

数学模型及其在飞机 设计与制造中的应用译文集

(四)



国外航空编辑部

1976.12.

数学模型及其在飞机
设计与制造中的应用译文集

(四) 续

目 录

样条曲线	(1)
康斯曲面	(5)
自由型曲线和曲面的计算机辅助设计用的 B-Bezier 方法	(11)
光顺自由型曲线的一个数值试验	(28)
采用测量点描述曲面	(33)
作为工程工具的样条函数逼近	(43)
计算机辅助设计空间形状时用的曲面	(52)
一种拟合曲线和曲面参数方程的方法	(107)
具有限定末端条件的三次样条曲线的拟合	(113)
采用曲面样条函数插值	(126)
双圆弧曲线	(130)
自动设计法	(136)
自由曲面理论与设计	(200)
CONSURF (二次曲面程序) 算法说明	(206)
曲面模型——工程师的新工具	(215)
用图象仪进行曲面设计	(221)
现代飞机的几何学	(231)
计算机辅助飞机设计用的曲面	(244)
计算机辅助设计在飞机工业中的应用	(255)
波音飞机公司供制造用的计算机软件	(267)

样 条 曲 线

物 理 样 条

多年来,船舶、汽车和飞机的凸曲线,都是借助于样条用手工绘制模线。样条,即薄金属条或木条,它围绕着按选定位置放置的重物或压铁作弹性弯曲,以获得所需要的曲线,(图 1)。

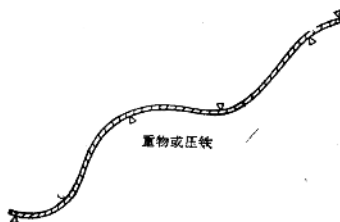


图 1

数 学 样 条

由于物理样条得到了适当的利用,且所形成的是较满意的曲线,所以有充分的理由使用数学上的模拟曲线描述数控加工的外形。物理样条建立的形状处于内应变能最小的状态。这在数学上,表示为积分

$$B \int K^2 ds \quad (1)$$

在整个样条长度范围内取最小值。式中, B 是样条刚度常数; K 是样条曲率; S 是弧长 ($0 \leq S \leq L$ L 为样条总长度)。

在笛卡尔坐标系中,该积分可以写成:

$$\int \frac{y''^2 dx}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2)$$

由于该积分难以运算,所以通常假定样条曲线在各处的斜率 ($Y' = dy/dx$) 足够小,以致忽略不计 (即 $Y' \ll 1$)。这样就简化成使积分式

$$\int y''^2 dx \quad (3)$$

为最小。

这种近似处理的一个值得注意的例外，是梅鲁姆 (Mehlum) 为 AUTOKON 船舶设计系统所研制的 KURGLA 曲线光滑算法。梅鲁姆在此算法的末尾做了这种近似运算，这样就不发生避免大斜率曲线的问题。在对过若干指定点或节点的样条，解算 (3) 式的极小变分问题中，可以看出，得到的合成曲线——数学样条——是一组在节点上分段相连的三次曲线。这些曲线本身以及在节点处的斜率、曲率都是连续的。实际上，只要曲线的斜率不太大，则数学样条对物理样条是一个很好的近似。如果曲线的斜率很大，就像实用中常出现的那样，则有两种方法可借选用，一种是对应每一段 Spline 弧选用局部座标；通常座标轴取在沿弧的弦线和与其垂直的方向；另一种方法可以利用参数法（即向量法）计算样条。该样条对向量 $p(t)$ 的各个分量来说，是 t 的函数。这种方法的优点是与座标轴无关，并可用来计算三维的或扭转的曲线。但是，严格说来，这些曲线并不是按三次弹性曲线来处理，因为，在变形能最小的情形下，扭转项已忽略不计。

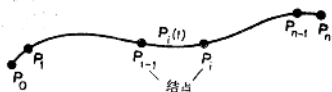


图 2

样 条 计 算

众所周知，过一组给定点，能够建立对图形、斜率和曲率都连续的一组三次曲线弧。但是，实际上，在数值上有不稳定趋向，且误差随着计算进程而积累。在曲线中，此误差表现为不合要求的波动。而表达这些样条的不同形式能使计算以更稳定的方式进行。

假定参数样条的第 i 段 $P_i(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) 是从 $P_i(0) = P_{i-1}$ 到 $P_i(1) = P_i$ (图 2)，则

$$P_i(1) = P_{i+1}(0) = P_i \quad \text{等} \quad (4)$$

可以按下式写出分段方程式：

$$P_i(t) = P_{i-1}(1 - 3t^2 + 2t^3) + P_i(3t^2 - 2t^3) + P'_{i-1}(t - 2t^2 + t^3) + P'_i(-t^2 + t^3) \quad (5)$$

切矢量 P'_i 的值是未知量，可以用连续条件将这些值计算出来。

对方程 (5) 微分，得：

$$P'_i(t) = P_{i-1}(-6t + 6t^2) + P_i(6t - 6t^2) + P'_{i-1}(1 - 4t + 3t^2) + P'_i(-2t + 3t^2) \quad (6)$$

