

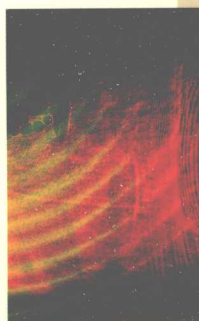


普通高等教育“十一五”国家级规划教材

热学

第二版

常树人 / 著



南开大学出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

热 学

(第二版)

常树人 编著

南开大学出版社

天 津

图书在版编目(CIP)数据

热学 / 常树人编著. —2 版. —天津: 南开大学出版社,
2009.12

ISBN 978-7-310-03312-6

I. 热… II. 常… III. 热学—高等学校—教材 IV. 0551

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 214272 号

版权所有 侵权必究

南开大学出版社出版发行

出版人: 肖占鹏

地址: 天津市南开区卫津路 94 号 邮政编码: 300071

营销部电话: (022)23508339 23500755

营销部传真: (022)23508542 邮购部电话: (022)23502200

*

天津泰宇印务有限公司印刷

全国各地新华书店经销

*

2009 年 12 月第 2 版 2009 年 12 月第 3 次印刷

787×1092 毫米 16 开本 18.75 印张 2 插页 472 千字

定价: 35.00 元

如遇图书印装质量问题, 请与本社营销部联系调换, 电话: (022)23507125

内 容 提 要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材。

本书包括概率及概率密度分布函数、气体分子动理论、热力学基础和相变四部分,共八章。

本书对惯用的热学教学体系作了较大的改革。特别是在宏观描述与微观描述的相互配合、强调统计规律的特点以及突出熵的重要地位方面,都作了较新的处理。

本教材特别注重基本概念和物理图像的明晰。书中解释了热学教学中常遇到的一些疑难问题,也适当融入了一些与热学相关的科学前沿和交叉学科领域的内容。全书每章均附有思考题和习题(含答案),便于学生练习和自测。

本书在内容安排上,便于不同任课教师作不同的取舍。因此,本书不仅可作为各高等学校物理专业的教材或参考书,也可供其他相关专业师生参考。

前言

本书是在编者在南开大学多年讲授热学的基础上编写成的。

近年来,普通物理的教学改革成果丰硕,有多部面向 21 世纪的教材问世,其中,就有优秀的热学教材。本人认真学习了这些范本,在教育思想、学术观点以及教学方法等方面都受到很多启发。编写这本教材时,我想把力气下在理顺教学体系、讲清基本概念和引起学生对科学技术前沿问题的关注上。

本书在内容安排上与传统的热学教材有所不同。概率论的入门知识专门安排为一章;分布函数和麦克斯韦速度分布律被分为三步讲述(第 1 章引入概率密度分布函数的概念、第 3 章利用速度空间描述分子按速度的分布、第 4 章给出麦克斯韦速度分布的具体函数形式);在第 2 章讨论热力学系统的状态时就讲微观描述,作好铺垫,后边讲热力学第二定律时,便径直引入玻耳兹曼熵;突出热力学第二定律的熵表述,淡化其经典表述;把关于分子碰撞的内容从输运过程一章剥离出来,将其作为分子动理论的基本概念放到第 3 章一并学习。

本人基本按如上变更了的教学体系,在南开大学物理科学学院 95 级热学课上作了首次实践,效果是好的。

我国高等教育历来重视基本概念、基本规律和基本方法的明晰、扎实,本人力求在这部书中体现这一好传统。

本书写进了“对原子和分子的观察及操纵”、“能源与能源新技术简介”、“负温度”、“熵与信息”、“时间箭头”、“耗散结构”等专题,也在一些例题中反映了现代工程技术问题。这些内容在教学实践中是颇受学生欢迎的。

