普通高等教育"十一五"国家级规划教材

离散数学应用基础

席德勋　编著

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

离散数学应用基础

席德勋　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是一本基础与应用并重的教材，基础方面仅占六分之一，应用方面则着重于离散变换、离散最优化和离散映射.

本书内容分为6章. 第一章：离散数学基础. 第二章：离散变换. 第三章：离散分数变换. 第四章：离散状态空间. 第五章：离散最优化. 第六章：离散映射. 本书另有附录，且例题丰富、插图多，配有大量思考题，并附有思考题参考答案，以方便读者学习.

本书可作为理工类高等院校有关专业高年级学生（或研究生）的教材，也可供有兴趣者自学，或作为有关教师、科研人员和工程技术人员的参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

离散数学应用基础/席德勋编著. —北京：科学出版社，2009

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

ISBN 978-7-03-024777-3

Ⅰ. 离… Ⅱ. 席… Ⅲ. 离散数学-高等学校-教材 Ⅳ. O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第098055号

责任编辑：巴建芬 潘继敏/ 责任校对：李奕萱

责任印制：张克忠/封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年9月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2009年9月第一次印刷 印张：24

印数：1—4 000 字数：556 000

定价：38.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

离散数学以离散量作为研究对象，因而一切以离散现象作为研究对象的数学都属于离散数学. 当今正值数字化高速发展的时代，无论在科学研究中还是在经济建设中，信息的发送、传输、接收，计算机分析、处理、控制，都在向数字化迈进，因而离散数学显然是数字化应用的理论基础. 在数字时代，很有必要在高等院校的有关专业(应用物理、技术物理、工程物理类专业，信息处理、电子工程和自动控制类专业)中开设离散数学应用课程. 作为应用目的的教材，应当和作为基础范畴的教材(指离散数学)有相当大的区别，为此，在编写过程中，除了介绍必要的离散数学基础外(约占全书的六分之一)，大部分是介绍在离散变换、离散最优化、离散映射等方面的应用. 为了有效阅读本教材，要求读者具有微积分、微分方程、线性代数和复变函数等高等数学知识.

本教材在讲述离散数学基本概念的基础上，着重讲述离散数学在信息处理和工程控制中的应用，以使读者从"理论"范畴走向应用范畴. 为了能够用简便的方法解决一些实际问题，大量使用应用程序 MATLAB. 书中尽可能多用一些图示，并引入较多的例题和相当数量的思考题(包括 MATLAB 习题)，以帮助读者了解并熟悉本教材内容. 本教材中引用了 20 世纪 90 年代以来的众多参考资料，一方面增加读者的知识面，另一方面也便于读者查阅.

本教材共分 6 章. 第一章是离散数学基础，讲述一些在有关应用物理、信息处理、自动控制和计算机中涉及的离散数学的基本概念和方法：集合、关系和函数、图与应用图、离散数函数、递归、群、格和 Boole 代数以及函数空间. 第二章是离散变换，讲述各种离散 Fourier 变换和离散小波变换、采样过程和采样定理、Z 变换和 Z 域 Hilbert 变换. 第三章是离散分数变换，包括分数 Fourier 变换、分数 Laplace 变换和分数 Z 变换. 第四章是离散状态空间，状态空间分析是一种非常重要的方法，作为一个系统，用这种方法可以得到系统的全部特性，这里，也包括稳定性问题和状态观测及状态估计. 第五章是离散最优化，在变分法的基础上，讲述最大(最小)原理，线性调节器，最优状态估计(包括最优预测、滤波和平滑)，以及 Hilbert 空间中的最优化、Hardy 空间中的最优化和 Krein 空间中的状态最优估计. 第六章是离散映射，着重讲述多项式(实多项式和复多项式)映射，非线性映射：Julia 集、Mandelbrot 集. 另外有附录作为补充：连续 Fourier 变换、Laplace 变换、分数 Fourier 变换的几种定义、矩阵的广义逆、状态空间表示、Ляпунов 函数的构成方法、最优模态控制中的复极点移动方法和常用表.

当前科学技术发展极快，知识扩展呈爆炸状，如何使读者用较短的时间获得较多、较新的知识是一个非常重要的问题，本教材的内容安排正是以此为主导思想的. 作为一本理论性和应用性都比较强的教材，在内容的安排上，基础与应用尽可能衔接好，既要有一定的广度和深度，又要在应用方法方面着重一个"新"字(引入众多新的参考资料). 本教材尽可能做到讲思想、讲原理、讲方法、讲运用，在不脱离基础的前提下，本教材的大部分篇幅是离散数学的应用(超过 80%). 为了使适用范围更宽一些，在应用部分，各章都有

一部分内容较深、较新的材料，以适合本科生和研究生的不同需要(教师可选用). 有 * 的部分可作为对离散数学应用有兴趣者自学的内容或者作为研究生的教学内容.

便于学习是本教材追求的一个目的，因而书中的例子和插图相当多(共 183 例、116 图)且每章都有相当数量的思考题(共 213 题).

由于本教材的编写目的、内容安排都是一种尝试，加之编者的知识和水平有限，不当与错误之处，敬请读者批评指正.