再微分：

$$P''_i(t) = P_{i-1}(-6 + 12t) + P_i(6 - 12t) + P'_{i-1}(-4 + 6t) + P'_i(-2 + 6t) \quad (7)$$

所以，

$$P'_i(0) = -6P_{i-1} + 6P_i - 4P'_{i-1} - 2P'_i \quad (8)$$

和

$$P''_i(1) = 6P_{i-1} - 6P_i + 2P'_{i-1} + 4P'_i \quad (9)$$

假如 $P_{i+1}(t)$ 段与 $P_i(t)$ 段在 P_i 点的二阶导数是连续的，则由方程 (8) 和 (9)，得：

$$6P_{i-1} - 6P_i + 2P'_{i-1} + 4P'_i = -6P_i + 6P_{i+1} - 4P'_{i-1} - 2P'_{i+1}$$

用 2 除方程两边，并加以整理，得：

$$P'_{i-1} + 4P'_i + P'_{i+1} = -3P_{i-1} + 3P_{i+1} \quad (10)$$

如果每段的参变量用 $i-1$ 到 i 来代替 0 到 1 , 则可得到同样的递归关系式。当参变量区间从一段变到另一段, 比如说, 第 i 段 $L_{i-1} \leq t \leq L_i$, 其中 L_i 为连接样条节点的折线的累积弦长, 而 $L_i = L_i - L_{i-1}$ 是第 i 段的弦长, 其递归关系为:

$$\frac{1}{t_i} P'_{i-1} + \left(-\frac{2}{t_i} + \frac{2}{t_{i+1}} \right) P'_i + \frac{1}{t_{i+1}} P'_{i+1} = \frac{-3}{t_i^2} P_{i-1} + \left(\frac{3}{t_i^2} - \frac{3}{t_{i+1}^2} \right) P_i + \frac{3}{t_{i+1}^2} P_{i+1} \quad (11)$$

关系式(10)和(11)只适用于 $n-1$ 内的样条的点 P_i 到 P_{n-1} , 于是, 要完成方程的解, 还需要两个辅助条件。

最常用的辅助条件是, (图3):

(a) 自由端。样条端点无弯曲力矩, 即端点曲率为零。

$$P''_0 = 0 \quad P''_n = 0$$

设 $i=1$, 由方程(8)得:

$$P'_1(0) = P'_0 = 0 = -6P_0 + 6P_1 - 4P'_0 - 2P'_1$$

重新整理

$$2P'_0 + P'_1 = -3P_0 + 3P_1 \quad (12)$$

同样, 对于样条的另一端, 为:

$$P'_{n-1} + 2P'_n = -3P_{n-1} + 3P_n \quad (13)$$

(b) 给定端点的一阶导数。(即样条是固支或悬臂的)。为了简便起见, 可写成:

$$P'_0 = T_0 \quad (14)$$

$$P'_n = T_n \quad (15)$$

(c) 端段为抛物线。在 $i=1$ 时, 如果 $P_1(t)$ 是抛物线, 根据方程(5)判断, 三次项不存在, 因此,

$$P'_0 + P'_1 = -2P_0 + 2P_1 \quad (16)$$

同样, 对 Spline 的另一端, 有:

$$P'_{n-1} + P'_n = -2P_{n-1} + 2P_n \quad (17)$$

用 $n-1$ 个方程(10)和两个辅助方程可建立矩阵方程:

$$AP'_i = BP_i \quad (18)$$

这里, A 是一个 $(n+1) \times (n+1)$ 的矩阵, B 是一个 $(n+1)$ 行的矩阵。在节点切矢给定的情形下, 列向量 P_i (严格说是向量的向量) 也具有给定的切矢分量。例如, 一端固支, 另一端自由的四段样条, 矩阵方程为:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P'_0 \\ P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \\ P'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} \quad (19)$$

一端自由, 另一端以抛物线约束的类似的样条, 矩阵方程为:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P'_0 \\ P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \\ P'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} \quad (20)$$

我们用矩阵A的逆矩阵自左乘B来求切矢量 P'_1 :

$$P'_1 = A^{-1}BP_1 \quad (21)$$

这样, 用方程(5)确定了样条的各个段。矩阵A为三对角线矩阵, 从而, 可以迅速准确地求出逆矩阵。

对于按弦长参数化的样条, 则能够得到与(12)和(13)相同的式子

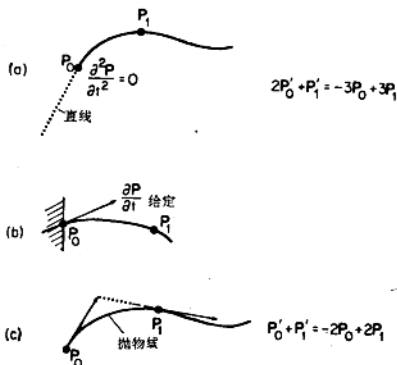


图3 端点条件

样条的应用

样条的数学理论由阿尔伯格 (Ahlberg), 尼尔森 (Nilson)、沃尔什 (Walsh) 等人详细阐述了。样条曲线常用来描述船体和车身一类的曲线, 这些样条可提供光滑而柔韧的曲线, 对于那些所谓“雕刻”形状 (弗格森利用样条方法, 得到了这种曲线和曲面的切矢量) 尤其如此。样条曲线具有这样的性质, 即如果移动一个节点, 则整个曲线就改变。因此, 在样条中, 就不能把变化的影响限制在局部范围内。

