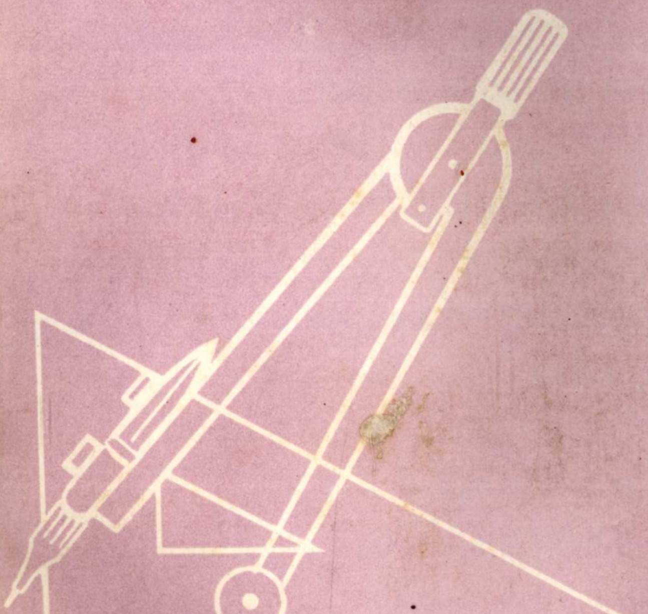
全国数学竞赛试题

解答汇编



目　　次

1978 全国8省市中学数学竞赛题解答

第 一 试

1. $y=\lg_{2^{-\frac{1}{2}}}\frac{1}{x+3}$，解（1）$y>0$，（2）$y<0$。

解：$y=\dfrac{-\lg(x+3)}{-\lg\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\lg 2}\lg(x+3)$.

$y>0\ (<0)\Longleftrightarrow \lg(x+3)>0\ (<0)\Longleftrightarrow x+3>1$

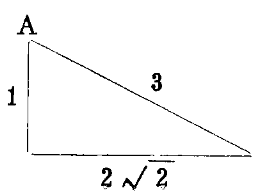
$(0<x+3<1)\Longleftrightarrow x>-2\ (-3<x<-2)$.

2. $\operatorname{tg}x=2\sqrt{2}\ (\pi<x<\frac{3}{2}\pi)$，求 $\cos 2x$，$\cos\frac{1}{2}x$.

解：如图　$\cos A=\dfrac{1}{3}$，　$\therefore \cos x=-\dfrac{1}{3}$，

$\cos 2x=2\cos^2x-1=\dfrac{2}{9}-1=-\dfrac{7}{9}$，

$\cos\dfrac{x}{2}=-\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



3. 设椭圆中心在原点，它在X轴上的一个焦点与短轴两端连线互相垂直，且此焦点与长轴上较近端点的距离是$\sqrt{10}-\sqrt{5}$，求其方程。

解：可令方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。

$a^2=b^2+c^2\cdots$①，$a=\sqrt{2}\,b\cdots$②，$a-c=\sqrt{10}-\sqrt{5}\cdots$③

解之得 $a=\sqrt{10}$，$b=c=\sqrt{5}$.

$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$ 是所求。

4. 已知方程 $2x^2-9x+8=0$，求作一个二次方程，使它的一个根为原方程两根和的倒数，另一个根为原方程两根差的平方。

解：可设所求方程 $(x-x_1)(x-x_2)=0$，

已知方程 $(x-\alpha)(x-\beta)=0$，

即 $x^2-\frac{9}{2}x+4=0$， $x_1=\frac{1}{\alpha+\beta}=\frac{2}{9}$，

$x_2=(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\frac{81}{4}-16=\frac{17}{4}$.

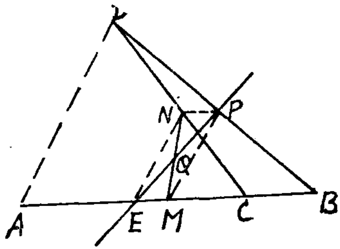
$\therefore$ $(x-\frac{2}{9})(x-\frac{17}{4})=0$，