在各校的教学计划中,热学课的学分和学时数向来不多,现今又大幅度缩减了学时。我以为,课上教学时数的减少并不意味着鼓励学生在大学里多多玩乐,学生手中的教材应该能引导他们以自学的方式来充实和训练自己;还要考虑到许多学校设有“基础科学研究和教学人才培养基地”,基地班的教学内容是要比普通班多一些、深一些的。为了满足上述不同需要,一个办法是编写不同的教材;另一个办法是以一本内容取舍灵活的教材来解决问题,我想尝试后者。当把本书作为少学时热学课的教材时,除了打星号的小节之外,像第 1 章中的“二项式分布”和“无规行走”,第 2 章中的“国际实用温标”,第 3 章涉及球极坐标的内容,第 5 章的“对流和辐射传热”、“互扩散”,也都可以不讲。特别是第 7 章,实际上是预备了两种讲法。教师会发现,还可以用这本教材按传统讲法教授热力学第二定律。对于那些必讲的内容,本书力图给不同的任课教师留有或从简处理、或引申发挥的余地。

在本书的思考题和习题之中,有的是对正文内容的补充。对待思考题,重要的不在于讨得一个答案,而是它的思考过程。至今还没有明确答案的问题不是更值得思考吗?书中打星号的习题难度较大,作为学生,若一时解不出来,不必沮丧或焦急,因为那并不表明你没有达到教学的基本要求,多半只是某个技巧问题蒙住了你。

我非常感谢北京大学的李椿、章立源、钱尚武教授,是他们在 1978 年编写的热学教材引导着我走上热学讲台,并逐步展开热学的教学研究的。我也非常感谢南京大学的秦允豪教授、复

旦大学的李洪芳教授,从他们惠赠的著作中,本人获益匪浅。北京大学赵凯华教授和中山大学罗蔚茵教授的新概念物理教程大作,更是有开辟教改新路之功,本人从中深得启示,铭谢在心。我还感谢北京大学包科达教授在编写热学试题库时所给予的有力帮助,以及他对于这本教材的关心。

作为一名基础课教师,能无怨无悔地投入工作,他的最大动力,是为了学生,也来自学生。在我写这本书时,脑海里常常回映着上课和答疑的情景。书中记述了我所讲的和我们所讨论的,里面包含着历届学生的热情和智慧,我感谢他们。我尤其要提到南开大学物理学院 95 级的仇伟红同学,他不但一直关心本书的进度,而且在繁忙的学习中,还为我打印了部分书稿;94 级的施可彬同学也给予我同样的帮助,在此向他们致谢。

我向南开大学物理科学学院的领导以及共事多年的同事们所给予的关心、支持表示诚挚的谢意。

在对于焓和熵的了解上,我得到天津大学吕灿仁教授的指教;在制冷技术上,我得到南开大学王荣起高级工程师的指教,在此一并致谢。

还要向认真审阅书稿的白金?教授表示感谢。

编写教材在我看来是一件十分郑重的事,我在规定给我的时间内尽力了;但是,愧于学识和能力所限,本书定有许多疏漏或不妥之处,敬请读者批评指正。

常树人

2000 年岁暮于南开园

再版前言

借本书再版之机,编者对第一版的全书做了仔细的订正;将一些起充实或扩展作用的内容标注了*号或改成一章后的附录;重新写了关于能源和保护环境的章节或段落;另外还有一些内容的删或增。

在目前热学课程一般只有很少授课时数的情况下,如果教师选定本书为主要教学参考书,必须在讲授时舍去书中许多内容。取舍的弹性很大,您讲课,您做主。编者只建议您事先想定如何讲授热力学第二定律,因为这关乎到课程的全局性结构。若是要突出热力学概率的概念,依照玻尔兹曼关系式从微观角度引出态函数熵,并强化热力学第二定律的熵表述,那么在前面的章节中就要适当保留对热力学系统的微观描述;若是采用一般传统讲法,本书也有足够详尽的叙述,只需要您在讲授中将有关章节串接好就是了。