康 斯 曲 面

由边界曲线界定的曲面块

康斯曲面基本上是用它的边界条件确定的。曲面块具有四条边（虽然这些边可能退化如 UNISURF 曲面）。用 $P(u, v)$ ($0 \leq u, v \leq 1$) 表示曲面块上一点，其边界曲线为 $Q(0, v)$, $Q(1, v)$, $Q(u, 0)$ 和 $Q(u, 1)$ (参见图 1)，这四条曲线相交于四个角点 $Q(0, 0)$, $Q(0, 1)$, $Q(1, 0)$, $Q(1, 1)$ ，用 Q 表示所界定的曲面的向量，而向量 P 表示用向量 Q 所定义的曲面特性。

假定 $i = 0$ 或 1 ，及 $j = 0$ 或 1 ，则四条边界曲线和四个角点可写成： $Q(i, v)$, $Q(u, j)$ 和 $Q(i, j)$ 。

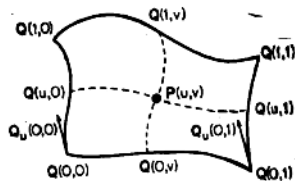


图 1 用边界曲线定义的 Coons 曲面

最简单的康斯曲面块是由边界曲线定义的：

$$\begin{aligned} P(u, v) = & Q(0, v) \cdot F_0(u) + Q(1, v) \cdot F_1(u) + Q(u, 0) \cdot F_0(v) + Q(u, 1) \cdot F_1(v) \\ & - Q(0, 0) \cdot F_0(u) \cdot F_0(v) - Q(0, 1) \cdot F_0(u) \cdot F_1(v) \\ & - Q(1, 0) \cdot F_1(u) \cdot F_0(v) - Q(1, 1) \cdot F_1(u) \cdot F_1(v) \end{aligned} \quad (1)$$

用记号 i, j 表示，简化为

$$P(u, v) = Q(i, v) \cdot F_1(u) + Q(u, j) \cdot F_1(v) - Q(i, j) \cdot F_1(u) \cdot F_1(v)$$

因为这些角点在方程中出现两次，故从曲面方程中各减去一个角点。每个角点位于两条边界曲线上。

函数 $F_1(u)$ 和 $F_1(v)$ 叫做“混合函数”，用以使曲面块满足于所要求的边界条件（即 $P(i, v) \equiv Q(i, v)$ ，等等），和控制与相连接的曲面块的连续性。如果只要求与另一曲面块有图形位置的连续性，亦即，此曲面块应以 $Q(i, v)$ 和 $Q(u, j)$ 为边界，那么，下列条件适用于混合函数：

$$F_1(k) = \delta_{1k}, \quad F_j(k) = \delta_{jk} \quad (2)$$

其中， δ_{ik} 和 δ_{jk} 是克隆内克尔符号； $i, j, k = 0$ 或 1 ，即：

$$\begin{aligned} \text{若 } i = k \text{ 时} & \quad F_1(k) = 1 \\ j \neq k \text{ 时} & \quad F_1(k) = 0 \end{aligned}$$

混合函数在形式上没有什么限制：当 $0 \leq u, v \leq 1$ 时，这些函数应该是连续的，最好是单调的。最简单的表达式是，

$$F_0(t) = 1 - t, \quad F_1(t) = t \quad (3)$$

可以证明，在方程 (1) 中，令 $u, v = 0, 1$ 时，曲面块通过边界曲线。如果相连曲面块共用公共的边界曲线，则它们在空间位置上是连续的。

同样, 若边界曲线约束少, 则边界曲线在曲面块角点处相交, 且在多数情况下是连续的。若采用更复杂的混合函数:

$$\begin{aligned} F_0(t) &= 1 - 3t^2 + 2t^3 \\ F_1(t) &= 3t^3 - 2t^2 \end{aligned} \quad (4)$$

注意:

$$F_0(0) = 1, \quad F_0(1) = 0$$

及

$$F'_0(0) = F'_0(1) = F'_1(0) = F'_1(1) = 0$$

且

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(u, v)}{\partial u} &= P_u(u, v) \\ &= Q(i, v)F'_1(u) + Q_u(u, j)F_1(v) \\ &\quad - Q(i, j)F'_1(u)F_j(v) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} P_u(0, v) &= Q(i, v)F'_1(0) + Q_u(0, j)F_1(v) \\ &\quad - Q(i, j)F'_1(0)F_j(v) \\ &= Q_u(0, j)F_j(v) \\ &= Q_u(0, 0)F_0(v) + Q_u(0, 1)F_1(v) \end{aligned} \quad (5)$$