作　者

2009 年 3 月 2 日

目　录

第一章　离散数学基础

离散数学是研究离散对象的数学，特别是在数字化时代，计算机在社会活动的各个领域中大量应用，使离散数学显得格外重要．本章仅论述一些有关离散数学的基本概念，作为离散数学应用的基础.

第一节　集　　合

集合论属于纯粹数学，作为离散数学的基础，本节仅简单论述一些关于集合的基本概念.

一、集合定义

一个**集合**，就是一些不同对象的总合，通常用大写英文字母表示，其中的对象称为集合中的**元**，一般用小写英文字母表示．若 a 是集合 A 中的元，用$a\in A$表示；若 a 不是集合 A 中的元，则用 $a\notin A$ 表示.

例 1　由自然数构成一个集合，叫做**自然数集**，用 N 表示；所有整数构成一个集合，叫做**整数集**，用 Z 表示；所有实数构成一个集合，叫做**实数集**，用 R 表示；所有复数构成一个集合，叫做**复数集**，用 C 表示；所有有理数构成一个集合，叫做**有理数集**，用 Q 表示.

集合可以用符号来表示，集合中的元没有顺序．集合定义应当包含**空集**(即不包含元的集合)，该集合记为$\varnothing$．某一些集合可能是另一个集合的元.

例 2　符号$\{a,b,c\}$表示由对象 a、b 和 c 组成的集合，由于集合中的元没有顺序，$\{a,b,c\}$和$\{b,c,a\}$表示同一个集合.

例 3　集合$\{\{a,b,c\},d\}$包含了$\{a,b,c\}$和 d 两个元，集合$\{\{a,b,c\},a,b,c\}$包含了$\{a,b,c\}$、a、b 和 c 四个元，集合$\{\{\{\{a\}\}\},\{\{a\}\},\{a\},a\}$由四个不同的集合$\{\{\{a\}\}\}$、$\{\{a\}\}$、$\{a\}$和 a 构成.

例 4　集合$\{\varnothing\}$仅包含一个元，而集合$\{\{\varnothing\},\varnothing\}$则包含两个元，其中一个是空集，另一个是以空集为其唯一元的集合.

通常一个集合可表示为

$$S=\{x\mid x\text{ 具有某些性质}\} \tag{1-1-1}$$

给定两个集合 A 和集合 B，若集合 A 的每个元也是集合 B 的元，则 A 为 B 的**子集**，用$A\subseteq B$ 表示．对任意集合 A，空集是一切集合的子集，在这种意义上，它是"最小"的集合，但$\{\varnothing\}$不是$\{\{\varnothing\}\}$的子集．集合 A 和集合 B 包含的元相同，这两个集合称为相等，记为$A=B$．若 $A\subseteq B$，但 A 不等于 B，称 A 是 B 的**真子集**，记为$A\subset B$.

二、集合的基本运算规律

集合可以用组合(或运算)的方式产生.

1. 并运算

集合 A 和集合 B 的**并**是一个集合，其元是 A 的元或是 B 的元或同时是 A 和 B 的元，该集合称为**并集**，以 $A\cup B$ 记之，运算 $\cup$ 称为并运算. $A\cup B$ 和 $B\cup A$ 表示同一个集合. n 个集合 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$ 的并也是一个集合，记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，它包含了构成该集合的各个集合 $A_i(i=1,2,3,\cdots,n)$ 的元. 并运算是可以交换和结合的: $A\cup B=B\cup A$, $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

例 5 集合 $\{a\}\cup\{b,c,d\}=\{a,b,c,d\}$, $\{a,b\}\cup\{\varnothing\}=\{a,b\}$, $\{a,b\}\cup\{\{a,b\}\}=\{a,b,\{a,b\}\}$ 等是并集.

2. 交运算

集合 A 和集合 B 的**交**也是一个集合，其元同属于 A 和 B 的元，该集合称为**交集**: $A\cap B$, 运算 $\cap$ 称为交运算. $A\cap B$ 和 $B\cap A$ 表示同一个集合. n 个集合 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$ 的交也是一个集合，它包含同时属于集合 $A_i(i=1,2,3,\cdots,n)$ 的元，记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$. 交运算也是可以交换和结合的: $A\cap B=B\cap A$, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

例 6 集合 $\{a,b\}\cap\{b,c\}=\{b\}$, $\{a,b\}\cap\{d,c\}=\varnothing$(表示两集合不相交), $\{a,b\}\cap\varnothing=\varnothing$ 等都是交集.

对任意集合 A、B 和 C，集合 $C\cap(A\cup B)$ 和集合 $(C\cap A)\cup(C\cap B)$ 相等.

证明 若令 x 是集合 $C\cap(A\cup B)$ 中的任意一个元，它一定在 C 中，也一定在 A 或 B 中. 如果它在 A 中，则也一定在 $C\cap A$ 中;如果它在 B 中，则也一定在 $C\cap B$ 中. 如果元 x 在 $(C\cap A)\cup(C\cap B)$ 中，则 $C\cap(A\cup B)$ 是 $(C\cap A)\cup(C\cap B)$ 的子集. 若令 x 是集合 $(C\cap A)\cup(C\cap B)$ 的任意元，因而 x 一定在 $C\cap A$ 或 $C\cap B$ 中，于是集合 $(C\cap A)\cup(C\cap B)$ 是 $C\cap(A\cup B)$ 的子集，这样 $C\cap(A\cup B)$ 就和 $(C\cap A)\cup(C\cap B)$ 相等.