编者也想对学生读者提些建议:书中老师不讲的那些章节请不妨翻阅浏览一下。虽然这对你应付考试也许没有多大帮助,但会使你眼界开阔些、思路开放些、兴趣更广些、对重要概念或定律的理解更准确透彻些。编者热切期望本书介绍的科技前沿动态和涉及世界经济及社会发展的话题能有助于激起同学们科学探索的欲望,生发强烈的社会责任感。要想成为社会所欢迎、所需要的创新人才,必须有创新的精神和创新的本领。一个对科学的未知和社会的情形漠不关心的人,会有创新的动力吗?另外,学习热学的乐趣绝不在于记住许多结论和公式,而是在于学习过程中的思辨。从我们无法用肉眼看到的微观分子热运动,到五花八门的宏观热现象,当要找出其中的规律时,是怎样凝炼出有研究价值的问题的,接着是怎样分析、解决它们的,这都值得你品味和吸收。不要认为书本写的和老师讲的都无懈可击,多些质疑,多些争论,这无论为了眼前提高学业成绩还是长远培养创新思维,都是十分必要的。

常树人

2009年仲夏于南开园

目 录

前言	(1)
再版前言	(1)
第 1 章 概率及概率密度分布函数	(1)
§ 1.1 概率的基本概念	(1)
1.1.1 随机现象与随机事件	(1)
1.1.2 统计规律性	(2)
1.1.3 随机事件发生的可能性——概率的定义	(3)
1.1.4 概率的基本性质	(3)
1.1.5 概率的简单计算	(4)
§ 1.2 随机变量与概率分布	(5)
1.2.1 随机变量	(5)
1.2.2 离散型随机变量的概率分布	(6)
1.2.3 连续型随机变量的概率密度分布函数	(8)
§ 1.3 统计平均值及涨落	(10)
1.3.1 统计平均值	(10)
1.3.2 围绕统计平均值的涨落	(12)
思考题	(13)
习 题	(14)
第 2 章 热力学系统的状态	(16)
§ 2.1 热力学系统的宏观描述	(16)
2.1.1 热力学系统及其状态参量	(16)
2.1.2 平衡态	(17)
2.1.3 非平衡态	(18)
§ 2.2 温度	(19)
2.2.1 热力学第零定律	(19)
2.2.2 温度的定义	(20)
§ 2.3 温标	(20)
2.3.1 经验温标	(20)
2.3.2 热力学温标	(25)
* 2.3.3 国际实用温标	(26)
§ 2.4 状态方程	(27)

2.4.1	状态方程	(27)
2.4.2	理想气体状态方程	(28)
2.4.3	混合理想气体状态方程	(32)
* 2.4.4	概观实际气体状态方程	(33)
§ 2.5	热力学系统状态的微观描述	(35)
2.5.1	微观状态	(35)
2.5.2	微观配容与宏观分布	(36)
2.5.3	等概率原理	(37)
2.5.4	热力学概率——一种可能的分布出现的概率	(37)
2.5.5	宏观量是相应微观量的统计平均值	(37)
2.5.6	热动平衡态的统计解说	(38)
思考题		(41)
习 题		(42)
第 3 章	气体平衡态的分子动理论基本概念	(47)
§ 3.1	气体分子热运动的通性	(47)
3.1.1	布朗运动	(47)
3.1.2	分子运动方向的统计描述	(51)
3.1.3	分子按速度分布及按速率分布的统计描述	(53)
§ 3.2	分子间的相互作用力	(55)
§ 3.3	气体的微观模型	(57)
3.3.1	气体分子的力心点模型	(58)
3.3.2	苏则朗分子力模型	(59)
3.3.3	气体分子的无吸引力刚性球模型	(59)
3.3.4	理想气体模型	(60)
§ 3.4	理想气体的压强	(61)
3.4.1	对气体压强的定性解释	(61)
3.4.2	气体分子对器壁的平均碰撞次数	(62)
3.4.3	理想气体压强公式	(64)
§ 3.5	温度的微观解释	(67)
§ 3.6	范德瓦尔斯方程	(68)
3.6.1	分子固有体积所引起的修正	(68)
3.6.2	分子间吸引力所引起的修正	(69)
§ 3.7	分子间的碰撞	(73)
3.7.1	气体分子的平均自由程和碰撞频率	(73)
3.7.2	分子碰撞(散射)截面	(76)
3.7.3	气体分子按自由程的分布	(77)
附 3.1	对原子和分子的观察及操纵	(78)
思考题		(80)
习 题		(81)