同样,

即,

$$\begin{aligned} P_u(1, v) &= Q_u(1, j)F_j(v) \\ P_u(i, v) &= Q_u(i, j)F_j(v) \end{aligned} \quad (6)$$

因此, 过边界曲线的端点所作曲线的切线确定了过边界曲线的正切向量 (见图 1)。

在 Chapter 5 中, 叙述了在这种情况下, 同其它曲面块的连续性, 且用更强的混合函数 (对多项式用高次的) 可以得到更高阶的连续性。然而, 我们仅要求用边界曲线和混合函数来确定曲面块间的斜率和高阶连续性。经验证明, 这将使曲面块上出现不希望有的平面区域。我们所能做的工作, 是利用比较弯曲的康斯曲面, 正如本文开头提到的, 曲面块可由它的边界条件确定。

边界曲线和斜率定义的曲面块

假若我们不仅希望确定边界曲线 $Q(i, v)$ 和 $Q(u, j)$, 而且还要确定交叉边界斜率 $Q_u(i, v)$ 和 $Q_v(u, j)$, 这些交叉边界斜率定有如下性质:

$$\left. \frac{dQ_u(i, v)}{dv} \right|_{v=j} = \left. \frac{dQ_v(u, j)}{du} \right|_{u=i} = \left. \frac{\partial^2 Q(u, v)}{\partial u \partial v} \right|_{\substack{u=i \\ v=j}} = Q_{uv}(i, j) = P_{uv}(i, j) \quad (7)$$

康斯将这些向量称为“扭转向量”。

现在, 我们来建立满足边界条件 $Q(i, v)$, $Q(u, j)$, $Q_u(i, v)$ 和 $Q_v(u, j)$ 的曲面方程, (图 2)。

考虑方程

$$P(u, v) = [F_1(u)G_1(u)] \begin{bmatrix} Q(i, v) \\ Q_u(i, v) \end{bmatrix} + [Q(u, j)Q_v(u, j)] \begin{bmatrix} F_1(v) \\ G_1(v) \end{bmatrix}$$

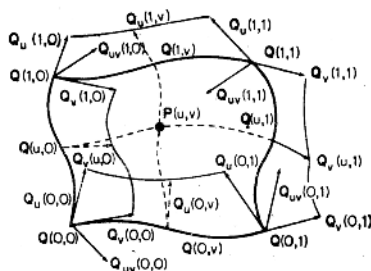


图2 由边界曲线和边界斜率定义的Coons曲面

$$\begin{aligned}
 & -[F_1(u)G_1(u)] \begin{bmatrix} Q(i,j)Q_v(i,j) \\ Q_u(i,j)Q_{uv}(i,j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_j(v) \\ G_j(v) \end{bmatrix} \\
 & = Q(i,v)F_1(u) + Q_u(i,v)G_1(u) \\
 & \quad + Q(u,j)F_j(v) + Q_v(u,j)G_j(v) - Q(i,j)F_1(u)F_j(v) \\
 & \quad - Q_u(i,j)G_1(u)F_j(v) - Q_v(i,j)F_1(u)G_j(v) \\
 & \quad - Q_{uv}(i,j)G_1(u)G_j(v) \quad (8)
 \end{aligned}$$

$F_1(u)$ 和 $F_j(v)$ 是(前面已经讲过的)混合函数。如 $F_1(k) = \delta_{1k}$, $F_j(k) = \delta_{jk}$ 一样, 必须 $F'_1(k) = 0$, $F'_j(k) = 0$ ($k=0$ 或 1), 以免边界曲线影响已确定的交叉边界斜率。

$G_1(u)$ 和 $G_j(v)$ 也是混合函数, 为使交叉边界斜率不影响边界曲线, 必须满足 $G_1(k) = G_j(k) = 0$ ($k=0, 1$); 为使曲面块具有给定的交叉边界斜率, 要求

$$G'_1(k) = \delta_{1k} \text{ 和 } G'_j(k) = \delta_{jk}$$

符合这些条件的最简单的混合函数是(如前述):

$$\begin{aligned}
 F_0(t) &= 1 - 3t^2 + 2t^3 \\
 F_1(t) &= 3t^2 - 2t^3 \\
 G_0(t) &= t - 2t^2 + t^3 \\
 G_1(t) &= -t^2 + t^3 \quad (9)
 \end{aligned}$$

为保证相邻曲面块间斜率的连续性, 最简单的方法是使两曲面块有共同的边界曲线和共同的交叉边界斜率。

同边界曲线一样, 由给定曲面块的交叉边界斜率, 可以更好地控制曲面形状。

高阶边界条件

同样, 我们可以用已给定的交叉边界二阶导数来确定曲面块:

$$P(u,v) = [F_1(u)G_1(u)H_1(u)] \begin{bmatrix} Q(i,v) \\ Q_u(i,v) \\ Q_{uu}(i,v) \end{bmatrix} + [Q(u,j)Q_v(u,j)Q_{vv}(u,j)] \begin{bmatrix} F_j(v) \\ G_j(v) \\ H_j(v) \end{bmatrix}$$

$$-(F_1(u)G_1(u)H_1(u)) \begin{bmatrix} Q(i,j) & Q_v(i,j) & Q_{vv}(i,j) \\ Q_u(i,j) & Q_{uv}(i,j) & Q_{uvv}(i,j) \\ Q_{uu}(i,j) & Q_{uuv}(i,j) & Q_{uuvv}(i,j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1(v) \\ G_1(v) \\ H_1(v) \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{式中:} \quad F_1(k) &= \delta_{1k} & F_1'(k) &= F_1''(k) = 0 \\ G_1'(k) &= \delta_{1k} & G_1(k) &= G_1''(k) = 0 \\ H_1''(k) &= \delta_{1k} & H_1(k) &= H_1'(k) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

对任何阶边界条件亦同。

双三次曲面块

当前广泛应用的康斯曲面的一个特殊形式是双三次曲面块。假设混合函数是前面已给出的三次多项式，而且，边界曲线和交叉边界斜率也是三次函数；此外，还假设边界曲线以下式确定：

$$\begin{aligned} Q(i,v) &= Q(i,j)F_j(v) + Q_v(i,j)G_j(v) \\ Q(u,j) &= Q(i,j)F_i(u) \\ &\quad + Q_u(i,j)G_i(u) \end{aligned} \quad (13)$$

现在，我们就可以把曲面块方程简化（图3）。

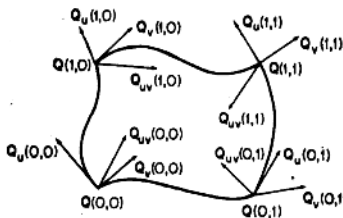


图3 双三次Coons曲面块

$$P(u,v) = [F_1(u)G_1(u)] \begin{bmatrix} Q(i,j) & Q_v(i,j) \\ Q_u(i,j) & Q_{uv}(i,j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1(v) \\ G_1(v) \end{bmatrix} \quad (14)$$

通常，以康斯形式写出：

$$P(u,v) = (u^3 u^2 u^1) \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} Q(0,0) & Q(0,1) & Q_v(0,0) & Q_v(0,1) \\ Q(1,0) & Q(1,1) & Q_v(1,0) & Q_v(1,1) \\ Q_u(0,0) & Q_u(0,1) & Q_{uv}(0,0) & Q_{uv}(0,1) \\ Q_u(1,0) & Q_u(1,1) & Q_{uv}(1,0) & Q_{uv}(1,1) \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

曲面块的其它等价定义



图 4 等价的 UNISURF 曲面块网

这个曲面块是由16个矢量确定的。我们将其与任何其它双三次曲面定义相比较。例如，对于双三次 UNISURF 曲面块 (图 4) 来说，可得方程：

$$P(u,v) = [u^3 u^2 u] \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 (a_1 - a_1) (a_3 - a_1) (a_4 - a_1) \\ a_2 (a_2 - a_1) (a_3 - a_2) (a_4 - a_2) \\ a_3 (a_3 - a_1) (a_3 - a_2) (a_3 - a_3) \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$= [u^3 u^2 u] \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 (a_1 - a_1) (a_2 - a_1) (a_3 - a_1) \\ a_2 (a_1 - a_1) (a_2 - a_2) (a_3 - a_2) \\ a_3 (a_1 - a_1) (a_2 - a_2) (a_3 - a_3) \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

只要我们使双三次展开式中相应系数相等，就可容易地将康斯形式变换成UNISURF形式。

扭 转 向 量

假如我们将所有扭转向量 $Q_{uv}(i,j)$ 强使为零,则双三次曲面块与 Ferguson 的双参数曲面一致。此外,如果 $u=x, v=y$,则 $P(u,v)$ 是向量 $(x,y,z(x,y))$,那么, $z(x,y)$ 是与Inaba曲面相同。

除非准备采用大量的曲面块,否则,置所有的扭转向量为零是危险的。因为,在曲面块角点会造成局部平坦区域。但是,直接确定扭转向量相当难,较好的方法是,将康斯曲面和 UNISURF 之类的曲面比较得出,当然,在这里定义曲面的向量对曲面形状是有影响的。不过,一般人都是容易识别的。

张同书 译自 Numerical Control Mathematics and
Applications 的附录 I 和 II.

北京大学数力系 校

自由型曲线和曲面的计算机辅助设计用的 Bernstein-Bézier 方法

提 要

定义于 $[0,1]$ 的函数 f 的 m 次 Bernstein 多项式逼近是 $\sum_{i=0}^m f(i/m) \phi_i(s)$, 其中权 $\phi_i(s)$ 是二项密度函数。Bernstein 逼近继承了 f 的许多整体特征, 如单调性与凸性, 而且它们至少与 f 一样“光滑”, 这里“光滑”指 f 的波动次数、全变差与可微性等级。从历史上看, 它们就 L_∞ 范数的相对慢的收敛往往使其不便于实际应用。然而, 在一大类问题中, 逼近函数的光滑性比拟合的接近性更为重要。对于曲线与曲面的计算机辅助设计的问题, 其中主要考虑的是设计上的要求和形状的内在性质。对于这后一类问题, Renault 的 P. Bézier 曾成功地利用了参数 Bernstein 多项式。本文的目的是分析 Bézier 技术, 并研究各种扩张与推广。在下一篇论文中, 作者们考虑将这里所包括的结果扩张于用多项式样条的自由型曲线与曲面设计。这些 B 样条方法比本文中所描述的技术有若干优越之处。