即 $36x^2-161x+34=0$ 是所求。

5. 把半径为1的小球四个叠成二层，放在桌面上，下层三个，上层一个，两两相切，求上层小球最高点与桌面之距离。

解：所求距，即棱长2的正四面体的高$\frac{2}{3}\sqrt{6}$加小球直径2，即$2+\frac{2}{3}\sqrt{6}$。

6. D在AB外，C在AB上，M、N、P、Q各是AB、DC、DB、MN中点，PQ交AB于E，求证E平分AC。



证1：NP$\mathrel{/\!\!/}$EM，△PQN与△EQM有三对角，一对边对应相等，∴PQ＝EQ，

∴PNEM对角线互相平分，∴NE$\mathrel{/\!\!/}$PM$\mathrel{/\!\!/}$AD，

∴AE：EC＝DN：NC＝1，∴AE＝EC。

证2：可令$A(0,0)$，$M(m,0)$，$C(c,0)$，$B(2m,0)$，$D(l,k)$，$E(x,0)$。

则 $N(\frac{l+c}{2},\ \frac{k}{2})$，$P(\frac{2m+l}{2},\ \frac{k}{2})$，

$Q(\frac{2m+l+c}{4},\ \frac{k}{4})$，

PQ：$\dfrac{y-\frac{1}{2}k}{x-\frac{1}{2}(2m+l)}=\dfrac{\frac{1}{4}k}{\frac{1}{4}(2m+l-c)}$，

令$y=0$，解得$AE=\frac{1}{2}c$。

7. 证明：当n、k都是给定的正整数，且$n>1$，$k>2$时，$n(n-1)^{k-1}$可表成n个连续偶数之和。

证：这是一个已知项数n，公差2，和$n(n-1)^{k-1}$的等差数列问题，只要指出首项x_1是偶数即可。

事实上，$n(n-1)^{k-1}=\frac{1}{2}n(x_1+x_n)$

$$=\frac{1}{2}n[x_1+x_1+(n-1)\times 2]$$

$$=n(x_1+n-1)。$$

$\therefore\quad x_1=(n-1)[(n-1)^{k-2}-1]$.

当n奇，$n-1$偶，$\therefore x_1$偶；

当n偶，$n-1$奇，$(n-1)^{k-2}$奇，$(n-1)^{k-2}-1$偶，$\therefore x_1$偶。

8. 证明：顶点在单位元上的锐角△ABC的三角余弦和小于其半周长。

证1：可令$A\leqslant B\leqslant C<\frac{\pi}{2}$。

$\therefore\quad A+B>\frac{\pi}{2}$，$A>\frac{\pi}{2}-B$，$\therefore\quad \sin A>\cos B$，

同理，$\sin B>\cos C$，$\sin C>\cos A$。

三式相加并由正弦定理得

$$\cos A+\cos B+\cos C<\sin A+\sin B+\sin C=\frac{a+b+c}{2}。$$

证2：$\frac{1}{2}(a+b+c)-(\cos A+\cos B+\cos C)$

$=\sin A+\sin B+\sin C-\cos A-\cos B-\cos C$

$=\sin A-\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)+\sin B-\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)$

$\quad+\sin C-\sin\left(\frac{\pi}{2}-C\right)$

$=\sqrt{2}\left[\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(B-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(C-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

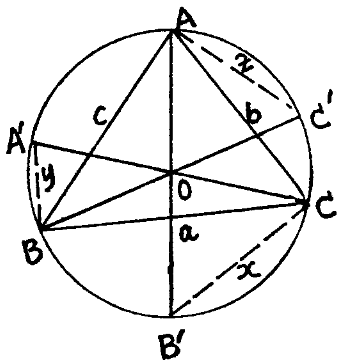
$=\sqrt{2}\left[2\sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{A-B}{2}+\sin\left(C-\frac{\pi}{4}\right)\right]>0.$

事实上，可令$A\leqslant B\leqslant C<\frac{\pi}{2}$，$A+B>\frac{\pi}{2}$，$C\geqslant\frac{\pi}{3}$。

证3：如图：$\sin A=\frac{1}{2}a$，　$\cos A=\frac{1}{2}y$，$\sin B=\frac{1}{2}b$，

$\cos B=\frac{1}{2}x$，$\sin C=\frac{1}{2}c$，

$\cos C=\frac{1}{2}z$。



$\because$　$\triangle ABC$为锐角△，

$\therefore$　外心O在△内。

$\therefore$　$x<a, y<c$，$z<b$。

$\therefore$　$\cos A+\cos B+\cos C$

$=\frac{1}{2}(x+y+z)$

$<\frac{1}{2}(a+b+c)$.