第4章 弱耦合系统玻耳兹曼分布律的简单应用	(84)
§ 4.1 弱耦合系统的玻耳兹曼分布律	(84)
§ 4.2 重力场中微粒按高度的分布	(85)
4.2.1 等温大气压公式	(86)
4.2.2 悬浮微粒按高度的分布	(87)
§ 4.3 麦克斯韦速度分布律	(88)
4.3.1 麦克斯韦速度分布函数	(88)
4.3.2 麦克斯韦速度分量分布函数	(89)
4.3.3 麦克斯韦速率分布律	(89)
* 4.3.4 误差函数	(92)
4.3.5 应用举例	(93)
4.3.6 麦克斯韦速度分布律的实验验证	(98)
§ 4.4 能量按自由度均分定理	(100)
4.4.1 气体的内能和定容热容量	(100)
4.4.2 自由度和动能函数	(101)
4.4.3 分子热运动平均能量的计算	(103)
4.4.4 理想气体的摩尔内能和定容摩尔热容量	(104)
4.4.5 能量按自由度均分定理	(105)
4.4.6 由能量按自由度均分定理看经典物理的困难	(106)
思考题	(107)
习 题	(108)
第5章 气体的输运过程	(114)
§ 5.1 输运过程的宏观规律	(115)
5.1.1 牛顿黏滞定律	(115)
5.1.2 傅里叶热传导定律	(116)
5.1.3 对流和辐射传热	(117)
5.1.4 菲克扩散定律	(125)
§ 5.2 输运过程的微观解释	(127)
5.2.1 思路与准备	(127)
5.2.2 黏滞现象的微观解释	(129)
5.2.3 热传导现象的微观解释	(130)
5.2.4 扩散现象的微观解释	(131)
5.2.5 输运过程简单微观理论与实验的比较	(131)
5.2.6 对简单理论的改进	(132)
§ 5.3 超稀薄气体的热传导及黏滞现象	(134)
思考题	(135)
习 题	(136)

第 6 章 热力学第一定律	(139)
§ 6.1 功、内能和热量	(139)
6.1.1 热力学的广义功	(139)
6.1.2 内能	(140)
6.1.3 热量	(141)
§ 6.2 热力学第一定律	(142)
6.2.1 热力学第一定律的建立	(142)
6.2.2 热力学第一定律的数学表述	(143)
§ 6.3 准静态过程与可逆过程	(144)
6.3.1 准静态过程	(144)
6.3.2 可逆过程	(145)
§ 6.4 可逆过程中功的计算	(146)
6.4.1 体积功的计算	(147)
6.4.2 其他形式的功	(148)
6.4.3 可逆过程做功的一般表达式	(150)
§ 6.5 热容量与热量的计算及焓	(150)
6.5.1 等容过程热容量与内能的变化	(150)
6.5.2 等压过程热容量与焓的变化	(151)
6.5.3 由热容量计算热量、内能和焓	(152)
6.5.4 对热容量的进一步认识	(153)
§ 6.6 气体的内能	(154)
6.6.1 焦耳实验	(154)
6.6.2 焦耳定律	(155)
6.6.3 焦耳—汤姆逊实验	(155)
6.6.4 理想气体的定义	(158)
6.6.5 对焦耳—汤姆逊效应的初步解释	(159)
§ 6.7 理想气体典型热力学过程的分析	(160)
6.7.1 等温过程	(161)
6.7.2 等容过程	(161)
6.7.3 等压过程	(161)
6.7.4 绝热过程	(162)
6.7.5 多方过程	(165)
§ 6.8 循环过程	(166)
6.8.1 热力循环及其效率	(166)
6.8.2 制冷循环和制冷系数	(167)
6.8.3 热泵及热泵效能	(172)
6.8.4 卡诺循环	(172)
* 6.8.5 常用的理想动力循环简述	(174)
附 6.1 能源与能源新技术简述	(175)
思考题	(183)