不难证明，对任意集合 A、B 和 C，集合 $C\cup\cap(A\cap B)$ 和 $(C\cup A)\cap(C\cup B)$ 相等. 按照上述证明方法，可以做推广

$$C\cap(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=(C\cap A_1)\cup(C\cap A_2)\cup\cdots\cup(C\cap A_n)$$
$$C\cup(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)=(C\cup A_1)\cap(C\cup A_2)\cap\cdots\cap(C\cup A_n) \tag{1-1-2}$$

式(1-1-2)称为**分配律**.

3. 补运算

两个集合 A 与 B 的差也是一个集合，以 $A-B$ 记之，运算“$-$”称为补运算，它由在集合 A 中而不在集合 B 中的那些元组成. 由此可见，若 B 的元有某种性质，则 $A-B$ 就是 A 中那些没有这种性质的元的集合，因而称 $A-B$ 是 B 关于 A 的**补集**，简称 B 的补集.

例 7 集合 $\{a,b,c\}-\{a,d\}=\{b,c\}$, $\{a,b,c\}-\{e,d\}=\{a,b,c\}$ 是补集.

4. 对称差运算

两个集合 A 与 B 的**对称差**也是一个集合，记作 $A\oplus B$，运算 $\oplus$ 称为对称差运算，它

由在 A 中而不在 B 中与在 B 中而不在 A 中的那些元构成，即

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) \tag{1-1-3}$$

从对称差的表示和并运算以及交运算满足的规律可知，它满足**交换律**、**结合律**和分配律.

例 8 $\{a,b\}\oplus\{b,c\}=\{a,c\}$，$\{a,b\}\oplus\varnothing=\{a,b\}$，$\{a,b\}\oplus\{a,b\}=\varnothing$是对称差.

5. 积运算

设有 A、B 两个集合，它们的**直积**构成积集 $A\times B$（直积也称 **Descartes 积**，直积运算以$\times$表示），乃所有如(a,b)那样的有序对. 这里，用符号(a,b)表示有序对，第一个对象是 a，第二个对象是 b. 在有序对中，对象的次序十分重要，但两个对象可以不同，也可以是相同的集合$(a\in A,b\in B)$：$A\times B=\{(a,b):a\in A,b\in B\}$. 这表明两个集合的元都要分别相乘，才构成积集，如果集合 A 和 B 分别有 α 和 β 个元，它们的积集则有 $\alpha\beta$ 个元.

Descartes 积有如下基本性质：

(1) $A\times B\neq B\times A$（除非 A 和 B 都是空集，或者 $A=B$），说明不满足交换律.

(2) $(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$（除非 A、B 和 C 都是空集），说明不满足结合律.

(3) 若 $A\times C=B\times C$，不能推断出 $A=B$，说明不满足**消去律**；

(4) 满足四种分配律

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$
$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$
$$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$$
$$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$$

上面所讲述的某些关系，可以用图 1-1-1 表示，其中画出了并、交、补和对称差四种运算.

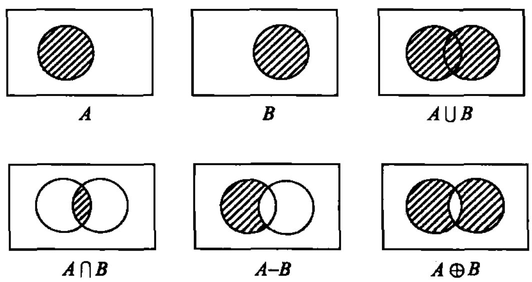


图 1-1-1　某些集合的组合

三、有限集合和无限集合

一个集合，其中不同元的个数表示了该集合的大小，这种有限的个数表明该集合是**有限集合**，为此，给出有限集合的定义：如果一个集合的元与某一集合的 n 个元之间存在着一一对应关系，其中 $n\in N$，则该集合称为有限集合，n 称为该集合的**基数**. 对一给定的集合 A，可以定义 A^+ 是 A 的**后继**，于是，A^+ 就是 $A\cup\{A\}$，意思是 A^+ 由 A 的所有元和一个追加的元 A 所构成的集合.

例 9 空集$\varnothing$（0 号）的后继是$\{\varnothing\}$（1 号），而$\{\varnothing\}$的后继是$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$（2 号），$\{\varnothing$，

$\{\varnothing\}\}$的后继是$\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$(3号),等等.

用上述方法所构成的越来越多的后继可以依次编号. 显然，$1=0^+$，$2=1^+$，$3=2^+$，$\cdots$. 因此可以定义集合N(自然数)，使得N包含集合0，若n是N的元，则n^+也是N的元，且N不包含其他的元. 看来N不是一个有限集合，因此一个集合不是有限集合，就称为**无限集合**. 如果一个集合的元与N的元一一对应，此集合就叫做可数无限集合(即集合的基数是可数无限的).

例 10 所有自然数的集合是可数无限集合，所有非负偶数的集合是可数无限集合，所有正整数集合也是可数无限集合.

包含与排斥原则. 对有限集合A，可以用$|A|$表示该集合的基数，于是

$$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2| \tag{1-1-4}$$

成立.

证明 注意到集合A_1和集合A_2可以有公共元，其个数是$|A_1\cap A_2|$的个数，它们中的每一个都在$|A_1|+|A_2|$中各计算了两次，因此必须扣除，于是式(1-1-4)成立. 若有三个集合A_1、A_2和A_3，仿照两个集合的情形，应当有

$$\begin{aligned}|A_1\cup A_2\cup A_3|=&|A_1|+|A_2|+|A_2|-|A_1\cap A_2|\\&-|A_2\cap A_3|-|A_3\cap A_1|+|A_1\cap A_2\cap A_3|\end{aligned} \tag{1-1-5}$$

如果有$A_i(i=0,1,\cdots,n)$个集合，则按上述方法，可以得到

$$\begin{aligned}|A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n|=&\sum_i|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|\\&+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots\\&+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_n|\end{aligned} \tag{1-1-6}$$

式(1-1-6)称为包含与排斥原则.

第二节 函数与关系

若集合S中全体元都是有序的$n(n\geqslant 2)$元组，则称S为n元关系. 在$n=2$时，称为**二元关系**. 二元关系(用R表示)是表示集合A中某些元和集合B中某些元相关的形式，直积$A\times B$的任何子集均称为A到B的二元关系. 若**有序对**(a,b)在R中，就说元a相关于元b. 构成R的一切有序对的第一元构成的集称为R的**定义域**，第二元构成的集为R的**值域**.

例 1 直积$\{a,b,c\}\times\{d,e\}=\{(a,d),(a,e),(b,d),(b,e),(c,d),(c,e)\}$表明从集合$A$到集合$B$的一个二元关系，它是$A\times B$的一个子集. 对二元关系，用图来表示，相当方便.

例 2 两个集合$A=\{a,b,c,d\}$和$B=\{\alpha,\beta,\gamma\}$的关系图画在图 1-2-1 中，由表示关系的箭头看到，其中只有五个二元关系，记为$R=\{(a,\alpha),(b,\gamma),(c,\gamma),(c,\alpha),(d,\beta)\}$，它是从$A$到$B$的二元关系. 该二元关系是有序对的集合，若令$R_1$和$R_2$是从$A$到$B$的两个二元关系，则$R_1\cap R_2$，$R_1\cup R_2$，$R_1\oplus R_2$以及$R_1-R_2$也是从$A$到$B$的二元关系，分

别称为 R_1 和 R_2 的交、并、对称差和差.

上述关系可以推广到集合 A、B 和 C 间的三元关系，在形式上，定义**有序三重元**为一个有序对 $((a,b),c)$，它的第一个分量也是一个有序对，于是集合 A、B 和 C 间的一个三元关系是集合 $A\times B$ 和 C 的 Descartes 积 $(A\times B)\times C$ 的一个子集.

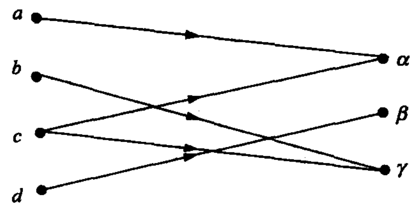


图 1-2-1　二元关系图

例 3　令 $A=\{\alpha,\beta\}$，$B=\{\gamma,\delta\}$ 和 $C=\{\mu,\nu\}$，则有

$$\begin{aligned}(A\times B)\times C=\{&((\alpha,\gamma),\mu),((\alpha,\gamma),\nu),((\alpha,\delta),\mu),((\alpha,\delta),\nu),\\&((\beta,\gamma),\mu),((\beta,\gamma),\nu),((\beta,\delta),\mu),((\beta,\delta),\nu)\}\end{aligned}$$

与上述定义方法相似，定义一个有序对 $(((a,b),c),d)$ 是一个**有序四重元**，它有两个分量，第一个分量是有序三重元 $((a,b),c)$，第二个分量只是一个元 d. 于是集合 A、B、C 和 D 间的一个四元关系定义为 $((A\times B)\times C)\times D$ 的一个子集. 如果推广至有序 n 重元，则可以定义一个有序对，其第一个分量是一个有序 $n-1$ 重元. 集合 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$ 间的一个 n 元关系，定义为集合 $(\underbrace{(\cdots}_{n-2}(A_1\times A_2)\times A_3)\times\cdots\times A_{n-1})\times A_n$ 的一个子集.

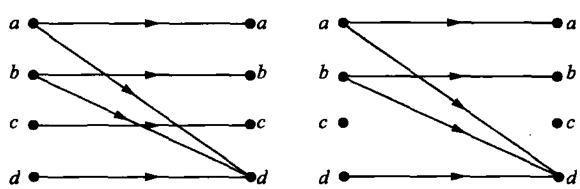
一、二元关系的基本性质

1. 自反

从集合 A 到 A 的二元关系，称为 A 上二元关系. 设 R 是 A 上的二元关系，若 A 中每一个元 a，(a,a) 都在二元关系 R 中，则称 R 是**自反关系**. 对在自反关系中，A 的每一个元都与其自身相关.

