

谢明文 ● 编著

普通高等经济类院校系列教材

# 线性代数 简明教程

XIANXING DAISHU

JIANMING JIAOCHENG



西南财经大学出版社

普通高等经济类院校系列教材

# 线性代数 简明教程

XIANXING DAISHU  
JIANMING JIAOCHENG

谢明文 ● 编著

西南财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数简明教程/谢明文编著. —成都:西南财经大学出版社,  
2009. 1

ISBN 978 - 7 - 81138 - 183 - 2

I. 线… II. 谢… III. 线性代数—高等学校—教材 IV. 0151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 198805 号

线性代数简明教程

谢明文 编著

责任编辑:李雪

封面设计:杨红鹰

责任印制:封俊川

出版发行:	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街 55 号)
网 址:	<a href="http://www.xcpress.net">http://www.xcpress.net</a>
电子邮件:	<a href="mailto:xcpress@mail.sc.cninfo.net">xcpress@mail.sc.cninfo.net</a>
邮政编码:	610074
电 话:	028 - 87353785 87352368
印 刷:	四川森林印务有限责任公司
成品尺寸:	170mm × 240mm
印 张:	8.75
字 数:	170 千字
版 次:	2009 年 1 月第 1 版
印 次:	2009 年 1 月第 1 次印刷
印 数:	1—4500 册
书 号:	ISBN 978 - 7 - 81138 - 183 - 2
定 价:	16.80 元

1. 如有印刷、装订等差错,可向本社营销部调换。
2. 版权所有,翻印必究。
3. 本书封底无本社数码防伪标志,不得销售。

## 前 言

为了适应我国普通高等学校发展的新形势,根据教育部颁布的《经济数学基础教学大纲》的最新要求,编写了一套经济数学系列教材.这套教材共分《微积分简明教程》、《线性代数简明教程》和《概率统计简明教程》三个分册.本书是第二分册.

《线性代数》是近代数学的一个重要分支,所含内容十分丰富,涉及领域十分广泛.

本书只研究其中的:行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的相似标准形、二次型以及线性空间与线性变换等基本内容.

鉴于读者的实际水平,在编写这本书之前,作者就提出了一个设想:按照《大纲》的基本要求;结合学生的具体实际,力求做到深入浅出、思路清晰;竭力追求观点新颖、理念到位.在注重科学性的前提下,注重知识的实践性.

鉴此,在编写本书时,作者力求突出以下几个特点:

(1) 深入浅出,言简意赅;着眼基础,略有创意;例题分析,片言中的;解题思路,简明清晰.

(2) 适当采用以简单理念引入基本概念、以描述说明代替理论证明的方法,力求达到既不丢失数学的科学性,又不降低知识的深广度之目的.

(3) 例题和习题,遵循由浅到深、层次分明、题型全面、分析细腻的原则,以求达到培养学生对问题的理解能力和分析能力,从而提高学生的实践能力.本书在每一节后面,配备了一定数量的习题,以供师生教学时选用.

为了方便教学,笔者建议:“三本”学生,可以选择不打\*号的内容,估计需要46学时授完;“二本”学生,可以选择没打\*号的全部内容,而带有\*号的内容,亦可部分或全部选取,估计最多需要60学时授完;跳过\*号内容,亦不影响本书的体系.

在本书初稿完成以后,前内江师范学院数学系主任、校长周德襄教授审阅全书,并提出宝贵的建设性意见,笔者在此深致谢意.

由于作者业务水平和教学经验有限,学术理念也比较肤浅,书中的缺点错误在所难免,敬请广大读者批评指正.

编者<sup>①</sup>

2007年6月于成都

<sup>①</sup> 联系方式:(1)电子邮箱:xiemw@swufe.edu.cn;(2)电话:(028)87354242

## 目 录

第一章 行列式 .....	(1)
§ 1.1 排列与对换 .....	(1)
§ 1.2 $n$ 阶行列式 .....	(3)
§ 1.3 行列式的性质 .....	(8)
§ 1.4 行列式的展开定理及其应用 .....	(13)
§ 1.5 克莱姆法则 .....	(20)
第二章 矩阵及其运算 .....	(24)
§ 2.1 矩阵的基本概念 .....	(24)
§ 2.2 矩阵的基本运算 .....	(28)
§ 2.3 逆矩阵 .....	(34)
* § 2.4 矩阵的分块 .....	(38)
§ 2.5 矩阵的初等变换及其应用 .....	(43)
第三章 线性方程组 .....	(50)
§ 3.1 $n$ 维向量 .....	(50)
§ 3.2 向量的线性相关性 .....	(53)
§ 3.3 向量组和矩阵的秩 .....	(58)
§ 3.4 线性方程组的基本概念 .....	(63)
§ 3.5 齐次线性方程组的基础解系 .....	(69)
§ 3.6 线性方程组的解法 .....	(72)
第四章 矩阵的相似标准型 .....	(78)
§ 4.1 矩阵的特征根与特征向量 .....	(78)
§ 4.2 相似矩阵 .....	(83)
§ 4.3 实对称阵的对角化 .....	(88)
第五章 二次型 .....	(94)
§ 5.1 二次型的基本概念 .....	(94)
§ 5.2 二次型的标准形 .....	(98)
* § 5.3 二次型的正定性 .....	(103)

※第六章 线性空间与线性变换简介 .....	(108)
§ 6.1 线性空间的概念 .....	(108)
§ 6.2 基变换与坐标变换 .....	(112)
§ 6.3 线性变换及其运算 .....	(116)
§ 6.4 线性变换的矩阵 .....	(120)
习题参考答案 .....	(127)

# 第一章 行列式

行列式是线性代数的一个基本工具,也是线性代数的一个研究对象.

本章的宗旨,就是要建立  $n$  阶行列式的概念,研究行列式的性质和计算方法,并解决一类特殊的  $n$  元线性方程组的求解问题.

## § 1.1 排列与对换

由于要建立  $n$  阶行列式的概念,需要用到排列与对换的概念,所以在这一节中,我们将介绍排列与对换的概念,为建立行列式的概念做好准备.

### 一、排列及其逆序

**定义 1.1** 由  $n$  个自然数  $1, 2, \dots, n$  组成的一个有序数组

$$j_1 j_2 \cdots j_n \quad (\text{其中 } j_k \in \{1, 2, \dots, n\})$$

称为一个  $n$  级排列.

由于定义中所说的“排列”,实质上就是  $n$  个不同元素  $1, 2, \dots, n$  的全排列,所以  $n$  个不同元素的  $n$  级排列,共有  $n!$  个.

例如,由  $1, 2, 3, 4$  可以写出  $4! = 24$  个 4 级排列,其中  $1234$ 、 $2431$  与  $2413$  都是一个具体的 4 级排列.

在排列  $1234$  中,定义中的  $j_1 = 1, j_2 = 2, j_3 = 3, j_4 = 4$ .

在排列  $2431$  中,定义中的  $j_1 = 2, j_2 = 4, j_3 = 3, j_4 = 1$ .

在排列  $2413$  中,定义中的  $j_1 = 2, j_2 = 4, j_3 = 1, j_4 = 3$ .

在线性代数中,人们把按照“从小到大”顺序的排列,称为自然顺序排列,简称顺序排列,而把存在“大数在前,小数在后”的排列,称为有逆序的排列.

在自然数  $1, 2, 3, 4$  的所有 4 级排列中,只有排列  $1234$  是自然顺序排列,其余的 23 个排列,均为有逆序的排列.例如,在排列  $2431$  中,2 在 1 之前,4 在 3、1 之前,3 在 1 之前;在排列  $2413$  中,2 在 1 之前,4 在 1、3 之前.

将这一现象加以抽象,就得到下面的

**定义 1.2** 在一个  $n$  级排列  $j_1 j_2 \cdots j_n$  中,若数  $j_i$  排在比它小的数  $j_l$  前面,则称  $j_l j_i$  构成一个逆序. 在一个  $n$  级排列  $j_1 j_2 \cdots j_n$  中,所有逆序之和,称为该排列的逆序数,并记为  $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ . 例如:

表 1.1

排列	逆序	逆序数
1234	不存在	$\tau(1234) = 0$
2431	21; 43; 41; 31	$\tau(2431) = 1 + 2 + 1 = 4$
2413	21; 41; 43	$\tau(2413) = 1 + 2 = 3$

例 1 求  $\tau(\overline{nn-1 \cdots 21})$ .

解 因为在排列  $\overline{nn-1 \cdots 21}$  中,  $n$  与后面的  $n-1$  个数都构成逆序, 共有  $n-1$  个逆序;  $n-1$  与后面的  $n-2$  个数也构成逆序, 共有  $n-2$  个逆序;  $\cdots$ ; 2 与后面的 1 只构成 1 个逆序, 所以

$$\tau(\overline{nn-1 \cdots 21}) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n(n-1)}{2} = C_n^2.$$

下面, 我们来介绍排列的奇偶性.

定义 1.3 设  $j_1 j_2 \cdots j_n$  是一个排列. 若  $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) =$  奇数 (或偶数), 则称排列  $j_1 j_2 \cdots j_n$  为一个奇排列 (或偶排列).

例如, 在表 1.1 中, 排列 1234 和 2431 均为偶排列, 排列 2413 为奇排列; 在例 1 中, 当  $n = 4k$  或  $4k+1$  时为偶排列, 当  $n = 4k+2$  或  $4k+3$  时为奇排列.

## 二、对换及其性质

定义 1.4 在一个排列  $j_1 \cdots j_s \cdots j_i \cdots j_n$  中, 若将其中的某两个数  $j_s$  与  $j_i$  交换位置, 而其余各数位置不变, 就得到一个新的排列  $j_1 \cdots j_i \cdots j_s \cdots j_n$ , 这样的变换, 称为一个对换, 并记为  $(j_s, j_i)$ . 这个过程, 可以简记为:

$$j_1 \cdots j_s \cdots j_i \cdots j_n \xrightarrow{(j_s, j_i)} j_1 \cdots j_i \cdots j_s \cdots j_n.$$

对换具有如下性质:

定理 1.1 任何排列经一次对换后, 均要改变奇偶性.

数学上可以证明: 在一个排列中, 无论  $j_s$  与  $j_i$  是否为相邻的两个数, 只要它们交换位置, 其余各数位置不变, 其排列的奇偶性都会改变.

例如, 偶排列 2431  $\xrightarrow{(3,1)}$  奇排列 2413; 奇排列 51432  $\xrightarrow{(5,3)}$  偶排列 31452.

定理 1.2 在全部  $n$  级排列中, 奇偶排列各占一半.

例如, 在 1, 2, 3, 4 中全体 4 级排列共有  $4! = 24$  个, 其中奇排列和偶排列都是 12 个.

定理 1.3 任何一个  $n$  级排列均可经过有限次对换, 变成自然顺序排列.

例如, 排列 2431  $\xrightarrow{(2,1)}$  1432  $\xrightarrow{(4,2)}$  1234.

## 习题 1.1

1. 写出第一、二两个位置是 4, 1 的全部 5 级排列, 并求出它们的逆序数.



2. 求出下列排列的逆序数:

(1) 314728965; (2) 528496731; (3) 654321.

3. 判断下述排列的奇偶性:

(1) 35782164; (2) 64128753; (3) 1357246; (4) 6427531.

4. 写出 1, 2, 3, 4 的全部 4 级奇排列和偶排列.

5. 试确定  $i, j$ , 使

(1) 1245  $i$  6  $j$  97 为奇排列; (2) 3972  $i$  15  $j$  4 为偶排列.

6. (1) 已知  $a_1 a_2 \cdots a_n$  的逆序数为  $k$ , 试求  $a_n a_{n-1} \cdots a_1$  的逆序数.

(2) 讨论排列  $a_1 a_2 \cdots a_n$  与  $a_n a_{n-1} \cdots a_1$  的奇偶关系.

## § 1.2 $n$ 阶行列式

由于数学的各个分支和其它许多学科(如经济、管理、物理、力学等)的理论研究,均需借助行列式这个工具,在线性代数中,关于线性方程组的许多问题,也需利用行列式这个工具,因此,本节的宗旨,就是要建立  $n$  阶行列式的概念.

### 一、二、三行列式的概念

设二元线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \quad (1-1)$$

则利用加减消元法就可以知道:当  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$  时,可得唯一解

$$\begin{cases} x = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \\ y = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \end{cases} \quad (1-2)$$

如果我们引进记号  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$  (其中横排称为行,纵排称为列),并定义:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1-3)$$

那么  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$  = “主对角线元素之积” - “副对角线元素之积”<sup>①</sup>.

为了叙述方便,我们把记号  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ ,称为一个二阶行列式,并记为  $D$ .

按此定义,(1-2)式的分子就分别为二阶行列式

① 从左上角到右下角这条对角线,称为主对角线;从右上角到左下角这条对角线,称为副对角线.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12} \triangleq D_1 \quad (D_1 \text{ 是将 } D \text{ 中 } x \text{ 的系数列换成常数项而成}) \\ \text{与} & \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2 a_{11} - b_1 a_{21} \triangleq D_2 \quad (D_2 \text{ 是将 } D \text{ 中 } y \text{ 的系数列换成常数项而成}). \end{aligned}$$

于是,当方程组的系数行列式  $D \neq 0$  时,方程组(1-1)的解为

$$x = \frac{D_1}{D}, \quad y = \frac{D_2}{D} \quad (1-4)$$

同理,对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (1-5)$$

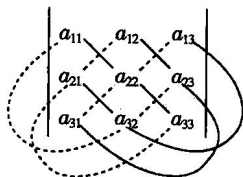
如果我们仿照二元线性方程组的方法,定义三阶行列式

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned} \quad (1-6)$$

那么当方程组的系数行列式  $D \neq 0$  时,方程组(1-4)的解就可以表示为

$$x = \frac{D_1}{D}, \quad y = \frac{D_2}{D}, \quad z = \frac{D_3}{D} \quad (1-7)$$

根据(1-6)式,我们发现:三阶行列式可按下图所示的法则来计算:



具体说来,就是各实线上的三数之积相加,依次减去各虚线上的三数之积.

例1 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}; \quad (2) D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 (1)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 5 = -6.$

(2)  $D = 2 \times 0 \times 1 + 3 \times 0 \times 0 + 5 \times (-1) \times 1 - 0 \times 0 \times 5 - 1 \times 3 \times 1 - 2 \times 0 \times (-1) = 0 + 0 - 5 - 0 - 3 - 0 = -8.$

例2 求解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} 3x - 2y - 3 = 0, \\ x + 3y + 1 = 0 \end{cases}; \quad (2) \begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ 3x + 2y - 5z = 1, \\ x + 3y - 2z = 4. \end{cases}$$

解 (1) 先把方程变成一般形式

$$\begin{cases} 3x - 2y = 3, \\ x + 3y = -1. \end{cases}$$

用对角线展开法, 可以求出

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11 \neq 0, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6.$$

所以该方程组的解为

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{7}{11}, \quad y = \frac{D_2}{D} = -\frac{6}{11}.$$

(2) 用对角线展开法, 可以求出

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 28 \neq 0, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 13,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 47, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 21.$$

于是, 方程组的解为

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{13}{28}, \quad y = \frac{47}{28}, \quad z = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}.$$

根据(1-3)与(1-6)式, 并注意到各项的符号和各项列标逆序之间的关系, 就不难看出二、三、阶行列式的定义式, 可以写成:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \xrightarrow{\text{行标自然排列}} (-1)^{\tau(12)} a_{11}a_{22} + (-1)^{\tau(21)} a_{12}a_{21}$$

与

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{行标按自然排列}} (-1)^{\tau(123)} a_{11}a_{22}a_{33} + \cdots + (-1)^{\tau(321)} a_{13}a_{22}a_{31}$$

若我们约定  $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$  表示对  $1, 2, \dots, n$  的所有  $n$  级排列求和, 则有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2} \quad (1-8)$$

$$\text{与} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \quad (1-9)$$

二、 $n$  阶行列式的概念.

由于对角线法对于三阶以上的行列式一般不成立,所以我们将行列式的概念加以推广,才能真正解决行列式的计算问题.为此,我们给出下面的

定义 1.5 由  $n^2$  个元素  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) 所构成的一个记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1-10)$$

称为一个  $n$  阶行列式,通常也记为  $D = |a_{ij}|$ ,并把横向排列的  $n$  个数,称为行列式的行;纵向排列的  $n$  个数,称为行列式的列;行列式中的数  $a_{ij}$ ,称为行列式的第  $i$  行第  $j$  列处的元素.

将(1-8)和(1-9)式加以推广,即可得到下面的关于行列式计算方法的

定义 1.6  $n$  阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \triangleq \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (1-11)$$

(1-11)式称为  $n$  阶行列式的展开式.当  $n = 1$  时,一阶行列式  $|a_{11}| = a_{11}$ .

定义 1.6 表明: $n$  阶行列式共有  $n!$  项,其值等于所有取自不同行、不同列的  $n$  个元素之积  $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$  的代数和;当行标为自然排列时,代数和的各项的符号由该项列标之逆序  $\tau(j_1 \cdots j_n)$  来决定,而且当  $\tau(j_1 \cdots j_n)$  为偶数时取“+”号,当  $\tau(j_1 \cdots j_n)$  为奇数时取“-”号.

鉴于乘法具有交换律,(1-11)式通项中的  $n$  个元素可以任意交换位置,因此只要能够保证相乘的  $n$  个元素来自不同行不同列,(1-11)式通项的乘积因子就可以写成  $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$ ,且各项符号可由逆序  $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$  来决定.于是,我们可以得到(1-11)式的通项等价形式为

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} \quad (1-12)$$

由定理 1.1 知,(1-12)式通项中的任何两个元素的一次位置调换都会导致行标与列标同时对换一次,因此对于任何一次对换,逆序之和  $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$  的奇偶性保持不变.

由定理 1.3 可知,只要经过有限次对换,就可以将列标  $j_1 j_2 \cdots j_n$  变为自然排列  $1 2 \cdots n$ ,把行标  $i_1 i_2 \cdots i_n$  变成  $1 2 \cdots n$ .于是, $n$  阶行列式的展开式(1-11)式也可写成

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \quad (1-13)$$

下面,我们利用(1-11)式来计算几个常用的特殊行列式.

例2 计算下列行列式的值:

$$(1) D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad (2) D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 (1) 由(1-11)式,得

$$D_1 = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}.$$

因为在第一行中除  $a_{11}$  外均为零,所以  $j_1 = 1$

又 在第二行中,除  $a_{21}$ 、 $a_{22}$  外,其余元素均为零,即  $j_2$  只可能取 1 和 2

而  $j_1 \neq j_2$  且  $j_1 = 1$

故 必有  $j_2 = 2$ .

同理,可得  $j_3 = 3, \cdots, j_n = n$ .

$$\begin{aligned} \text{于是 } D_1 &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(12 \cdots n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} = (-1)^{\tau(12 \cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \\ &= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}. \end{aligned}$$

数学上,人们把像  $D_1$  这样的主对角线上方元素全为零的行列式,称为下三角行列式. 此题的结果表明:下三角行列式的值,等于主对角线上元素的乘积.

(2) 由(1-11)式和上题的解题思想,立即可得

$$\begin{aligned} D_2 &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(12 \cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \\ &= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}. \end{aligned}$$

数学上,人们把像  $D_2$  这样的主对角线两侧元素全为零的行列式,称为对角形行列式. 此题的结果表明:对角形行列式的值,也等于主对角线上元素之积.

## 习题 1.2

1. 试求下列行列式的值:

$$(1) \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha \end{vmatrix}; \quad (3) \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}; \quad (5) \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 11 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix}; \quad (6) \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

\*2. 用行列式求解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} 4x + 3y = 5, \\ 3x + 4y = 6; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x - 3y = 9k, \\ 4x - y = 8k; \end{cases} \quad (3) \begin{cases} 2x - y + 3z = 3, \\ 3x + y - 5z = 0, \\ 4x - y + z = 3. \end{cases}$$

## § 1.3 行列式的性质

由于用行列式的定义计算行列式,需要计算  $n!$  个项,而每个项又是  $n$  个元素的乘积,计算一项就需要作  $n-1$  次乘法,因此要求出一个  $n$  阶行列式就需要作  $n!(n-1)$  次乘法.当  $n$  较大时,  $n!$  将会变得非常地大.鉴此,我们必须对行列式的性质进行研究,以达到简化计算的目的.

### 一、行列式的性质

性质 1 行列互换,其值不变.即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \triangleq D'.$$

证 因为  $D$  的第  $i$  行第  $j$  列的元素为  $a_{ij}$ ,就是  $D'$  的第  $j$  行第  $i$  列的元素

$$\text{所以 } D \xrightarrow{\text{按行的自然排列展开}} \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

$$D' \xrightarrow{\text{按列的自然排列展开}} \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

于是,可得  $D = D'$ .

数学上,人们把行列式  $D'$  称为行列式  $D$  的转置行列式.性质 1 表明:

(1) 任何行列式都与它的转置行列式等值.

(2) 在行列式中,行和列的地位具有对称性.因此,在行列式中,凡是对行成立的命题,对列依然成立.

性质 2 行列式中某一行的公因子可以提出来.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$\text{证 上式左端} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (ka_{ij_i}) \cdots a_{nj_n}$$

$$= k \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} = \text{上式右端.}$$

性质 2 表明:

(1) 把一个行列式乘以  $k$ , 等价于把该行列式的某一行(注意:不是所有行!)的所有元素都乘以  $k$ .

(2) 若某行列式有一行元素为零, 则该行列式的值必定为零.

**性质 3** 若将行列式  $D$  的两行对调后的行列式为  $D_1$ , 则必有  $D = -D_1$ .

**证** 假设将行列式  $D$  的第  $p$  行和第  $p+s$  行施行一次对调, 则在此对调下, 由于只有行的逆序会发生变化, 而列的逆序不会改变, 所以由(1-12)式和定理 1.1 可知, 必有  $D = -D_1$ .

$$\text{例如, } D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 15.$$

**性质 4** 若行列式  $D$  中有两行元素相同, 则行列式  $D$  必定为零.

**证** 设行列式  $D$  的第  $s$  行和第  $t$  行元素相同, 则把它们互换后仍然为  $D$ . 因为根据性质 3, 两行互换后所得的行列式之值又为  $-D$ , 所以必有  $D = 0$ .

**推论** 若行列式  $D$  中有两行元素成比例, 则行列式  $D$  必定为零.

**性质 5** 若行列式  $D$  的某一行的每个元素都是两数之和, 则  $D$  可以拆分成两个行列式之和. 即有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**证** 由(1-9)式

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (a_{ij_i} + b_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} + \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots b_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\ &= \text{右边}. \end{aligned}$$

**性质 6** 若把行列式  $D$  的某一行  $k$  倍加到另一行, 则该行列式  $D$  的值仍然不变, 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} + ka_{t1} & a_{s2} + ka_{t2} & \cdots & a_{sn} + ka_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**证** 由性质 5、性质 2 及性质 4, 得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} + ka_{t1} & a_{s2} + ka_{t2} & \cdots & a_{sn} + ka_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 + k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + k \cdot 0 \\
 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**推论** 若把行列式一些行的倍数一起加到另一行,则行列式的值也不变.

下面,我们将通过一些例题来说明如何利用行列式的性质来计算行列式.

计算行列式的一个指导思想,就是要利用行列式的性质把给定的行列式  $D$  设法变为“三角形”行列式.然后,借助 § 1.1 中例 2 的结果写出结论.

为了清楚地反映行列式的计算过程,我们约定以下记号:

- (1) “ $(i, j)$ ”表示将行列式的  $i, j$  两行对调;
- (2) “ $(i, j)'$ ”表示将行列式的  $i, j$  两列对调;
- (3) “ $(j) + k(i)$ ”表示将行列式的  $i$  行的  $k$  倍、加到第  $j$  行;
- (4) “ $(j)' + k(i)'$ ”表示将行列式的  $i$  列的  $k$  倍、加到第  $j$  列;
- (5) “ $k(i)$ ”表示第  $i$  行乘以  $k$ ; “ $k(i)'$ ”表示第  $i$  列乘以  $k$ .

例 1 计算 
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$



$$\text{解} \quad \left| \begin{array}{cccc} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right| \xrightarrow{(1,2)} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right|$$

$$\xrightarrow[\begin{array}{l} (2) - 2(1), (3) + 3(1) \\ (4) - 3(1) \end{array}]{\quad} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & -6 & -7 \end{array} \right|$$

$$\xrightarrow[\begin{array}{l} (3) + (2), (4) + 2(2) \end{array}]{\quad} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -14 & -17 \end{array} \right|$$

$$\xrightarrow[\begin{array}{l} \text{性质 2} \\ -3 \end{array}]{\quad} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -14 & -17 \end{array} \right|$$

$$\xrightarrow[\begin{array}{l} (4) + 14(3) \\ -3 \end{array}]{\quad} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right|$$

$$= -3 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-3) = -9.$$

$$\text{例 2} \quad \text{计算 } n \text{ 阶行列式 } D = \left| \begin{array}{cccc} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{array} \right|.$$

解 将第 2、3、…、 $n$  列加到第一列, 得

$$D = \left| \begin{array}{cccc} a + (n-1) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a + (n-1) & a & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a + (n-1) & 1 & 1 & \cdots & a \end{array} \right|$$

$$= [a + (n-1)] \cdot \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{array} \right|$$

$$\xrightarrow[\text{将第一行} \times (-1) \text{ 加到各行}]{\quad} [a + (n-1)] \cdot \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{array} \right|$$