习 题	(185)
第 7 章 热力学第二定律	(193)
§ 7.1 问题的提出	(193)
§ 7.2 热现象的不可逆性	(193)
7.2.1 热现象的进行方向	(193)
7.2.2 各种不可逆过程都是互相关联的	(194)
7.2.3 自发过程初末态的差别	(195)
§ 7.3 态函数熵	(197)
7.3.1 热力学概率与熵的定义——玻耳兹曼公式	(197)
7.3.2 理想气体熵的表达式	(197)
7.3.3 熵的变化与热交换	(199)
§ 7.4 热力学第二定律	(201)
7.4.1 熵增加原理——热力学第二定律的熵表述	(201)
7.4.2 热力学第二定律的经典表述	(201)
7.4.3 热力学第二定律的实质	(203)
7.4.4 热力学第二定律的统计意义	(203)
§ 7.5 卡诺定理及其应用	(204)
7.5.1 卡诺定理在热力学发展中的重要地位	(204)
7.5.2 卡诺定理及其证明	(205)
* 7.5.3 历史上对卡诺定理的证明和态函数熵的引进	(207)
7.5.4 热力学温标的建立	(210)
7.5.5 物质的内能与状态方程的关系	(211)
§ 7.6 熵差的计算	(212)
§ 7.7 熵及熵增加原理的实际应用	(218)
* § 7.8 熵及热力学第二定律的拓展	(221)
7.8.1 负温度	(221)
7.8.2 熵与信息	(225)
7.8.3 时间箭头	(229)
7.8.4 非平衡的定常态	(232)
7.8.5 耗散结构	(234)
7.8.6 从平衡态走向混沌	(241)
7.8.7 热寂说	(242)
思考题	(244)
习 题	(245)
第 8 章 相变	(249)
§ 8.1 气-液相变	(250)
8.1.1 汽化和凝结	(250)
8.1.2 蒸发与饱和蒸气压	(250)

8.1.3	沸腾	(251)
8.1.4	汽化热和凝结热	(252)
8.1.5	过饱和蒸气与过热液体	(253)
8.1.6	气液等温转变 临界点	(255)
8.1.7	范德瓦尔斯等温线 临界参量	(257)
8.1.8	物态对比方程 对应态定律	(258)
8.1.9	汽化曲线	(259)
8.1.10	热管	(259)
§ 8.2	固—液相变和固—气相变 三相图	(260)
8.2.1	固—液相变	(260)
8.2.2	固—气相变	(262)
8.2.3	三相图	(262)
§ 8.3	一级相变的普遍特征 克拉珀龙方程	(263)
8.3.1	气—液、固—液、固—气相变的共同特征 一级相变	(263)
8.3.2	克拉珀龙方程	(264)
* § 8.4	连续相变简介	(266)
8.4.1	一级相变以外的一些相变现象	(266)
8.4.2	连续相变	(269)
思考题		(271)
习 题		(272)
附录		(274)
习题参考答案		(274)
附表 1	基本物理常量(1986 年的推荐值)	(281)
附表 2	保留单位和标准值	(281)
索引		(282)
主要参考书目		(285)

第1章 概率及概率密度分布函数

热现象微观理论的关键方法是统计方法,在描述系统状态的宏观量与相应的微观量之间,是靠统计方法建立联系的。统计理论中最基础的概念——概率及其有关的重要知识是我们学习热学时首先应当掌握的。

§ 1.1 概率的基本概念

1.1.1 随机现象与随机事件

自然界中许多事情是可以被预言的。例如,作简谐振动的单摆,只要知道其固有频率及初始条件,我们就能计算出摆球在任何时刻的位置和速度。又如,一年里四季的更替,一月间月亮的圆缺,都是可以预知的。这类事件称为确定性事件。

然而,还有一类现象,我们只能确定影响它们演化的一部分因素,另外一部分因素是无法确定,或无法控制的,所以,现象发展的结局不是唯一的,到底如何,事先不能预言。这类现象称为随机现象。例如,容器中的气体,尽管我们可以控制容器的容积、气体的压强乃至其温度,但我们无法控制气体分子在热运动中怎样和其他分子、又怎样和容器壁去碰撞,因而无从预言各个分子每一时刻的空间位置与速度。我们说,气体中一个分子所在的空间位置及其运动状态如何,是一种随机现象。在一定条件下,一个随机现象可以出现的多种结果中的每一个,就叫做一个随机事件。