1. 引 论

连续函数的 Bernstein 多项式逼近特好地模拟函数的大体特征。当多项式的次数增大时, 逼近一致收敛于函数及其导数(如其存在的话)。进一步, 如 Schoenberg(16)所证明的, Bernstein 逼近恒至少与原来的函数 f 一样“光滑”, 此处“光滑”指 f 的波动次数、全变差与可微性等级。Bernstein 逼近的这些好的性质为其显著慢收敛所抵消, 因此, 在实践中没被广泛地应用。

Davis(5, 第116页)在好几年前就曾提出, Bernstein 多项式“当在大范围的逼近的性质比拟合的接近性更为重要时, 或许……会找到应用”。一个这样的应用就是光滑自由型曲线与曲面的设计。过去十年内, 汽车、飞机与造船工业, 对于任意几何形状的数学描写, 已经发展了各种实用方案, 大都以线性逼近理论为基础。Forrest(6—8)把应用数学的这个迅速发展的领域叫做计算几何学。现代计算几何学的方法在许多生产方面获得信任, 在这些生产方面, 传统的工程设计技术与其制图问题在新的生产发展中起着主要作用。

与常规的极小范数逼近, 例如最小二乘或极小极大的问题相反, 设计的问题自始就没有数量目标, 以最优。换句话说, 没有公认的范数, 如果它达到极小化, 就产生符合设计者的一切设计的与函数的要求。这些要求随着设计、工艺和传统习惯的改变而改变, 更不用说各个设计者之间的不同了。数学对这类问题所作的主要贡献是给设计者提供了一组计算工具, 它们是他的传统的曲线绘制仪的数学等价物(或更好的东西)。这些数学工具应当与他的经验及直观很好地相关联。进而, 因为满意的最后结果的完成是个试验与误差的过程, 故实际上本质的是这些技术要在计算机与制图互相作用的环境中加以执行。一般地, 在任何一类

不能完全以定量的最优化准则加以表述,但能用计算方法与直接推断法的适当的结合加以解决的问题中,起中间作用的制图法却是具有很大价值的。

Régie Renault 的 P. Bézier 发展了设计自由型曲线与曲面的一个成功的系统。这个系统的数学基础曾被 Bézier 描述了(1—3)。最近, Forrest(6) 分析了 Bézier 技术及其一些扩张。本文的目的是提供另一种发展,其中, Bézier 方法作为 Bernstein 多项式逼近算子应用于矢值函数而出现。在这方面,我们进行研究更高阶的 Bézier 型方法,这种方法能够给设计者在控制曲线形状时提供更高度的灵活性,但保有原来 Bézier 技术的基本简单性。在以后的一篇文章里,我们将探究 Bézier 技术向样条的扩张。在该文中,多项式的次数保持固定,而引入样条结点得以提高曲线形状的灵活性。

2. Bernstein 多项式

首先回忆任意函数 $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ 的 m 次 Bernstein 多项式逼近的定义 $B_m(f(s)) = \sum_{\mu=0}^m f(\mu/m) \varphi_\mu(s)$, 其中权函数 φ_μ , 对于固定的 S , 是固定概率的离散二项概率密度函数

$$\varphi_\mu(s) = \binom{m}{\mu} S^\mu (1-S)^{m-\mu}, \quad \mu = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (1)$$

看作变元为 f 的算子, B_m 是线性的: $B_m(\alpha f + \beta g) = \alpha B_m(f) + \beta B_m(g)$, 对于任何实数 α 与 β 。然而, 不同于大多数线性逼近算子, Bernstein 算子并不是幂等的, 即 $B_m(B_m(f)) \neq B_m(f)$ 。换句话说, 已知 m 次多项式 P_m 的 m 次 Bernstein 逼近是某另一个 m 次多项式 $B_m(P_m) \neq P_m$ 。例如, 函数 $f(s) = S^2$ 的二次 Bernstein 逼近是 $B_2(S^2) = S^2 + S(1-S)/2$ 。显然, 对于所有的 $S \in (0, 1)$, $S^2 < B_2(S^2) < S$ 。更一般地, $f(S) = S^2$ 的 m 次 Bernstein 逼近是 $B_m(S^2) = S^2 + S(1-S)/m$ (见脚注 2), 这说明原有函数 f 的 Bernstein 逼近 $B_m(f)$ 的显著慢的收敛(与 $1/m$ 一样)。正因为它们的贫乏的收敛性质, Bernstein 多项式末在应用中广泛地被采用。

Bernstein 逼近有下面的概率解释: 命 S 是一个实验的 $m+1$ 次 Bernoulli 试验里每次已知事件出现的概率。那末出现 $0, 1, \dots, m$ 次的概率分别为 $\varphi_0(s), \varphi_1(s), \dots, \varphi_m(s)$ 。进而, 如 $f(\mu/m)$ 表示恰好得到 μ 次出现的“值”, 则 $B_m(f(s)) = \sum_{\mu=0}^m f(\mu/m) \varphi_\mu(s)$ 是 $m+1$ 次试验的期望“值”, 显然, 对于 $S=0$, 期望只不过是 $f(0)$, 而对于 $S=1$, 它是 $f(1)$ 。一般, 对于任何 $S \in (0, 1)$, $B_m(f(s))$ 是 f 在 $m+1$ 个结点上的值 $f(0), f(1/m), \dots, f(1)$ 的凸线性结合。

大数定律的一个形式能够释义如下: 在包括 m 次 Bernoulli 试验的一实验中, 事件出现的次数对试验总次数的比, 当 $m \rightarrow \infty$ 时, 趋近于概率。更严密地说, 命 S 是事件出现的真正概率。那末, 对于已知的 $\epsilon, \delta > 0$, 就存在充分大的 m , 使 μ/m 与 S 的差小于 δ 的概率大于 $1-\epsilon$, 即

$$\text{Prob. } \{ |\mu/m - S| < \delta \} = \sum_{\mu \in |\mu/m - S| < \delta} \varphi_\mu(s) > 1 - \epsilon.$$

注 1 在这方面谈收敛时, 显然是指的 L_p 范数, 或更为特殊地指上确界范数 $\|f\| = \sup_{0 \leq s \leq 1} |f(s)|$, 这并不忽视存在某种 Sobolev 范数, 使 Bernstein 逼近事实上是极小范数逼近的可能性。根据 Bernstein 多项式提供函数及其导数的同时逼近这一事实, (参见定理 2.1), 这种 Sobolev 范数显然必须涉及 f 的导数。

对于 $S \in (0, 1)$ 的固定值, 这蕴涵着: 对于大的 m , Bernstein 多项式 $B_m(f)$ 在 S 上的值实质上由 f 在点 S 的紧邻中的值所决定, 而且对于所有的 $S \in (0, 1)$, $\lim_{m \rightarrow \infty} B_m(f(s)) = f(s)$ 一致成立, 只须 f 是连续的。最后这一陈述就是熟知的 Weierstrass 定理, 这就是遇有 Bernstein 多项式的平常的讲法。

现在回忆二项概率密度的一些初等性质, 括号中的上标表示微分的阶:

$$\varphi_\mu(S) \geq 0 (\mu = 0, 1, \dots, m), \quad \sum_{\mu=0}^m \varphi_\mu(S) = 1 \quad \text{对于 } S \in (0, 1).$$

$$\varphi_0(0) = 1; \quad \varphi_0^{(P)}(1) = 0 (P = 0, 1, \dots, m-1);$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_\mu^{(P)}(0) &= 0 (P = 0, 1, \dots, \mu-1); \\ \varphi_\mu^{(\mu)}(0) &= m! / (m-\mu)!; \\ \varphi_\mu^{(q)}(1) &= 0 (q = 0, 1, \dots, m-\mu-1); \\ \varphi_\mu^{(m-\mu)}(1) &= (-1)^{m-\mu} m! / \mu!; \end{aligned} \right\} \mu = 1, 2, \dots, m-1;$$

$$\varphi_m^{(P)}(0) = 0 (P = 0, 1, \dots, m-1); \quad \varphi_m(1) = 1$$

这些关系用以完全表征 m 次多项式的线性空间 P_m 的 Bernstein 基底 $\{\varphi_\mu(S)\}_{\mu=0}^m$ 。

函数 $\varphi_\mu(S)$ 的极大出现于值 $S = \mu/m$, 而且是 $\varphi_\mu(\mu/m) = \binom{m}{\mu} \mu^\mu (m-\mu)^{m-\mu} / m^m$ 。特别注意: 当 $\mu \neq 0, m$ 时, 对于所有的 $S \in (0, 1)$ 均有 $\varphi_\mu(S) < 1$, 而且有 $\varphi_0(0) = 1$, $\varphi_0(1) = 0$, 以及 $\varphi_m(0) = 0$, $\varphi_m(1) = 1$, 这蕴涵着: 每个端点值 $f(0)$ 与 $f(1)$ 一般是被 Bernstein 多项式内插的仅有的值, 图 1 示出 $m = 5$ 时 Bernstein 基底函数的图象。

