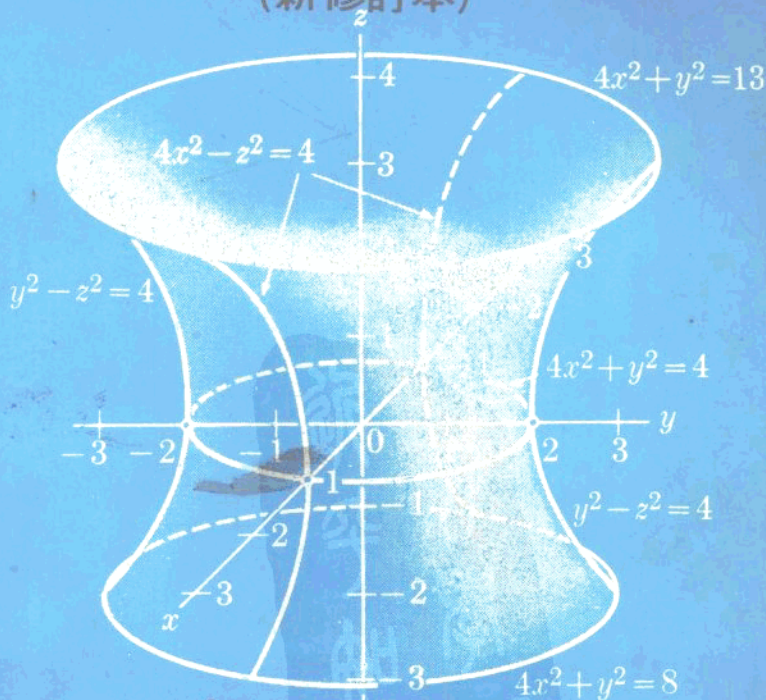


科技用書

# 初級微積分

陳源奇 編著

(新修訂本)



大行出版社印行

科技用書

# 初級微積分

陳源奇 編著

(新修訂本)

劉道元  
  
題

大行出版社印行



中華民國七十三年元月 日五版

中華民國七十一年八月 日四版

中華民國六十九年九月 日三版

中華民國六十七年八月 日二版

中華民國六十五年九月 日初版

書名：初級微積分(最新修訂本)

著作者：陳源奇 編著

發行人：裴振九

出版者：大行出版社

社址：台南市體育路41巷26號

電話：2613685 號

本社免費郵政劃撥帳號南字第32936號

本社登記證字第：行政院新聞局

局版台業字第0395號

總經銷：成大書局有限公司

台南市體育路41巷26號

電話：2651916 號

特價：平一六五元精一九五元

編號：Q00003-00085

◇ 同業友好・敬請愛護 ◇

# 序 言

一、關於微積分學之教科書，用英、德、法等國文字編著者，為數頗多，但學習此科目者，每因外國語文關係，查考字典，推敲文句，曠時費日，而仍不得其要領，且與教者之進度亦無法一致，作者有鑑及此，不揣譾陋，謹將此中文本獻給研習此科之讀者，以節推敲之勞，而收事半功倍之效。

二、本書係參考 Allyn J. Washington 教授著 Technical Calculus With Analytic Geometry, 及 George B. Thomas Jr. Calculus 及國內各先進編譯之微積分等書以及筆者執教南臺工專化工科及機械科之講義再三修訂彙編而成，取材新穎，層次分明，循序漸進，是為一部最實用之工科學生數學用書。

三、本書極適合我國大專學生應用數學之教材，全書深入淺出，內容充實簡明扼要，使學者易讀，教者易教。並且每章皆附習題解答，學者可自行演算。

四、本書編輯承成大書局王敦品先生大力協助得以順利完成，並承成功大學數學系黃雙虎教授指正以及機械科電子科周正平、林文清、詹岩石等同學從旁協助校對初稿，在此致最大的謝意。筆者才疏學淺，難免有錯誤遺漏之處，又數學書籍排校困難，誤植之處亦難避免。尚祈諸先進及讀者們不吝指教。

五、本書封面承中興大學校長劉道元恩師題字，以及諸先進鼓勵，得以順利完稿特此申謝。

本書完稿正逢先嚴陳公承鈺逝世紀念日，特此立書紀念之。

農曆六月廿五日完稿

筆者謹誌 於南臺工專教務處

## 初 級 微 積 分

## 目 錄

第一章 平面解析幾何 *Plane Analytic Geometry*

|      |                                            |    |
|------|--------------------------------------------|----|
| 1-1  | 引 言 ( <i>Introduction</i> )                | 1  |
| 1-2  | 直角坐標 ( <i>Rectangular coordinates</i> )    | 1  |
| 1-3  | 方程式之圖形 ( <i>The graph of an equation</i> ) | 4  |
| 1-4  | 其他基本簡單觀念 ( <i>Some basic definitions</i> ) | 10 |
| 1-5  | 直線 ( <i>The straight line</i> )            | 13 |
| 1-6  | 圓 ( <i>The circle</i> )                    | 19 |
| 1-7  | 拋物線 ( <i>Parabola</i> )                    | 22 |
| 1-8  | 橢圓 ( <i>Ellipse</i> )                      | 25 |
| 1-9  | 雙曲線 ( <i>The hyperbola</i> )               | 30 |
| 1-10 | 坐標軸移轉 ( <i>Translation of axes</i> )       | 33 |

第二章 導 數 *The Derivative*

|     |                                                                         |    |
|-----|-------------------------------------------------------------------------|----|
| 2-1 | 代數函數 ( <i>Algebraic functions</i> )                                     | 40 |
| 2-2 | 極限 ( <i>Limits</i> )                                                    | 47 |
| 2-3 | 切線斜率 ( <i>The slope of a tangent to a curve</i> )                       | 51 |
| 2-4 | 導數 ( <i>The derivative</i> )                                            | 54 |
| 2-5 | 導數意義三初步應用 ( <i>The meaning of the derivative</i> )                      | 60 |
| 2-6 | 多項式之導數 ( <i>Derivatives of polynomials</i> )                            | 64 |
| 2-7 | 函數之積與商之導數 ( <i>Derivatives of products and quotients of functions</i> ) | 71 |

|                                                 |                                                                       |     |
|-------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|-----|
| 2 - 8                                           | 函數之函數微分法 ( <i>The derivative of a power of a function</i> ) .....     | 80  |
| 2 - 9                                           | 圖解微分法 ( <i>Graphical differentiation</i> ) .....                      | 93  |
| 第三章 積 <i>Integration</i>                        |                                                                       |     |
| 3 - 1                                           | 概說 ( <i>Introduction</i> ) .....                                      | 102 |
| 3 - 2                                           | 不定積分 ( <i>The indefinite integral</i> ) .....                         | 106 |
| 3 - 3                                           | 用積分法求曲線下之面積 .....                                                     | 117 |
| 3 - 4                                           | 定積分 .....                                                             | 124 |
| 3 - 5                                           | 圖解積分法 .....                                                           | 130 |
| 第四章 導數之應用 <i>Applications of the Derivative</i> |                                                                       |     |
| 4 - 1                                           | 切線與法線 ( <i>Tangents and normals</i> ) .....                           | 135 |
| 4 - 2                                           | 曲線運動 ( <i>Curvilinear motion</i> ) .....                              | 139 |
| 4 - 3                                           | 相關變率 ( <i>Related rates</i> ) .....                                   | 144 |
| 4 - 4                                           | 導數對曲線描繪之應用 ( <i>The use of derivatives in curve sketching</i> ) ..... | 148 |
| 4 - 5                                           | 曲線描繪之推廣 ( <i>More on curve sketching</i> ) .....                      | 153 |
| 4 - 6                                           | 極大、極小應用問題 ( <i>Applied maximum and minimum problems</i> ) .....       | 158 |
| 第五章 積分之應用 <i>Applications of Integration</i>    |                                                                       |     |
| 5 - 1                                           | 不定積分之應用 ( <i>Application of the indefinite integral</i> ) .....       | 166 |
| 5 - 2                                           | 用積分方法求面積 ( <i>Areas by integration</i> ) .....                        | 171 |
| 5 - 3                                           | 用積分求體積 ( <i>Volumes by integration</i> ) .....                        | 177 |
| 5 - 4                                           | 形心 ( <i>Centroids</i> ) .....                                         | 183 |
| 5 - 5                                           | 慣距 ( <i>Moments of inertia</i> ) .....                                | 192 |
| 5 - 6                                           | 一般應用 ( <i>Other applications</i> ) .....                              | 197 |

第六章 三角函數及反三角函數之導數 *Derivatives of the Trigonometric and Inverse Trigonometric Functions*

|     |                                                                             |     |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6-1 | 三角函數 .....                                                                  | 203 |
| 6-2 | 三角基本關係 ( <i>Base trigonometric relations</i> ) .....                        | 210 |
| 6-3 | 正弦, 餘弦函數之導數 ( <i>Derivatives of the sine and cosine functions</i> ) .....   | 214 |
| 6-4 | 其他三角函數之導數 ( <i>Derivatives of the other trigonometric functions</i> ) ..... | 222 |
| 6-5 | 反三角函數 ( <i>The inverse trigonometric functions</i> ) .....                  | 225 |
| 6-6 | 反三角函數導數 ( <i>Derivatives of the inverse trigonometric functions</i> ) ..... | 229 |
| 6-7 | 應用題 ( <i>Applications</i> ) .....                                           | 235 |

第七章 指數函數及對數函數之導數

|     |                 |     |
|-----|-----------------|-----|
| 7-1 | 指數函數及對數函數 ..... | 243 |
| 7-2 | 對數函數之導數 .....   | 249 |
| 7-3 | 指數函數之導數 .....   | 257 |
| 7-4 | 應用問題 .....      | 261 |

第八章 其他積分法

|     |                                                 |     |
|-----|-------------------------------------------------|-----|
| 8-1 | 一般公式 ( <i>The general power formula</i> ) ..... | 267 |
| 8-2 | 基本對數式 .....                                     | 271 |
| 8-3 | 指數式 .....                                       | 275 |
| 8-4 | 基本三角式 .....                                     | 279 |
| 8-5 | 其他三角式 .....                                     | 284 |
| 8-6 | 反三角式 .....                                      | 290 |

---

|                                                                    |                     |     |
|--------------------------------------------------------------------|---------------------|-----|
| 8 - 7                                                              | 部分積分法 .....         | 294 |
| 8 - 8                                                              | 三角代入積分法 .....       | 302 |
| 8 - 9                                                              | 應用積分表求積分法 .....     | 306 |
| <b>第九章 偏導數及雙重積分 <i>Partial Derivative and Double Integrals</i></b> |                     |     |
| 9 - 1                                                              | 兩變數函數 .....         | 314 |
| 9 - 2                                                              | 三維中之曲線與曲面 .....     | 318 |
| 9 - 3                                                              | 偏導數 .....           | 325 |
| 9 - 4                                                              | 偏導數之應用 .....        | 330 |
| 9 - 5                                                              | 重積分 .....           | 335 |
| 9 - 6                                                              | 應用重積分求形心及轉動慣動 ..... | 343 |
| 附錄 A                                                               | 研習補助教材 .....        | 351 |
| 附錄 B                                                               | 幾何公式 .....          | 354 |
| 附錄 C                                                               | 表 .....             | 356 |
| 奇數習題答案                                                             | .....               | 366 |

## 第一章 平面解析幾何

### Plane Analytic Geometry

#### 1-1 引言 (Introduction)

在高中時代很多數理上問題，能以代數、幾何、解析幾何、三角等方法去解決它，但目前科學日新月異在大專工業技術課程上必須利用微積分去計算，並可以解決很多科學理論上重要問題。

本書可分為九章，第一章講解平面解析幾何，關於圓，拋物線，雙曲線，圖形及作法，本章之理論為後面之基礎。第二章至第五章為微分及積分原理並且涉及我們一般生活上問題之運用。第六章為三角函數及其反函數，為修習微積分者，最基本應該學習的課程。第七章為指數及對數微分法，第八章為積分之深入研究，第九章為偏微分及雙重積分。

#### 1-2 直角坐標 (Rectangular coordinates)

若一線段依一定方向，由其一端而量至另一端名謂有向線段，記為 $\overrightarrow{AB}$ ，在平面上自左向右劃一橫線，在此線上取一點 $O$ ，定此點為零，並稱為原點 (*Origin*)，自 $O$ 向右者為正，如有 $a$ 單位則此數值為 $a$ ，向左者為負，如 $a$ 單位則此數值為 $-a$ ，稱此水平線為橫軸 (*abscissa*)，亦稱 $x$ 軸 ( $x$ -axis)。同理在通過 $O$ 點自上而下作一縱線垂直於橫線，自 $O$ 點向上量為正，如有 $b$ 單位則該點上之數為 $b$ ，向下量為負，若有 $b$ 單位，則該點上之數為 $-b$ ，稱此垂直線為縱軸 (*Ordinate*)，或為 $y$ 軸 ( $y$ -axis) 此二軸分一平面為四部份。

第一部份名為第一象限 (*quadrants I*)

第二部份名為第二象限 (*quadrants II*)

第三部份名為第三象限 ( *quadrants III* )

第四部份名為第四象限 ( *quadrants IV* )

如圖 1-1

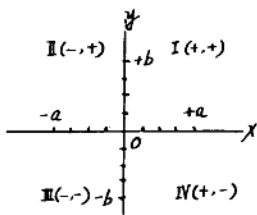


圖 1-1

### \* 練習 \*

1. 數目字九是整數，有理數及實數（因為  $9 = \frac{9}{1}$ ）， $6\pi$  是無理數

及實數， $\sqrt{-1}$  是虛數。

註：有理數（即一整數為另一整數除所得之數字代表者），無理數（不能用一整數被另一整數所除者，如  $\sqrt{2}$ ）。

2. 請將  $P(3, 5)$ ,  $Q(-2, 4)$ ,  $R(-1, -4)$ ,  $S(3, -2)$  畫在圖上。參

閱圖 1-2。

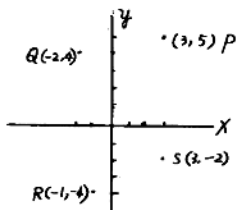


圖 1-2

3. 絕對值，已知數於任一軸上，其距原點之單位距離，稱為該數之絕對值，除零外，任意數絕對值為以  $|$  表於其旁。例  $|-2| = 2$ ， $|-6\pi| = 6\pi$ 。
4. 大於以  $>$  表之，小於以  $<$  表之，如  $-2 < 1$ 。

### ■ □ 習 題 一

1. 指出下列各數何者為整數，有理數，無理數，實數或虛數。

(a)  $\frac{5}{4}$     (b)  $-\pi$     (c)  $\sqrt{-4}$     (d)  $6\sqrt{-1}$     (e) 3

$$(f) 6 + \sqrt{2} \quad (g) \sqrt{7/3} \quad (h) \frac{7}{3}$$

2. 求下列各數之絕對值：

$$(a) 3 \quad (b) \frac{7}{2} \quad (c) -4 \quad (d) -(\pi/18) \quad (e) x \text{ (若 } x < 0 \text{)}$$

3. 於下列各對數目間，插入正確之不等式符號 ( $>$  或  $<$ )：

$$\begin{array}{llll} \text{數} & (a) 6 & 8 & (b) 7 & -5 & (c) \pi & -1 \\ & (d) -4 & -2 & (e) -\sqrt{2} & -9 & (f) 0.2 & 0.6 \end{array}$$

4. 繪出點  $A(2, 7)$ ,  $B(-1, -2)$ , 及  $C(-4, 2)$

5. 繪出點  $A(3, \frac{1}{2})$ ,  $B(-6, 0)$ , 及  $C(-\frac{5}{2}, -5)$

6. 繪出點  $A(1, 3)$ ,  $B(-1, -1)$  及  $C(6, 13)$ , 以線段連結各點，則所繪結果為何？

7. 橫坐標為 1 之所有點在何處？

8. 縱坐標為 -3 之所有點在何處？

9.  $y$  軸上所有點之橫坐標為何？

10.  $x$  軸上所有點之縱坐標為何？

11.  $x > 0$  之所有點在何處？

12. 標出  $x > 0$  及  $y < 0$  之所有點  $(x, y)$ 。

13. 標出  $x < 0$  及  $y > 1$  之所有點  $(x, y)$ 。

14. 標出  $|x| < 1$  之所有點。

15.  $y/x$  之比為正時，在何象限中？

16. 一矩形之三頂點為  $(5, 2)$ ,  $(-1, 2)$  及  $(-1, 4)$ 。則第四頂點之坐標為何？

17. 一等邊三角形之二頂點為  $(7, 1)$  及  $(2, 1)$ 。則第三頂點之橫坐標為何？

18. 2 秒後，某電路中之電流少於 3 安培。以  $t$  表時間， $i$  表電流。此可寫為「 $t > 2$  時， $i < 3$ 」，以  $x$  軸表  $t$  之值， $y$  軸表  $i$  值，試將上述情況，以陰影區域表出。（假定  $i > 0$ ）
19. 距光源不到 3 呎處之照明強度大於 8 流明，以  $x$  表距離， $y$  表照明強度，描出適當之陰影區域。

### 1-3 方程式之圖形 (The graph of an equation)

函數中變數係一符號  $x$  表某一數集中任何一數。此數集稱此符號  $x$  之變距 (Range)，在應用時變數之變距含有變數區間 (Interval) 之意義。

設  $x$  表實數集中之任一數， $a, b$  為定數， $x$  區間可分下列三種：

(a)  $a < x < b$  為開區間。(Open interval)

(b)  $a \leq x < b$  為半開區間。(Half open interval)

(c)  $a \leq x \leq b$  為閉區間。(Closed interval)

例：在方程式  $x^2 + y^2 = 1$  中，若  $x, y$  為實數，則  $x^2$  與  $y^2$  均應為正，且無大於 1 者，由原式  $x^2 = 1 - y^2$ ，因  $y^2 > 0$ ，故  $x^2 < 1$  或  $-1 < x < 1$ ，此時  $x$  之變距為一閉區間， $-1 \leq x \leq 1$ ， $y$  亦同樣為  $-1 \leq y \leq 1$ 。

設有變數  $x$  與  $y$ ，若  $x$  在變距內取任一數，變數  $y$  可按一定關係求一個或  $n$  個相應之數值，此種關係稱為函數，簡稱  $y$  為  $x$  之函數 (function)，並稱  $x$  為自變數  $y$  為因變數。

例：以 10 為底  $x$  之對數 ( $y = \log_{10} x$ )  $y$  為  $x$  之函數。

若一  $x$  值僅有一個  $y$  值與之對應，則稱  $y$  為  $x$  之單值函數 (Single-Valued function)，若  $y$  有  $n$  個數值對應於每一  $x$  值者，則稱  $y$  為  $x$  之多值函數 (Multi-Valued function)。

例：方程式  $y = x^2$  定  $y$  為實數  $x$  ( $-\infty < x < \infty$ ) 之單值函數，但

方程式  $y^2 = x$  定  $y$  為  $x$  ( $x > 0$ ) 之二值函數 (Double-Valued Function) 即  $y = \pm\sqrt{x}$ , 當  $x = 0$ ,  $y$  為  $x$  之單值函數。今詳舉例說明如下:

A. 方程式  $s = gt^2/2$  定數  $s$  為  $t$  之單值函數, 即任與一  $t$  值僅可得一相應之  $s$  值。(圖 1-3)

B. 方程式  $y = \pm\sqrt{x}$  定  $y$  為  $x$  之二值函數, 當  $x = 0$ ,  $y$  僅有一值 0,  $x$  之變距為  $x > 0$  之數集。(圖 1-4)

C. 方程式  $y^2 = \frac{1}{x}$  定  $y$  為  $x$  ( $x > 0$ ) 二值函數。(圖 1-5)

D. 方程式  $y = \log_{10} x$ , 定  $y$  為  $x$  ( $x > 0$ ) 之單值函數。(圖 1-6)

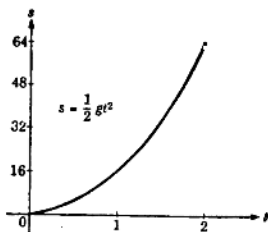


圖 1-3

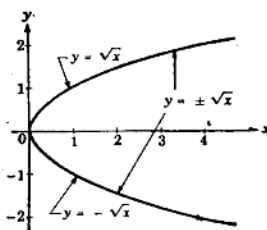


圖 1-4

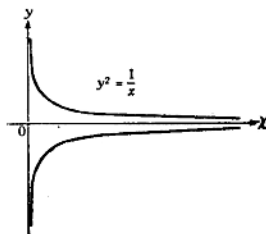


圖 1-5

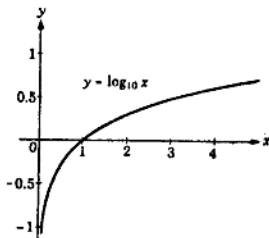


圖 1-6

## \* 練習 \*

A. 用圖表出  $y = 3x - 5$  之圖形。

若令  $x = 0$ ，則  $y = -5$ ，選  $x$  之另一值，例如  $x = 1$ ，則得  $y = -2$ ，繼續選取  $x$  之一些其他值，並以表列出，最後連接各點（如圖 1-7）。

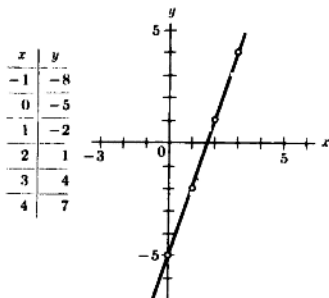


圖 1-7

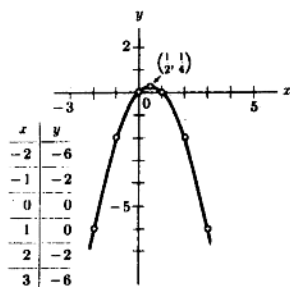


圖 1-8

B. 繪出方程式  $y = x - x^2$  之圖形。

繪表中諸點當注意  $x = 0$  及  $x = 1$ ， $y$  均為零，由於大多數普通曲線均為平滑，圖中突變，應加檢查， $x = 0$  與  $x = 1$  發生變化，試  $x = \frac{1}{2}$ ，發現  $y = \frac{1}{4}$ ，為應注意之點。（如圖 1-8）。

C. 繪方程式  $y = 2x^2 - 4$  之圖形。

先列表如所示者，做表發現  $+3$  與  $-3$ ，出現相同  $y$  值， $+2$  與  $-2$  出現之  $y$  值亦相同，而  $(+1)$  與  $(-1)$  亦如此，因  $(-x)^2 = x^2$  及  $(+x)^2 = x^2$  而得明瞭原因所在，此方程式圖形如圖（1-9）對稱  $y$  軸，意即曲線之右半部可視為左半部反射，反之亦然。

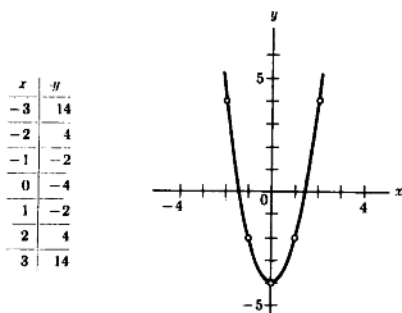


圖 1 - 9

D. 繪方程式  $y = (1 + \frac{1}{x})$  之圖形。

於此圖形上點時 (如圖 1 - 10) 若以  $x = 0$  試驗, 則  $y$  為不定數, 因為零所除為不定數, 雖然  $x$  不能為零, 但可取零附近之任何值, 因而選擇不能為零, 但可取零附近之任何值, 因而選擇  $-1$  與  $+1$  間之  $x$  值, 可得必須之點。