对随机现象进行实验观测,在单次实验中所出现的不能再“分解”的事件,叫做基本随机事件。例如掷骰子可能出现不同点数这一随机现象,在单次实验中分别出现1点、2点、3点、4点、5点、6点,就是它的六个基本随机事件。一随机现象的所有基本随机事件构成一基本事件组,掷骰子的基本事件组就由上述六个基本事件组成。

把基本随机事件按不同方式复合起来,则成为不同的复杂随机事件。仍以掷骰子为例。我们可以取“掷出的点数等于或大于5”为一随机事件,记为 B 。显然,不论掷出的点数是5还是6,都算做事件 B 发生了。我们称 B 事件是由“掷出的点数为5”这一基本随机事件与另一“掷出的点数为6”的基本随机事件而构成的, B 就属于复杂随机事件了。

一般说,所谓“随机事件 B 是由随机事件 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 所构成”,是指:当且仅当这 m 个事件中有一个发生时,事件 B 才发生。换句话说,在单次实验中若上述事件 B 发生了,也就是 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 中的任何一个发生了,而 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 中的任两个事件却绝不可能在单次实验中同时发生,我们称它们是互不相容的。基本随机事件组内的事件都是互不相容的。一般地,凡不可能在单次实验中同时发生的两个随机事件,就是互不相容的随机事件。

人们还注意到,有时,对于选定的随机事件 A 与 B ,其中之一是否发生并不受另一个是否发生所影响,则称 A 与 B 是互相独立的。例如,同时掷两只骰子,其一是否出现5点与另一个

是否出现 3 点毫无联系,两骰子分别出现 5 点与 3 点这两个随机事件尽管可以同时发生,却互相独立。即便拿一只骰子来说,“这次投掷是否出现 5 点”与“下次投掷是否出现 3 点”也是不相干的,尽管是两次相继的投掷,这两个随机事件仍是各自独立的。再以我们在本课程中将特别关注的气体分子的速度为例,一分子速度的 x 分量介于怎样的大小区间与它的 y 分量介于怎样的大小区间, z 分量又介于怎样的大小区间,是互不相关的。

1.1.2 统计规律性

通过观察一个演示实验可知,对大量随机事件的整体是有统计规律可循的。如图 1.1.1 所示,一个带有玻璃面板的大盒内用竖直隔板分成许多等宽的小格,另有一斜放着的、底板面钉有许多小铁钉的木槽,其开口处与大盒口的一边相接。通常称这种装置为伽尔顿板。令小球从钉板上滚下,它要与板上铁钉进行无规则的碰撞。小球在下滚途中受力的复杂细节是失去人为控制的,尤其在把不止一个小球乃至大量小球同时或连续沿钉板撒下时,我们不可能一一控制它们落下的初始状态;而且它们除与铁钉碰撞外还要彼此碰撞,更使得每个小球的运动呈现随机状态。尽管各个小球的运动都遵从牛顿力学定律,但它们离开钉槽时的速度无论大小还是方向都具有偶然性,以致就单个小球来说,它滚下后究竟会落在大木盒中的哪一个格子里,是不能预知的。

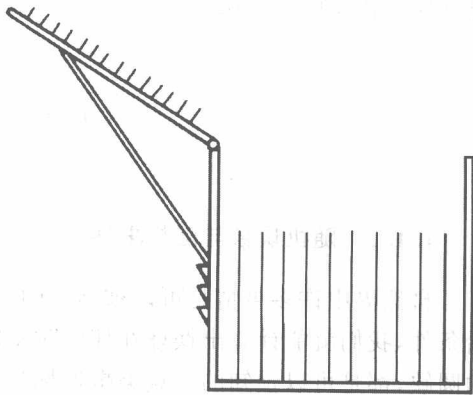


图 1.1.1 伽尔顿板

现保持木槽的倾斜度不变,先把少量小球从钉板上撒下,它们将滚落在盒中各格里而有一分布。以尽量相同的方式将同样数量的小球再撒下一次,又一次,……我们发现:每次小球在各格中的分布是有明显差异的。