证4：$\because$　$\frac{\pi}{4}<\frac{1}{2}(A+B)<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore$　$\cos A+\cos B=2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$

$<2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)=\sin A+\sin B$.

同理，$\cos B+\cos C<\sin B+\sin C$，

$\cos C+\cos A<\sin C+\sin A$.

$\therefore$　$\cos A+\cos B+\cos C<\sin A+\sin B+\sin C$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

证5：$\frac{1}{2}(a+b+c)-(\cos A+\cos B+\cos C)$

$$=(\sin A+\sin B)+\sin C-(\cos A+\cos B)-\cos C$$

$$=2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$$

$$+2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A+B)$$

$$-2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)+1-2\sin^2\frac{1}{2}(A+B)$$

$$=2\left[\cos\frac{1}{2}(A-B)-\cos\frac{1}{2}C\right]\cdot\left[\sin\frac{1}{2}(A+B)\right.$$

$$\left.-\cos\frac{1}{2}(A+B)\right]+1>1>0$$

事实上，可令$A\leqslant B\leqslant C<\frac{\pi}{2}$,

$$0\leqslant\frac{1}{2}(B-A)<\frac{1}{2}C<\frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\pi}{4}<\frac{1}{2}(A+B)<\frac{\pi}{2},$$

$$\cos\frac{1}{2}(A-B)>\cos\frac{1}{2}C,$$

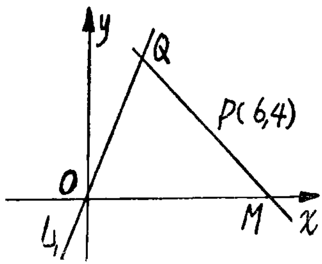
$$\sin\frac{1}{2}(A+B)>\cos\frac{1}{2}(A+B)。$$

注意：此处把原不等式加强了一个1。

9. 已知直线L：$y=4x$和点$P(6,4)$，在L上求一点Q，使PQ，L，x轴在第一象限所围△OMQ的面积S最小。

解：可令$Q(t,4t)$，PQ交OX于$M(x,0)$.

则 $\dfrac{x-t}{x-6}=\dfrac{4t}{4}$,



$x=\dfrac{5t}{t-1}$,

$S=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5t}{t-1}\cdot 4t=\dfrac{10t^2}{t-1}$.

$10t^2-St+S=0$,

有实根t,

判别式 $=S^2-40S=S(S-40)\geqslant 0$, $S\geqslant 40$。

当$t=6$, $Q(6,24)$, $M(6,0)$,

$S=\dfrac{1}{2}\times 6\times 24=72>40$。

∴ 最小$S=40$,

∴ $10t^2-40t+40=0$,

∴ $t=2$, $Q(2,8)$, $M(10,0)$。

10。求 $x+y+z=0$ …① 且$x^3+y^3+z^3=-18$…②

的整数解。

解：$x^3+y^3-(x+y)^3=-18$,

$-3xy(x+y)=-18$,

$xyz=-6=1\times 2\times(-3)$。

∴ $(x,y,z)=(1,2,-3),(2,1,-3),$

$(1,-3,2),(2,-3,1),$

$(-3,1,2),(-3,2,1)$。

第 二 试

1. 四边形ABCD中，AB与DC交于E，BC与AD交于F，EF∥BD，求证：AC平分EF。

证1：作EH∥BF，交AC于H，

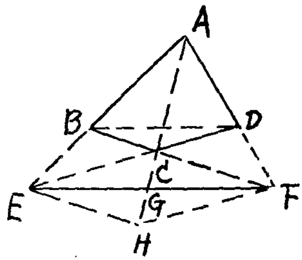
则由平行截刈定理，

$$\frac{AC}{CH}=\frac{AB}{BE}=\frac{AD}{DF},$$

DC∥HF，

∴ CEHF是平行四边形，

∴ AC平分EF。



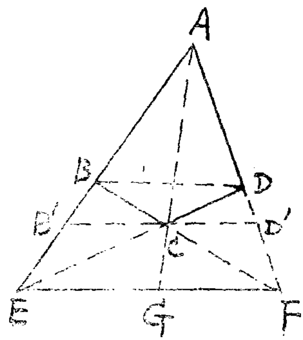
证2：过C作B′D′∥BD，交AB于B′，交AD于D′，令AC交EF于G，则由平行截刈定理，

$$\frac{B'C}{BD}=\frac{EB'}{EB}=\frac{FD'}{FD}=\frac{CD'}{BD}.$$

∴ $B'C=CD'$.

$$\frac{EG}{B'C}=\frac{AG}{AC}=\frac{GF}{CD'},$$

∴ $EG=GF$。



证3：各点坐标可如图标。

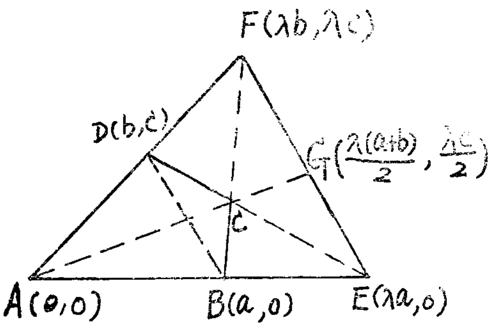
BF：$\frac{y}{x-a}=\frac{\lambda c}{\lambda b-a}$

DE：$\frac{y}{x-\lambda a}=\frac{c}{b-\lambda a}$

解得$C\left(\frac{\lambda(a+b)}{\lambda+1},\ \frac{\lambda c}{\lambda+1}\right)$，

显然A，C，G共线，G是EF中点，

∴ AC平分EF。



2．(1)分解因式 $x^{12}+x^9+x^6+x^3+1$。

解1：原式$=\frac{(x^3)^5-1}{x^3-1}=\frac{(x^5)^3-1}{x^3-1}$

$=\frac{x^5-1}{x-1}\cdot\frac{x^{10}+x^5+1}{x^2+x+1}$

$=(x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot$

$(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$.

解2：原式$=x^6(x^6+x^{-6}+x^3+x^{-3}+1)$

$=x^6[(x^3+x^{-3})^2+(x^3+x^{-3})-1]$

$=x^6\left(x^3+x^{-3}-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot$

$\cdot(x^3+x^{-3}-\frac{-1-\sqrt{5}}{2})$.

$=(x^6+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x^3+1)(x^6+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x^3+1)$.

(2)求证：$5+8\cos\theta+4\cos 2\theta+\cos 3\theta\geqslant 0$.

证1：用二倍角、三倍角公式变原式左边为 $\cos\theta$ 的多项式，再折项分群分解：

原式左$=5+8\cos\theta+4(2\cos^2\theta-1)+4\cos^3\theta-3\cos\theta$

$=1+5\cos\theta+8\cos^2\theta+4\cos^3\theta$

$=1+\cos\theta+4\cos\theta(1+\cos\theta)^2$

$=(1+\cos\theta)(1+2\cos\theta)^2\geqslant 0$.

证2：用二倍角公式，和化积变原式左边为 $\cos\theta$ 的多项式，再用多项式除法分解：

原式左$=5+7\cos\theta+4\cos 2\theta+2\cos\theta\cos 2\theta$

$=5+7\cos\theta+4(2\cos^2\theta-1)+2\cos\theta$

$(2\cos^2\theta-1)$

$=1+5\cos\theta+8\cos^2\theta+4\cos^3\theta$

$=P(\cos\theta)$。

$\because\ P(-1)=0$,

$\therefore\ P(\cos\theta)=(1+\cos\theta)(1+2\cos\theta)^2\geqslant 0$.

3. 已知A(4，1)，B(－1，－6)，C(－3，2)，当(x，y)在R(△ABC内点及边点的集合)上变动时，求$s=4x-3y$的极值。

解1：即求过R的直线：$y=\frac{4}{3}x-\frac{s}{3}$的截距的极值。

AB： $y=\frac{7}{5}x-\frac{23}{5}$.

BC： $y=-4x-10$.

$\because\quad -4<0<\frac{4}{3}<\frac{7}{5}$,

$\therefore$　A在这种直线中过B，C的两条：

$$y=\frac{4}{3}x-\frac{14}{3}\text{（过B），}$$

$$y=\frac{4}{3}x+6\text{（过C），}$$

之间，R全在其间，$\therefore\quad -\frac{14}{3}\leqslant-\frac{s}{3}\leqslant6$，

$\therefore\quad 14\geqslant s\geqslant-18$。