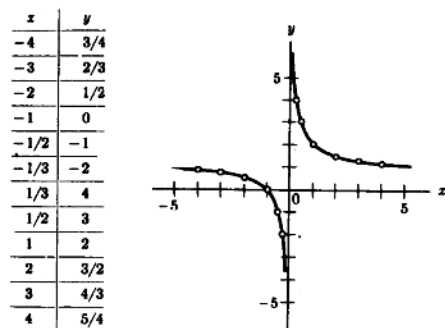


圖 1 - 10

E. 以負載電阻所表之電壓電源之功率，已知為：

$$P = \frac{100 R}{(0.5 + R)^2}$$

式中  $P$  之單位為瓦特， $R$  為歐姆，試以  $y$  方向表功率， $x$  方向表電阻，繪圖。

負值電阻無物理意義。祇需繪正值  $R$  對  $P$  之圖，乃得下表各值。

|     |     |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-----|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $R$ | 0   | 0.25 | 0.50 | 1.0  | 2.0  | 3.0  | 4.0  | 5.0  | 10.0 |
| $P$ | 0.0 | 44.4 | 50.0 | 44.4 | 32.0 | 24.5 | 19.8 | 16.5 | 9.1  |

取 0.25 及 0.50 為  $R$  之值，但發現  $R = 2$  時，較  $R = 1$  時之  $P$  值小。依此，可得一平滑而更為實用之曲線（見 1-11 圖）

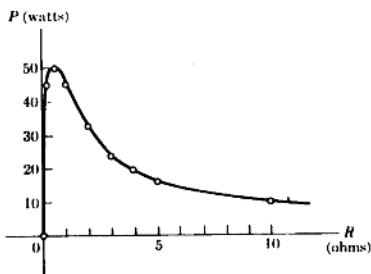


圖 1-11

## 習題二

繪 1-15 題方程式之圖形

1.  $y = 2x - 4$

2.  $y = \frac{1}{2}x - 2$

3.  $y = x^2$

4.  $y = 3 - x^2$

5.  $y = x^2 + 2x$

6.  $y = x^2 - 3x + 1$

7.  $y = 3x - x^3$

8.  $y = x^4 - 4x^2$

9.  $y = x + \frac{1}{x}$

10.  $y = \frac{1}{x^2}$

11.  $y = \sqrt{4 - x}$

12.  $y = \frac{1}{x + 2}$

13.  $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

14.  $y = \pm \sqrt{25 - x^2}$

15.  $y = \pm \sqrt{x^2 - 25}$

16. 關於以下各題方程式圖形之對稱，作何說明？

(a) 第 8 題，(b) 第 10 題，(c) 第 15 題。

17. 下列各題方程式之圖形有漸近線否？

(a) 第 7 題，(b) 第 10 題，(c) 第 12 題。

於 18 至 25 題中，繪已知方程式之圖形，當需要繪以第二變數  $B$  表第一變數  $A$  之圖形時，則以  $A$  為縱坐標， $B$  為橫坐標。

18. 一方體之表面積已知為  $A = 6e^2$ ， $e$  為立方體之邊，試以  $e$  表  $A$  繪圖。

19. 一物體之速度（呎 / 秒）受地心引力之影響，已知為  $v = v_0 - at$ 。設  $v_0 = 100$ ，及  $a = 32$  呎 / 秒<sup>2</sup>，試以  $t$ （秒）表  $v$  繪圖。

20. 將一組電阻串聯，其總電阻  $R_T$  為各個電阻之和。若一可變電阻  $R$  與 3 歐姆及 2 歐姆之電阻串聯。試以  $R$  表  $R_T$ ，繪圖。

21. 某光源之強度（流明）以離開光源之距離（厘米）表之，已知為  $I = 400/r^2$  繪以  $r$  表  $I$  之圖形。

22. 一有機液體之熱容量（卡路里 / 克）與溫度（ $^{\circ}\text{C}$ ）之關係方程式為  $c_p = 0.555 + 0.00113T$ ，溫度範圍為  $-40^{\circ}\text{C}$  至  $120^{\circ}\text{C}$ 。繪圖表明此方程式，不能滿足  $120^{\circ}\text{C}$  以上之實驗數值。以下列數據