现改撒大量小球,盒中各格里接到小球的数目是不相等的,越靠两边格子的小球数目越少,中间有一格中落入小球数目最多。究竟是哪一格中最多,这与木槽的倾斜度有关。用同样多的小球再撒一次,按上面所说单个小球运动轨迹不可控制,以致落入盒中哪一格完全具有偶然性来推想,或许仍会像少量小球撒下时那样,出现明显不同于前次的分布。但事实上,只要木槽倾斜度固定,球的数目足够多,且总数保持不变,撒球的方式也尽量相同,那么多次实验得出的结果彼此都非常接近。

如上伽尔顿板实验中,大数量小球落在大盒各格中的分布不再具有偶然性,它说明,在一定条件下,对大量随机事件的整体而言,具有较稳定的特性,且是有必然规律可循的。这就是统计规律性。在本章末尾,我们将把统计规律性的一般要点作一归纳。

统计规律性包含着单个随机事件的偶然性。试将大量小球中的一只染成与众不同的颜色,在多次实验得到各格小球数有稳定分布的同时,这只可被识别的染色小球出现在哪一格中却完全是任意的。

统计规律性一定伴随有所谓“涨落”现象。在伽尔顿板实验中,如果我们每次都逐格清点落入的小球数目,并作下记录,就会发现,每次实验中球数的实际分布与经极多次实验后统计算得的平均分布是有偏差的。这就叫做“涨落”,而且用来投撒的小球总数较少时,这种“涨落”现象就很明显。更确切些说,这里所谓“涨落”应当叫做围绕统计平均值的涨落。统计物理还研究

另一类型的涨落,如布朗运动、电路中的噪声等。涨落现象体现了单个随机事件的偶然性;同时,大量随机事件所必然遵从的统计规律性是依存于个别随机事件的偶然性的,涨落现象与统计规律性相伴正表明了偶然性与必然性之间的辩证关系。

1.1.3 随机事件发生的可能性——概率的定义

统计规律中最基本的概念是概率,它给出一随机事件发生的可能性有多大。在确定的条件下,对随机现象进行足够多次的实验观测,将看到该现象中各种可能的随机事件。设实验的总次数为 N ,其中,事件 A 出现的次数为 N_A ,定义

$$\nu_A = \frac{N_A}{N}$$

为事件 A 出现的频数。这频数会依 N 的不同而有所变化,但随着 N 的增大,由于偶然因素所起的作用相对降低,随机现象本身的固有特性变得明显,以致 ν_A 会稳定在某一值附近而只有越来越小的起伏。

当 N 极大时,频数趋于一极限

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \nu_A = P_A \quad (1.1.1)$$

P_A 称为事件 A 出现的概率。显然,概率反映了随机事件出现的可能性, P_A 越大,事件 A 出现的可能性就越大。

1.1.4 概率的基本性质

由概率的定义可推知其必具有如下性质:

(1)以 P_A 表示任意一事件的概率,必有 $0 \leq P_A \leq 1$ 。特别地,若 $P_A = 1$,意味着 A 事件在给定的条件下一定发生,它是必然事件;若 $P_A = 0$,则 A 事件在给定的条件下根本不可能发生,这是不可能事件。

(2)加法定理。

设 A_1, A_2 为两互不相容事件,若 A_1 或者 A_2 出现时都可认为事件 A 已出现,称 A 为 A_1 与 A_2 的“或”(也有称为“和”的),表示为 $A = A_1 \cup A_2$,或 $A = A_1 + A_2$ 。有

$$P_A = P_{A_1} + P_{A_2}$$

式中 P_A, P_{A_1} 和 P_{A_2} 分别为出现 A 、单独出现 A_1 和单独出现 A_2 的概率。

若 A 为若干个互不相容随机事件的“或”,即

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \quad (1.1.2)$$

$$\text{则} \quad P_A = \sum_{i=1}^n P_{A_i} \quad (1.1.3)$$

这就是加法定理。

(3)基本随机事件组中各事件的概率归一。

如果(1.1.2)式中 A_1 至 A_n 构成一基本随机事件组,亦即包含了某随机现象所有可能独立出现的全部基本随机事件,那么 A 便是必然事件,因此(1.1.3)式一定为:

$$P_A = \sum_{i=1}^n P_{A_i} = 1 \quad (1.1.4)$$

这称为概率的归一化条件。

(4)乘法定理。

设 A 、 B 两事件是相容的,把 A 、 B 都发生的事件称为 C ,换句话说, C 是在 A 和 B 都出现时才实现的事件,简单地称 C 是 A 和 B 的“交”(也称为“积”),记做 $C=A \cap B$ 或 $C=AB$ 。则事件 C 的概率为:

$$P_C = P(A \cap B) = P_A \cdot P(B|A) \quad (1.1.5)$$

这里, P_A 是 A 事件的概率, $P(B|A)$ 是在 A 发生的前提下 B 事件出现的概率,称之为“条件概率”。例如,盒中装有 15 个球,其中 5 个是塑料球,10 个是木球。而塑料球中 2 个是红色的,3 个是白色的;木球中 4 个是红色的,6 个是白色的。记 A = “取到红色球”, B = “取到塑料球”, C = “取到红色塑料球”,那么就有 $P_C = P_A \cdot P(B|A)$,其中 $P(B|A)$ 是在取到的是红色球(A 发生)的前提下,而该球质料又恰是塑料的(B 发生)之条件概率。同理也有 $P_C = P_B \cdot P(A|B)$,其中 $P(A|B)$ 则是在取到的是塑料球(B 发生)的前提下而该球为红色(A 发生)的条件概率。

有时,尽管需要 A 、 B 两事件的“交”,但 A 、 B 两事件是互相独立的,即“ B 出现”的概率跟是不是附加上“ A 出现”这一条件无关,反之亦然。那么,必有:

$$P(B|A) = P_B, \quad P(A|B) = P_A$$

于是(1.1.5)式便成为:

$$P_C = P(A \cap B) = P_A \cdot P_B \quad (1.1.6)$$

就是说,两相容的独立事件都出现的概率,等于两独立事件单独出现的概率之乘积,这叫做乘法定理。(1.1.6)式可以推广到计算多个相容的独立事件都出现的概率:

$$P_C = P(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n) = P_{A_1} P_{A_2} \cdots P_{A_n} \quad (1.1.7)$$

1.1.5 概率的简单计算

式(1.1.1)所表达的概率的定义既是概念,也给出近似计算概率的方法。但在许多实际问题中,其具体特点表现出一定的“对称性”,使得人们可以利用自己长期积累的与这种“对称性”相关的实际经验来分析事件发生的可能性。于是,并不需要像(1.1.1)式所要求的那样去作很多多次实验,而能直接计算其概率。

有一类称为古典式随机现象的概率,就可以简单计算。

古典式随机现象要满足以下两个条件:

- (1)该随机现象的基本随机事件组的事件数目有限;
- (2)每一基本随机事件发生的概率相等。

例如,一只匀质、形状规则的骰子,它有 6 个对称的面,掷出去出现的点数究竟是几,便有 6 种等概率的可能,这是一个古典式随机现象。

又如容器内有 N 个气体分子,若以一假想截面将容器分为容积相等的 A 、 B 两部分,每个分子都可自由往来于 A 、 B 之间,倘视 N 个分子是可以彼此区分的,但又各自独立地以同样方式热运动着,那么这些气体分子在 A 、 B 两部分中的分配共有 2^N 种可能,而且每种分配出现的概率都相等。这又是一个古典式随机现象。

设一古典式随机现象的基本随机事件组中含有 n 个基本事件,那么依古典式随机现象应满足的条件,易得每一基本事件发生的概率为:

$$P = \frac{1}{n} \quad (1.1.8)$$

如果该随机现象的某个复杂随机事件 C 是由 m 个基本事件构成的,则 C 的概率为: