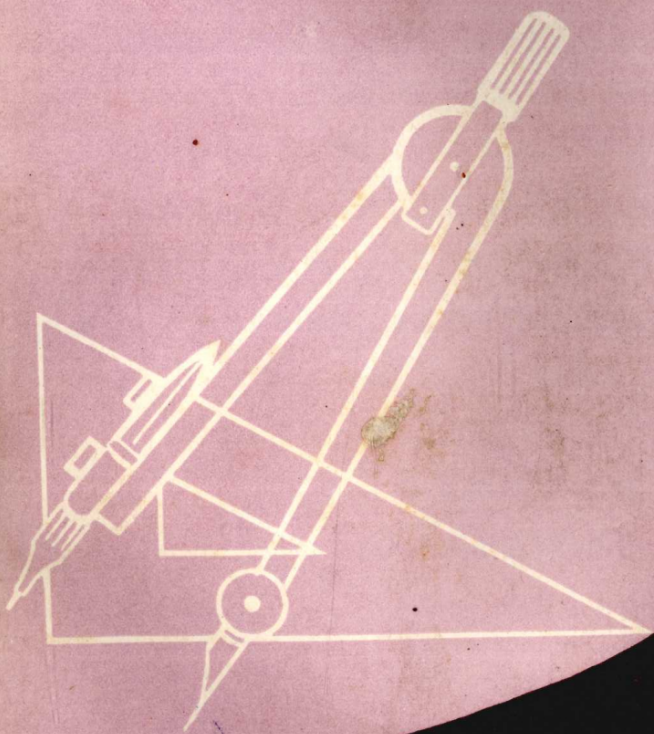


全国数学竞赛试题 解答汇编





数据加载失败，请稍后重试！



数据加载失败，请稍后重试！

目 次

1978	全国8省市中学数学竞赛题解答·····	(1)
1978	北京中学数学竞赛题解答·····	(18)
1978	上海中学数学竞赛题解答·····	(25)
1978	天津中学数学竞赛题解答·····	(33)
1978	安徽中学数学竞赛题解答·····	(33)
1978	成都中学数学竞赛题解答·····	(43)
1978	重庆中学数学竞赛题解答·····	(53)
1978	陕西中学数学竞赛题解答·····	(61)
1978	辽宁中学数学竞赛题解答·····	(71)
1978	广东中学数学竞赛题解答·····	(84)
1978	全国高考数学题解答·····	(99)
1978	全国高考数学付题解答·····	(104)
1977	全国各省市高考数学题选答·····	(109)
1949—1965	全国高考数学题选答·····	(119)
1978	中国科技大学来长沙招考少年班数学题解答···	(128)
1978	第20届国际中学生数学竞赛题解答·····	(131)

1959	第1届国际中学生数学竞赛题·····	(138)
1960	第2届国际中学生数学竞赛题·····	(139)
1961	第3届国际中学生数学竞赛题·····	(140)
1962	第4届国际中学生数学竞赛题·····	(142)
1963	第5届国际中学生数学竞赛题·····	(143)
1964	第6届国际中学生数学竞赛题·····	(144)
1976	第18届国际中学生数学竞赛题·····	(146)
1977	第19届国际中学生数学竞赛题·····	(147)
1972	美国第1届中学数学竞赛题·····	(149)
1973	美国第2届中学数学竞赛题·····	(150)
1974	美国第3届中学数学竞赛题·····	(150)
1975	美国第4届中学数学竞赛题·····	(152)
1976	美国第5届中学数学竞赛题·····	(153)
1977	美国第6届中学数学竞赛题·····	(154)
1961	苏联第1届中学数学竞赛题·····	(155)
1962	苏联第2届中学数学竞赛题·····	(158)
1963	苏联第3届中学数学竞赛题·····	(160)
1964	苏联第4届中学数学竞赛题·····	(164)

1978 全国8省市中学数学竞赛题解答

第一试

1. $y = \log_2 \frac{1}{x+3}$, 解 (1) $y > 0$, (2) $y < 0$.

解: $y = \frac{-\lg(x+3)}{-\lg \sqrt{2}} = \frac{2}{\lg 2} \lg(x+3)$.