$N = 5$ 时的二项分布

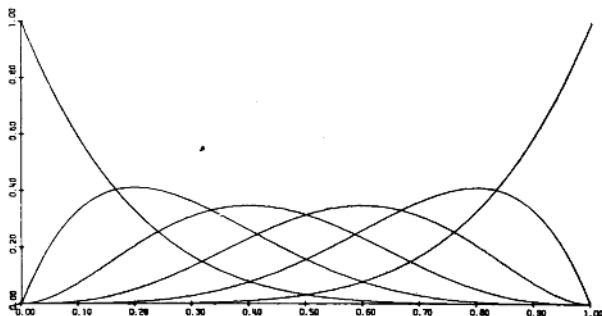


图 1 线性空间 P_5 的 Bernstein 基底函数, 即次数小于或等于 5 的多项式

由以上关于 $\varphi_\mu(S)$ 及其导数在单位区间端点上的值的关系, 容易看出: Bernstein 多项式本身的端点导数由

$$\left. \left(\frac{d^P}{ds^P} B_m(f(s)) \right) \right|_{s=0} = \frac{m!}{(m-P)!} \sum_{\mu=0}^P (-1)^{P-\mu} \binom{P}{\mu} f\left(\frac{\mu}{m}\right),$$

$$\left. (d^P/ds^P)B_m(f(s)) \right|_{s=1} = \frac{m!}{(m-P)!} \sum_{\mu=0}^P (-1)^\mu \binom{P}{\mu} f\left(-\frac{m-\mu}{m}\right) \quad (2)$$

给出。

由最后这些表达式，看出，在端点 $S = 0, 1$ 上的 P 阶导数由 $f(s)$ 在该端点与离端点最近的 P 个点上的值决定。特别是，一阶导数是

$$\begin{aligned} B'_m(f)|_{s=0} &= \Delta f(0)/(1/m) = m\{f(1/m) - f(0)\}, \\ B'_m(f)|_{s=1} &= \Delta f((m-1)/m)/(1/m) = m\{f(1) - f((m-1)/m)\}, \end{aligned} \quad (3)$$

这意指：多项式在端点上切于连接端点与邻近内点的直线。

不难证明(5, 第108—109页)： $B_m(f)$ 能以有限差分的形式表达如下：

$B_m(f(s)) = \sum_{\mu=0}^m \Delta^\mu f(0) \binom{m}{\mu} s^\mu$ ，其中 Δ^μ 是作用了 μ 次的向前差分算子²。我们将在下节考究这些公式的一些几何意义

在多项式的 Taylor 展开式中利用关系式(2)，能得到 $B_m(f(s))$ 的另一表达式，即

$$B_m(f(s)) = \sum_{P=0}^m B^{(P)}(f(s)) \left|_{s=0} \frac{s^P}{P!} = \sum_{P=0}^m \binom{m}{P} s^P \sum_{\mu=0}^P (-1)^{P-\mu} \binom{P}{\mu} f\left(-\frac{\mu}{m}\right).$$

现在，如 $P(S)$ 是任何对于 $S \in (0, 1)$ 有定义的 m 次多项式，则它能看成是对于唯一一组值 $f(0), f(1/m), \dots, f(1)$ 的唯一的 m 次 Bernstein 多项式逼近。这后一组值容易以 $P(S)$ 的端点导数为项决定如

$$\begin{aligned} f(\mu/m) &= \sum_{k=0}^{\mu} \binom{\mu}{k} (m-k)!/m! P^{(k)}(0) \\ &= \sum_{k=0}^{m-\mu} (-1)^k \binom{m-\mu}{k} (m-k)!/m! P^{(k)}(1). \end{aligned} \quad (4)$$

(4) 是反演公式。

Bernstein 多项式值得注意的特征是它们模拟了原有函数 f 的主要特点与如下事实：Bernstein 逼近恒至少与原有函数一样光滑。这些性质可更确切地描述于下列定理中。

定理2.1 (参考(5, 第114页))。如 $f(S)$ 的 P 阶导数界于 α_P 与 β_P 之间： $\alpha_P \leq f^{(P)}(s) \leq \beta_P$, $S \in (0, 1)$ ($P = 0, 1, \dots, m$)，则其 m 次 Bernstein 逼近式的 P 阶导数也是有界的：对于 $1 \leq P \leq m$ ，有

$$\alpha_P \leq (m!/(m(m-1)\cdots(m-P+1))) B_m^{(P)}(f) \leq \beta_P$$

而且对于 $P = 0$ ，有 $\alpha_0 \leq B_m(f) \leq \beta_0$ 。

特别是，对于 $P = 0$ ，定理表明：Bernstein 多项式的值完全在 $f(S)$ 对 $S \in (0, 1)$ 的极大值与极小值的范围之内。此外，对于 $P = 1$ ，我们可以得到结论：如 f 是单调的，则 $B_m(f)$ 也是；而且对于 $P = 2$ ，如 f 是凸(或凹)的，则 $B_m(f)$ 也是。一般，如 $f^{(2P)} \geq 0$ ，则 $B_m^{(2P)}(f) \geq 0$ 。

多项式内插及极小范数逼近的缺点是逼近式显示出额外的特点，即波动。以上的定理表明：Bernstein 多项式却相反，它特好地模拟了 f 的大体性质，而以拟合的接近性为代价。但

注2 注意，如 P_n 是 n 次多项式，则对于所有的 $\mu > n$, $\Delta^\mu(P_n) = 0$ 。这样，对于 m 的任何值， $B_m(P_n)$ 恒为次数小于或等于 n 的多项式。