例 4　定义正整数集合 A 上的二元关系 R，当且仅当 a 整除 b 时，(a,b) 属于 R. 由于一个整数一定能够整除自身，所以 R 也是自反关系.

但要注意，如果在例子中规定当且仅当 $a>b$ 时，(a,b) 才属于 R，则 R 不是自反关系. 二元关系 R 也可以用图来表示，图 1-2-2 是以图的形式表示自反和非自反情形，图(a)是自反情形，图(b)是非自反情形.



(a) 自反关系　　(b) 非自反关系

图 1-2-2

2. 对称与反对称

令 R 是 A 上的二元关系，假如由有序对 (a,b) 属于 R 而能够推出有序对 (b,a) 也属于 R，则 R 是对称的二元关系.

例 5　有集合 $A=\{a,b,c\}$，存在关系 $X=\{(a,a),(b,b)\}$，$Y=\{(a,b),(b,a)\}$ 和 $Z=$

$A\times A$，显然它们都是对称的二元关系.

令 R 是 A 上的二元关系，如果有序对 (a,b) 属于 R，设除 $a=b$ 外，可以推断有序对 (b,a) 不在 R 中，则称 R 为反对称二元关系. 假定 (a,b) 和 (b,a) 都在 R 中，则必有 $a=b$.

例 6　A 是正整数集合，R 是 A 上的二元关系，当且仅当 $a\geqslant b$ 时，(a,b) 属于 R，则 R 是一个反对称二元关系.

	a	b	c	d
a	L	0	0	L
b	0	L	0	L
c	0	0	L	0
d	0	0	0	L

(a)

	a	b	c	d
a	L	0	0	L
b	0	L	0	L
c	0	0	0	0
d	0	0	0	L

(b)

图 1-2-3　图 1-2-2 的表的形式

要判断二元关系是否对称，可以从表的形式来观察，实际上它和图的形式相同，只要判断对主对角线是否对称就能确定二元关系的对称性. 图 1-2-3 是图 1-2-2 的表的形式，不难看出，图(a)中主对角线都有 L，这种二元关系是自反的、反对称的；图(b)是非自反的、反对称的.

例 7　若有集合 $A=\{a,b,c\}$，令 $S=\{(a,a),(b,b)\}$，$N=\{(a,b),(a,c),(c,a)\}$ 是 A 上的两个二元关系，则 S 既是自反的又是反对称关系，而 N 则两者都不是.

3. 传递

若 R 是 A 上的一个二元关系，如果由 (a,b) 和 (b,c) 都在 R 中可以推断 (a,c) 也在 R 中，则称 R 为**传递关系**. 设 $A=\{a,b,c\}$，$X=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,c)\}$ 是传递关系，$Y=\{(a,b)\}$ 也是传递关系，但 $Z=\{(a,b),(b,c)\}$ 不是传递关系. 如果 R 是 A 上的二元关系，R 的**传递扩张**是 A 上的二元关系 R_1，使 R_1 包含 R，且若有序对 (a,b) 和 (b,c) 都在 R 中，则 (a,c) 在 R_1 中.

例 8　图 1-2-4 是一个例子，设 $A=\{a,b,c,d\}$，其二元关系 R 为图(a)，显然 (a,b) 和 (b,c) 以及 (b,c) 和 (c,d) 都在 R 中，(a,c) 和 (b,d) 应当在 R_1 中，于是图(b)为图(a)的传递扩张. 按照传递扩张的做法，一定可以得到传递**闭包** R° 图(c)（传递闭包定义为各传递扩张的并：$R^{\circ}=R_1\cup R_2\cup R_3\cup\cdots$）.

	a	b	c	d
a	0	L	0	L
b	0	0	L	0
c	0	L	0	L
d	0	0	0	0

(a) R

	a	b	c	d
a	0	L	L	L
b	0	0	L	L
c	0	L	0	L
d	0	0	0	0

(b) R_1

	a	b	c	d
a	0	L	L	L
b	0	L	L	L
c	0	L	L	L
d	0	0	0	0

(c) R°

图 1-2-4　二元关系、传递扩张和传递闭包

4. 等价

一个集合上的二元关系是自反的、对称的和传递的，则称之为**等价关系**.

一个集合 A 的一个划分是集合 A 的非空子集的集合，用$\{A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n\}$表示，这种划分使这些非空子集(称为**块**)$A_i$ 的并等于 A，且对任意两个不同的子集 A_i 和 A_k 的交是空集($i\neq k$). 由集合 A 上的一个等价关系，可以确定 A 的一个划分，使同一块中的任意两元都是相关的，而不同块中的元则是不相关的，这种划分中的块称为**等价类**.

例 9 图 1-2-5 是一等价关系，其中集合 $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$，R 是 A 上的一个二元关系，从各元的关系来看，该二元关系 R 显然是自反的、对称的和传递的.

	a	b	c	d	e	f	g
a	L	L	0	0	0	0	0
b	L	L	0	0	0	0	0
c	0	0	L	L	L	0	0
d	0	0	L	L	L	0	0
e	0	0	L	L	L	0	0
f	0	0	0	0	0	L	L
g	0	0	0	0	0	L	L

图 1-2-5　等价关系实例

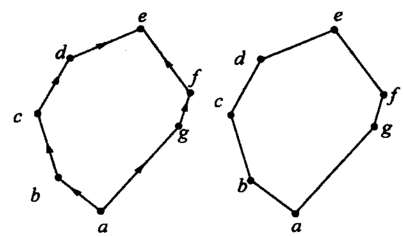
5. 偏序

如果一个二元关系是自反的、反对称的和传递的，则称其为**偏序关系**.

例 10 图 1-2-6(a)是一个表，在主对角线上，有七个 L，因而是自反的. 在主对角线的上方和下方，各有几个 L，这些 L 对主对角线是反对称的，且有传递关系，所以该二元关系是偏序关系. 前面曾说明过由集合 A 到集合 B 的二元关系可以用图表示，因而在本例中也可以用图来表示二元关系. 这里用简化的方法来画出二元关系图:黑点表示元，箭头表示 R 中的有序对(图 1-2-6(b)). 如果所有的箭头方向都一致，则箭头都可省去，这种表示偏序关系的图称为 **Hasse 图**(图 1-2-6(c)).

	a	b	c	d	e	f	g
a	L	L	L	L	L	L	L
b	0	L	L	L	L	0	0
c	0	0	L	L	L	0	0
d	0	0	0	L	L	0	0
e	0	0	0	0	L	0	0
f	0	0	0	0	L	L	0
g	0	0	0	0	L	L	L

(a) 表



(b) 图　　(c) Hasse图

图 1-2-6　偏序关系的表与图

一个集合 A 和在 A 上的一个偏序关系 R 一起称为**偏序集**，用(A, R)表示. 一个具体的偏序关系，通常用符号$(A, \leqslant)$表示.

二、链与反链

设$(A, \leqslant)$是一个偏序集，若集合 A 的一个子集中任意两个元都相关，则称此子集为一条**链**，链上元的个数叫做该链的长度. 若集合 A 的一个子集中任意两个不同的元都不相关，则称此子集为一条**反链**.

例 11 在图 1-2-6 的表和图中，不难看出$\{a,b,c,d,e\}$、$\{a,b,c,d\}$、$\{a,g,f,e\}$、$\{b,c,d,e\}$、$\{a,b,c\}$、$\{a,b,d\}$、$\{a,b,e\}$、$\{a,c,d\}$、$\{a,c,e\}$、$\{a,d,e\}$、$\{a,g,f\}$、$\{a,g,e\}$、$\{g,f,e\}$、$\{a,b\}$、$\{b,c\}$、$\{c,d\}$、$\{d,e\}$、$\{a,g\}$、$\{g,f\}$、$\{f,e\}$和$\{a\}$等都是链，$\{b,g\}$、$\{b,f\}$、$\{c,g\}$、$\{c,f\}$、$\{d,g\}$、$\{d,f\}$和$\{a\}$等都是反链. 显然，可用符号 $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant e$ 和

$a \leqslant g \leqslant f \leqslant e$ 来表示有序对 $a \leqslant b, b \leqslant c, c \leqslant d, d \leqslant e, a \leqslant c, a \leqslant d, a \leqslant e, b \leqslant d, b \leqslant e, c \leqslant e$ 和 $a \leqslant g, g \leqslant f, f \leqslant e, a \leqslant f, a \leqslant e, g \leqslant e$.

如果 A 是一条链，则偏序集$(A, \leqslant)$称为**全序集**，这时，二元关系$\leqslant$叫做**全序关系**.

在一个偏序集$(A, \leqslant)$中，有元 a，不存在任意元 $b \neq a$，使 $a \leqslant b$，则 a 叫做**极大元**；反之，不存在任意元 $b \neq a$，使 $b \leqslant a$，则 a 叫做**极小元**. 若有元 a、b、c，存在二元关系 $a \leqslant c$，$b \leqslant c$，则称 c 为 a 和 b 的**上界**；反之，若 $c \leqslant a$，$c \leqslant b$，则称 c 为 a 和 b 的**下界**. 在一个偏序集中，有多个元，一些元的上界不止一个，因而存在**最小上界**；同样，它们的下界也不止一个，因而存在**最大下界**.

设$(A, \leqslant)$是一个偏序集，最长链的长度为 n，则 A 中的元可划分成 n 条不相交的反链.

证明 假定 $n=1$，A 中任意两个元都不相关，A 中所有元组成一条反链. a 是 A 中极大元(A 中不存在任意元 b，且 $a \leqslant b$，a 为极大元)的集合(该集合可以只有一个元)，M 是一条非空的反链. 偏序集$(A-M, \leqslant)$，因为在 $A-M$ 中不存在长度为 n 的链，所以其最长链的长度最多为 $n-1$. 如果 $A-M$ 中存在最长链的长度小于 $n-1$ 的情形，则 M 中一定有两个或两个以上的元在同一条链上，这是不可能的. 由于 M 是一条反链，A 可以划分成 n 条不相交的反链.

例 12 在图 1-2-6(a)中，集合 A 有七个元，它们构成的表显然是反对称的，是自反的，且为传递的. 最长链的长度等于 5，因而有五条不相交的反链，但是反链的取法非唯一，从图中看出，由构成最长链的五个元，可以将它划分成五个不相交的子集(它们的并就是 A)，因而形成五条互不相交的反链. 在图 1-2-6(b)中的划分，有三种取法：$\{a\}$、$\{b, g\}$、$\{c\}$、$\{d, f\}$和$\{e\}$；$\{a\}$、$\{b\}$、$\{c, g\}$、$\{d, f\}$和$\{e\}$；$\{a\}$、$\{b, g\}$、$\{c, f\}$、$\{d\}$和$\{e\}$.

第三节　图与应用图

一张**无向图** G，定义为一个有序对(V, E)，V 是一个集合，E 是 V 中两个元的**多重集**的集合(例如，$G=(\{a,b,c,d\},\{\{a,b\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,c\}\})$). 一张无向图在几何上可以表示为**顶点**(也叫**标号点**)的集合 V 和点对之间的连线集合 E. 一张**有向图**定义为一个有序对(V, A)，其中 V 是顶点集合，A 是连接于点对间的箭头集合，A 是 V 上的二元关系. A 中的有序对称为有向图的**边**，边关联于连接它的顶点.

一个顶点若无任何边关联它，则称之为**孤立顶点**.

例 1 图 1-3-1 中有两类图，一类是有向图(图 1-3-1(b))，在顶点间的连接是有方向的，另一类是无向图(图 1-3-1(a))，其连接不表明方向. 在图 1-3-1(b)中，称有序对(a, b)外关联于顶点 a 而内关联于顶点 b(边由顶点 a 出发到顶点 b)，而图中顶点 c 乃孤立顶点.

一张图的顶点个数称为该图的**阶数**，连接同一对顶点的边数称为边的**重数**. 若一条边的外关联顶点与内关联顶点相同，则称它是一个**环或者回路**. 若两顶点间有边相连，则称此两顶点**相邻**.

例 2 图 1-3-1(b)中的边(c, c)和(d, d)都是环. 图 1-3-1(b)中边(a, b)的顶点 a 外相邻于顶点 b，而顶点 b 内相邻于顶点 a，其中各希腊字母表示各处的**权**.

若两张图的顶点与顶点之间、边与边之间都一一对应，且它们的关联关系也保持对应关系，则称此两图为**同构**的(形状是否相同无关紧要). 令 $G=(V,E)$ 是一张图，V'是 V 的子集，E'是 E 的子集，且使 E'中的边仅与 V' 中的顶点相关联，则称 $G'=(V',E')$是 G 的**子图**. 若 G 的子图包含G 的所有顶点，则称其为 G 的**生成子图**. 子图 $G'=(V',E')$相对于 G 图的**补图**是另一张图 $G''=(V'', E'')$，使 $E''=E-E'$，而 V''仅包含与 E''中的边相关的顶点.

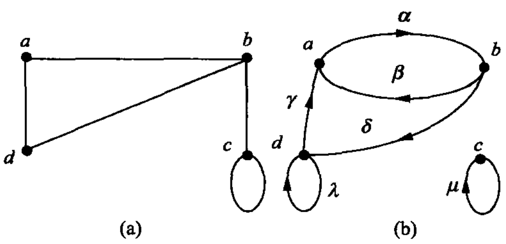


图 1-3-1　无向图和有向图

例 3　图 1-3-2 是说明上述关系的例子(图 1-3-2(a)有八个顶点、十条边)，其中图(c)是子图(不是生成子图!)，图(d)是其补图. 对同构、子图和补图而言，有向图和无向图在做法上都相同.

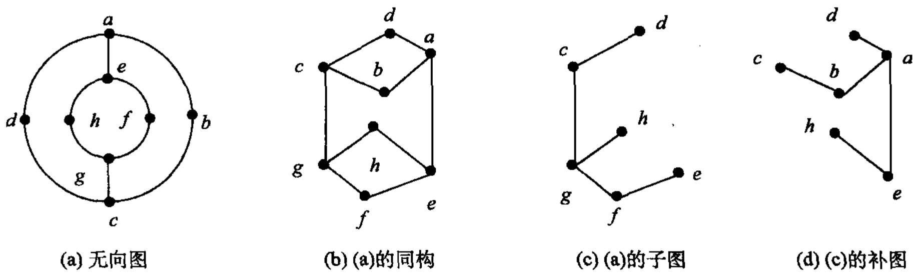


图 1-3-2

一、通路与回路

在有向图中，一条通路就是边的一个序列$(e_1,e_2,e_3,\cdots,e_n)$，对一切 $1\leqslant i\leqslant n-1$，使边 e_j 的终点与边 e_{j+1}的始点重合. 一条通路的每一条边都不重复出现，称其为**简单通路**，如其每一顶点都不重复出现，则称之为**初等通路**. 一张无向图的任意两个顶点之间都有**通路**存在，称该两顶点是连通的，否则是不连通的. 若图 G 中每对不同顶点间都存在通路，则称该图为**连通图**，否则是不连通图；一张有向图，在略去边的方向而得到的无向图是连通的，则称此有向图是连通的，否则是不连通的. 一个**回路**是首尾相接的一条通路$(e_1,e_2,e_3,\cdots,e_n)$，这里终点 v_n 和起点 v_1 重合(即 $v_n=v_1$). 若一个回路中的边不重复出现，称此回路为**简单回路**，其顶点不重复出现，则称此回路为**初等回路**. 回路以及回路的**直和**统称**环路**，环路也就是回路.

一张**赋权图**可以定义为一个有序四重元(V,E,f, g)或有序三重元(V,E,f)，其中 V 是顶点的集合，E 是边的集合(边的权，称为该边的长度)，f 是定义域上 V 的函数，g 是在定义域 E 上的函数. 函数 f 将权分配给顶点，函数 g 将权分配给每一条边. 权可以是数字、符号或某个量，例如，图 1-3-1(b)中各边上所注的希腊字母，就是各边的权，图中的**自环**(首尾相接的一条边形成自环，也就是最简单的回路)也有权.

二、Euler 图和 Hamilton 图

在一张连通的无向图中，通过图中每条边一次且仅一次的通路称为 **Euler 通路**，它是经过所有边的简单通路，且是**生成通路**(经过所有顶点的通路，顶点可以重复经过)．通过图中每条边一次且仅一次的回路称为 **Euler 回路**，也称**简单生成回路**．具有 Euler 回路的图叫做 **Euler 图**；具有 Euler 通路而无 Euler 回路的图叫做**半 Euler 图**．图 1-3-3 是 1936 年 Euler 研究过的德国 Konigsberg 的 Pregel 河上七座桥一次走过而不能重复通过的问题，他的结论是该问题不能实现．图中点 A 和点 B 代表河中的两个小岛，点 C 和点 D 代表河的两岸，七条边代表七座桥，显然不存在 Euler 通路和 Euler 回路，所以该图既非半 Euler 图，也非 Euler 图．

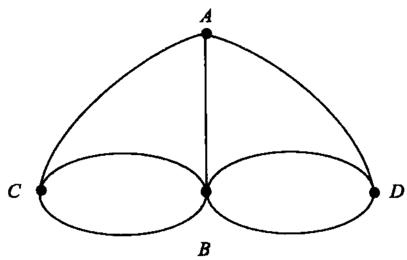


图 1-3-3　Konigsberg 桥

为了判定一张图是否存在 Euler 通路或者 Euler 回路，可以从顶点和边的关系着手．一个顶点的**度数**是关联于该顶点的边的数目，在计算和每一条边相关的两个顶点的度数时，该边在这两个顶点上各计算了一次．于是，在一张图中，各顶点的度数之和等于图中边数目的两倍，因而度数为奇数的顶点个数一定是偶数．当一张图有 Euler 通路时，它是连通的．在沿 Euler 通路走时，每通过一个顶点，必定经过与之相关联的以前没有经过的两条边，所以除了这条通路的两个端点外，其余每一个顶点的度数一定是偶数．如果通路的两个端点不同，则它们是仅有的两个度数为奇数的顶点．若两端点重合，图中就没有度数为奇数的顶点，于是，Euler 通路就变成 Euler 回路．

例 4　图 1-3-4 是 Euler 通路和 Euler 回路的例子．图 1-3-4(a)有 Euler 通路，它是连通的，在六个顶点中，顶点 c 和 e 的度数是奇数，因而该图有 Euler 通路，它应当从顶点 c 出发，最后到顶点 e，可以按通路 $c\to e\to f\to b\to a\to f\to d\to c\to b\to d\to a\to d\to e$ 行走，行走的通路并非唯一，但是它没有 Euler 回路，因而该图是半 Euler 图．图 1-3-4(b)也是连通的，但是没有度数为奇数的顶点，所有六个顶点的度数都是偶数，所以该图应该有 Euler 回路，因而该图是 Euler 图．试从顶点 a 出发，若按通路 $a\to b\to d\to c\to b\to f\to e\to c\to a\to e\to d\to f\to a$ 行走，可以得到 Euler 回路，行走的通路也非唯一，而且可以从任意顶点出发．

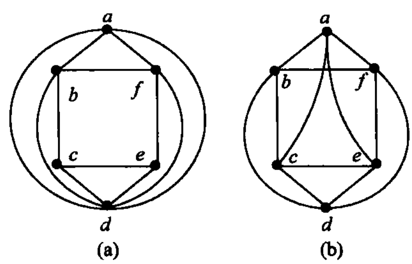


图 1-3-4　Euler 通路和 Euler 回路

在 Euler 通路和 Euler 回路中，顶点可以重复通过．有一种通路和回路，称为 **Hamilton通路**和 **Hamilton 回路**，它们是通过图中每个顶点的次数恰好只有一次的通路和回路．凡具有 Hamilton回路的图称为 **Hamilton 图**；凡具有 Hamilton 通路而不具有 Hamilton 回路的图叫做半 **Hamilton 图**．

例 5　在图 1-3-5 中，20 条首尾相连的粗线(边)经过所有的顶点，而且每个顶点只