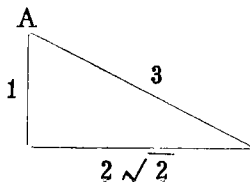
$y > 0 (< 0) \iff \lg(x+3) > 0 (< 0) \iff x+3 > 1$
 $(0 < x+3 < 1) \iff x > -2 (-3 < x < -2)$.

2. $\operatorname{tg} x = 2\sqrt{2}$ ($\pi < x < \frac{3}{2}\pi$), 求 $\cos 2x$, $\cos \frac{1}{2}x$.

解: 如图 $\cos A = \frac{1}{3}$, $\therefore \cos x = -\frac{1}{3}$,

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = \frac{2}{9} - 1 = -\frac{7}{9}$,

$\cos \frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.



3. 设椭圆中心在原点，它在 X 轴上的一个焦点与短轴两端连线互相垂直，且此焦点与长轴上较近端点的距离是 $\sqrt{10}-\sqrt{5}$ ，求其方程。

解：可令方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 。

$$a^2 = b^2 + c^2 \dots \textcircled{1}, \quad a = \sqrt{2} b \dots \textcircled{2}, \quad a - c = \sqrt{10} - \sqrt{5} \dots \textcircled{3}$$

解之得 $a = \sqrt{10}, b = c = \sqrt{5}$ 。

$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{5} = 1 \text{ 是所求。}$$

4. 已知方程 $2x^2 - 9x + 8 = 0$ ，求作一个二次方程，使它的一个根为原方程两根和的倒数，另一个根为原方程两根差的平方。

解：可设所求方程 $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ ，

已知方程 $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ ，

$$\text{即 } x^2 - \frac{9}{2}x + 4 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{\alpha + \beta} = \frac{2}{9},$$

$$x_2 = (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \frac{81}{4} - 16 = \frac{17}{4}.$$

$$\therefore (x - \frac{2}{9})(x - \frac{17}{4}) = 0,$$

即 $36x^2 - 161x + 34 = 0$ 是所求。

5. 把半径为 1 的小球四个叠成二层，放在桌面上，下层三个，上层一个，两两相切，求上层小球最高点与桌面之距离。

解：所求距，即棱长2的正四面体的高 $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ 加小球直径

2，即 $2 + \frac{2}{3}\sqrt{6}$ 。

6. D在AB外，C在AB上，M、N、P、Q各是AB、DC、DB、MN中点，PQ交AB于E，求证E平分AC。

证1：NP // EM， $\triangle PQN$ 与 $\triangle EQM$ 有三对角，一对边对应相等， $\therefore PQ = EQ$ ，

$\therefore PNEM$ 对角线互相平分， $\therefore NE // PM // AD$ ，

$\therefore AE : EC = DN : NC = 1$ ， $\therefore AE = EC$ 。

证2：可令 $A(0,0)$ ， $M(m,0)$ ， $C(c,0)$ ， $B(2m,0)$ ， $D(l,k)$ ， $E(x,0)$ 。

则 $N(\frac{l+c}{2}, \frac{k}{2})$ ， $P(\frac{2m+l}{2}, \frac{k}{2})$ ，

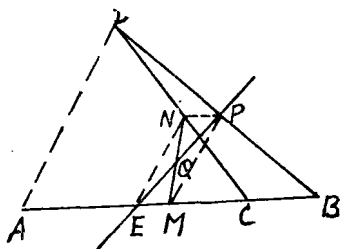
$Q(\frac{2m+l+c}{4}, \frac{k}{4})$ ，

$PQ: \frac{y - \frac{1}{2}k}{x - \frac{1}{2}(2m+l)} = \frac{\frac{1}{4}k}{\frac{1}{4}(2m+l-c)}$ ，

令 $y=0$ ，解得 $AE = \frac{1}{2}c$ 。

7. 证明：当 n 、 k 都是给定的正整数，且 $n > 1$ ， $k > 2$ 时， $n(n-1)^{k-1}$ 可表成 n 个连续偶数之和。

证：这是一个已知项数 n ，公差2，和 $n(n-1)^{k-1}$ 的等差数列问题，只要指出首项 x_1 是偶数即可。



$$\begin{aligned}
 \text{事实上, } n(n-1)^{k-1} &= \frac{1}{2}n(x_1 + x_n) \\
 &= \frac{1}{2}n(x_1 + x_1 + (n-1) \times 2) \\
 &= n(x_1 + n - 1).
 \end{aligned}$$

$$\therefore x_1 = (n-1) \{ (n-1)^{k-2} - 1 \}.$$

当 n 奇, $n-1$ 偶, $\therefore x_1$ 偶;

当 n 偶, $n-1$ 奇, $(n-1)^{k-2}$ 奇, $(n-1)^{k-2} - 1$ 偶, $\therefore x_1$ 偶。

8. 证明: 顶点在单位元上的锐角 $\triangle ABC$ 的三角余弦和小于其半周长。

证1: 可令 $A \leq B \leq C < \frac{\pi}{2}$ 。

$$\therefore A + B > \frac{\pi}{2}, A > \frac{\pi}{2} - B, \therefore \sin A > \cos B,$$

同理, $\sin B > \cos C, \sin C > \cos A$ 。

三式相加并由正弦定理得

$$\cos A + \cos B + \cos C < \sin A + \sin B + \sin C = \frac{a+b+c}{2}.$$

$$\text{证2: } \frac{1}{2}(a+b+c) - (\cos A + \cos B + \cos C)$$

$$= \sin A + \sin B + \sin C - \cos A - \cos B - \cos C$$

$$= \sin A - \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) + \sin B - \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$$

$$+ \sin C - \sin\left(\frac{\pi}{2} - C\right)$$

$$= \sqrt{2} \left\{ \sin\left(A - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(B - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(C - \frac{\pi}{4}\right) \right\}$$

$$= \sqrt{2} \left\{ 2 \sin\left(\frac{A+B}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{A-B}{2} + \sin\left(C - \frac{\pi}{4}\right) \right\} > 0.$$

事实上, 可令 $A \leq B \leq C < \frac{\pi}{2}$, $A + B > \frac{\pi}{2}$, $C \geq \frac{\pi}{3}$ 。

证 3: 如图: $\sin A = \frac{1}{2}a$, $\cos A = \frac{1}{2}y$, $\sin B = \frac{1}{2}b$,

$$\cos B = \frac{1}{2}x, \sin C = \frac{1}{2}c,$$

$$\cos C = \frac{1}{2}z.$$

$\therefore \triangle ABC$ 为锐角 $\triangle$,

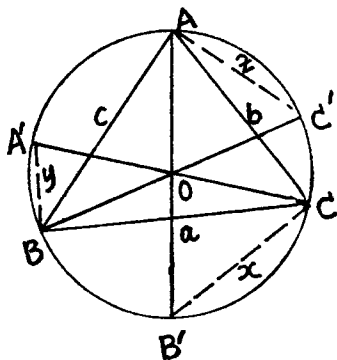
$\therefore$ 外心 O 在 $\triangle$ 内。

$\therefore x < a, y < c, z < b$ 。

$\therefore \cos A + \cos B + \cos C$

$$= \frac{1}{2}(x + y + z)$$

$$< \frac{1}{2}(a + b + c).$$



证 4: $\because \frac{\pi}{4} < \frac{1}{2}(A + B) < \frac{\pi}{2}$,

$$\therefore \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$$

$$< 2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B) = \sin A + \sin B.$$

同理, $\cos B + \cos C < \sin B + \sin C$,

$$\cos C + \cos A < \sin C + \sin A.$$

$\therefore \cos A + \cos B + \cos C < \sin A + \sin B + \sin C$

$$= \frac{1}{2}(a + b + c).$$

证 5: $\frac{1}{2}(a + b + c) - (\cos A + \cos B + \cos C)$

$$\begin{aligned}
&= (\sin A + \sin B) + \sin C - (\cos A + \cos B) - \cos C \\
&= 2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B) \\
&\quad + 2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A+B) \\
&\quad - 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B) + 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2}(A+B) \\
&= 2 \left[\cos \frac{1}{2}(A-B) - \cos \frac{1}{2}C \right] \cdot \left[\sin \frac{1}{2}(A+B) \right. \\
&\quad \left. - \cos \frac{1}{2}(A+B) \right] + 1 > 1 > 0
\end{aligned}$$

事实上，可令 $A \leq B \leq C < \frac{\pi}{2}$ ，

$$0 \leq \frac{1}{2}(B-A) < \frac{1}{2}C < \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\pi}{4} < \frac{1}{2}(A+B) < \frac{\pi}{2},$$

$$\cos \frac{1}{2}(A-B) > \cos \frac{1}{2}C,$$

$$\sin \frac{1}{2}(A+B) > \cos \frac{1}{2}(A+B).$$

注意：此处把原不等式加强了一个1。

9. 已知直线 $L: y = 4x$ 和点 $P(6, 4)$ ，在 L 上求一点 Q ，使 PQ ， L ， x 轴在第一象限所围 $\triangle OMQ$ 的面积 S 最小。

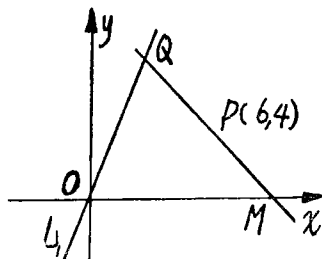
解：可令 $Q(t, 4t)$ ， PQ 交 OX 于 $M(x, 0)$ 。

$$\text{则 } \frac{x-t}{x-6} = \frac{4t}{4},$$

$$x = \frac{5t}{t-1},$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{5t}{t-1} \cdot 4t = \frac{10t^2}{t-1}.$$

$$10t^2 - St + S = 0,$$



有实根 t ,

$$\text{判别式 } \Delta = S^2 - 40S = S(S - 40) \geq 0, S \geq 40.$$

$$\text{当 } t = 6, Q(6, 24), M(6, 0),$$

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 24 = 72 > 40.$$

$$\therefore \text{最小 } S = 40,$$

$$\therefore 10t^2 - 40t + 40 = 0,$$

$$\therefore t = 2, Q(2, 8), M(10, 0).$$

10. 求 $x + y + z = 0 \cdots \textcircled{1}$ 且 $x^3 + y^3 + z^3 = -18 \cdots \textcircled{2}$

的整数解。

$$\text{解: } x^3 + y^3 - (x + y)^3 = -18,$$

$$-3xy(x + y) = -18,$$

$$xyz = -6 = 1 \times 2 \times (-3).$$

$$\therefore (x, y, z) = (1, 2, -3), (2, 1, -3),$$

$$(1, -3, 2), (2, -3, 1),$$

$$(-3, 1, 2), (-3, 2, 1).$$

第二试

1. 四边形ABCD中, AB与DC交于E, BC与AD交于F, $EF \parallel BD$, 求证: AC平分EF。

证1: 作 $EH \parallel BF$, 交AC于H,

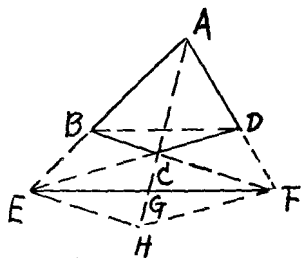
则由平行截割定理,

$$\frac{AC}{CH} = \frac{AB}{BE} = \frac{AD}{DF},$$

$DC \parallel HF$,

$\therefore$ CEHF是平行四边形,

$\therefore$ AC平分EF。



证2: 过C作 $B'D' \parallel BD$, 交AB于B', 交AD于D',

令AC交EF于G, 则由平行

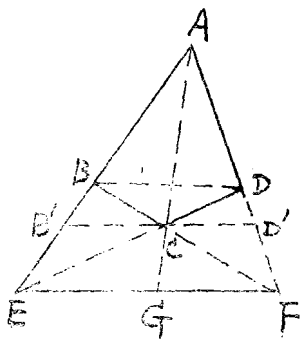
截割定理,

$$\frac{B'C}{BD} = \frac{EB'}{EB} = \frac{FD'}{FD} = \frac{CD'}{BD}.$$

$\therefore B'C = CD'.$

$$\frac{EG}{B'C} = \frac{AG}{AC} = \frac{GF}{CD'},$$

$\therefore EG = GF.$



证 3：各点座标可如图标。

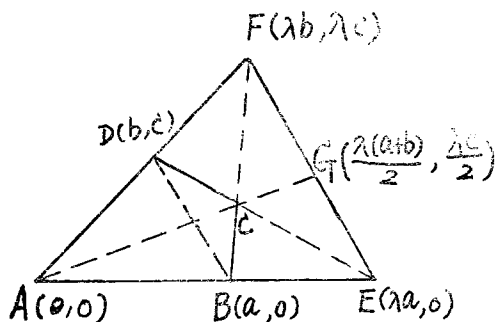
$$BF: \frac{y}{x-a} = \frac{\lambda c}{\lambda b-a}$$

$$\text{解得 } C \left(\frac{\lambda(a+b)}{\lambda+1}, \frac{\lambda c}{\lambda+1} \right),$$

$$DE: \frac{y}{x-\lambda a} = \frac{c}{b-\lambda a}$$

显然 A, C, G 共线, G 是 EF 中点,

$\therefore$ AC 平分 EF。



2. (1) 分解因式 $x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1$ 。

$$\text{解 1: 原式} = \frac{(x^3)^5 - 1}{x^3 - 1} = \frac{(x^5)^3 - 1}{x^3 - 1}$$

$$= \frac{x^5 - 1}{x - 1} \cdot \frac{x^{10} + x^5 + 1}{x^2 + x + 1}$$

$$= (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \cdot$$

$$(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1).$$

$$\text{解 2: 原式} = x^6 (x^6 + x^{-6} + x^3 + x^{-3} + 1)$$

$$= x^6 [(x^3 + x^{-3})^2 + (x^3 + x^{-3}) - 1]$$

$$= x^6 (x^3 + x^{-3} - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}).$$

$$\cdot (x^3 + x^{-3} - \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}).$$

$$= (x^6 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}x^3 + 1)(x^6 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x^3 + 1).$$

(2) 求证: $5 + 8 \cos \theta + 4 \cos 2 \theta + \cos 3 \theta \geq 0$.

证 1: 用二倍角、三倍角公式变原式左边为 $\cos \theta$ 的多项式, 再折项分群分解:

$$\begin{aligned} \text{原式左} &= 5 + 8 \cos \theta + 4(2 \cos^2 \theta - 1) + 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \\ &= 1 + 5 \cos \theta + 8 \cos^2 \theta + 4 \cos^3 \theta \\ &= 1 + \cos \theta + 4 \cos \theta (1 + \cos \theta)^2 \\ &= (1 + \cos \theta)(1 + 2 \cos \theta)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

证 2: 用二倍角公式, 和化积变原式左边为 $\cos \theta$ 的多项式, 再用多项式除法分解:

$$\begin{aligned} \text{原式左} &= 5 + 7 \cos \theta + 4 \cos 2 \theta + 2 \cos \theta \cos 2 \theta \\ &= 5 + 7 \cos \theta + 4(2 \cos^2 \theta - 1) + 2 \cos \theta \\ &\quad (2 \cos^2 \theta - 1) \\ &= 1 + 5 \cos \theta + 8 \cos^2 \theta + 4 \cos^3 \theta \\ &= P(\cos \theta). \end{aligned}$$

$$\therefore P(-1) = 0,$$

$$\therefore P(\cos \theta) = (1 + \cos \theta)(1 + 2 \cos \theta)^2 \geq 0.$$

3. 已知 $A(4, 1)$, $B(-1, -6)$, $C(-3, 2)$, 当 (x, y) 在 R ($\triangle ABC$ 内点及边点的集合) 上变动时, 求 $s = 4x - 3y$ 的极值.

解 1: 即求过 R 的直线: $y = \frac{4}{3}x - \frac{s}{3}$ 的截距的极值.

$$AB: y = \frac{7}{5}x - \frac{23}{5}.$$

$$BC: y = -4x - 10.$$

$$\therefore -4 < 0 < \frac{4}{3} < \frac{7}{5},$$

$\therefore$ A 在这种直线中过 B, C 的两条:

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{14}{3} \text{ (过 B)},$$

$$y = \frac{4}{3}x + 6 \text{ (过 C)},$$

之间, R 全在其间, $\therefore -\frac{14}{3} \leq -\frac{s}{3} \leq 6$,

$$\therefore 14 \geq s \geq -18.$$

