王后雄学案

教材完全解读

总策划：熊　辉

6大奇迹引发学考革命
推动学习模式全面升级

国际首创　同步突破
考向指引　典例导思
考试工具　核心预测

数学　九年级(下)

配人课版

丛书主编：王后雄
本册主编：王　飞

小熊图书
中国青年出版社

王后雄学案

教材完全解读

总策划：熊　辉

数学　九年级(下)

配人课版

丛书主编：王后雄
本册主编：王　飞
副 主 编：徐杏平
编　　委：徐杏平　吴　浩　石红英　李小妹　孙　瑾　胡明高　吴　萍　方礼平　杨丽红　冷　红　曾　魏　汪　军　张文才　李海波

小熊图书
中国青年出版社

（京）新登字083号

图书在版编目（CIP）数据

教材完全解读：人教版. 九年级数学. 下/王后雄主编.
—3版.—北京：中国青年出版社，2009
ISBN 978-7-5006-7472-6

Ⅰ.教… Ⅱ.王… Ⅲ.数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第138047号

总 策 划：熊 辉
责任编辑：李 扬
封面设计：蔚 蓝

教材完全解读
数学 九年级（下） 配人课版

中国青年出版社 出版发行

社址：北京东四 12 条 21 号 邮政编码：100708
网址：www.cyp.com.cn
编辑部电话：（010）64034328
读者服务热线：（027）61883306
咸宁市中南科择印务有限责任公司印制 新华书店经销
889 × 1194 1/16 12.25 印张 327 千字
2009 年 11 月北京第 3 版 2009 年 11 月湖北第 3 次印刷
印数：10001 — 20000 册
定价：20.70 元
本书如有任何印装质量问题，请与承印厂联系调换
联系电话：（027）61883355

教材完全解读

本书特点

基础教育新课标改革已如火如荼地展开，新课程教材助学助考的开发问题已成为人们关注的焦点。应广大读者的要求，我们特邀来自国家新课程改革试验区和国家级培训班的专家编写课标版《教材完全解读》丛书。该系列丛书能帮助学生掌握新的课程标准，让学生能够按照课程理念和教材学习目标要求科学、高效地学习。该书以“透析全解、双栏对照、服务学生”为宗旨，助您走向成功。

这套丛书在整体设计上有两个突出的特点：一是双栏对照，对教材全解全析，在学科层次上力求讲深、讲透、讲出特色；另一个就是注重典型案例学习，突出鲜活、典型和示范的特点。

为了让您更充分地理解本书的特点，挑战学习的极限，请您在选购和使用本书时，先阅读本书的使用方法图示。

3层完全解读

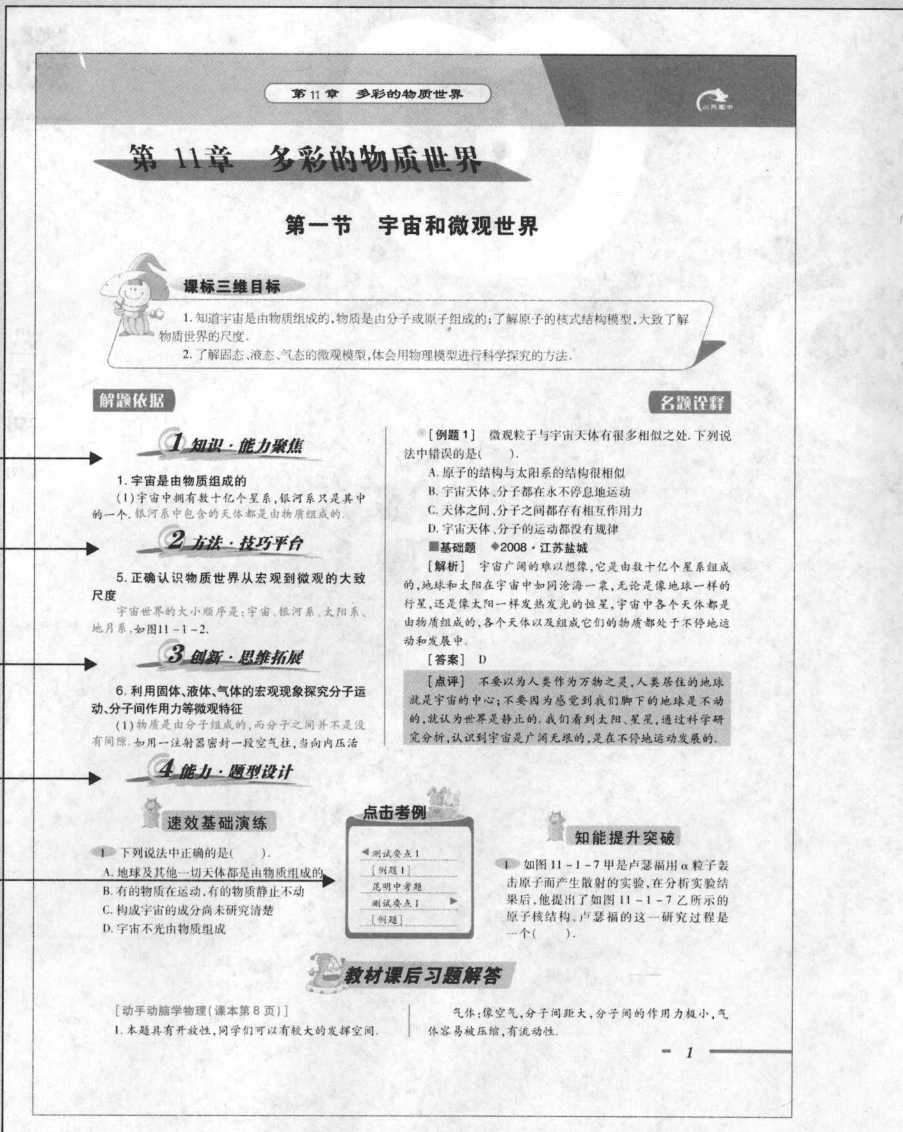
从知识、方法、思维三个方面诠释教材知识点和方法点，帮您形成答题要点、解题思维，理清解题思路、揭示考点实质和内涵。

整体训练方法

针对本节重点、难点、考点及考试能力达标所设计的题目。题目难度适中，是形成能力、考试取得高分的必经阶梯。

解题错因导引

“点击考例”栏目导引每一道试题的“测试要点”。当您解题出错时，建议您通过“测试要点”的指向，弄清致错原因，形成正确答案。



第11章　多彩的物质世界

第 11章　多彩的物质世界

第一节　宇宙和微观世界

课标三维目标

1. 知道宇宙是由物质组成的，物质是由分子或原子组成的；了解原子的核式结构模型，大致了解物质世界的尺度.

2. 了解固态、液态、气态的微观模型，体会用物理模型进行科学探究的方法.

解题依据

1 知识·能力聚焦

1. 宇宙是由物质组成的

(1)宇宙中拥有数十亿个星系，银河系只是其中的一个. 银河系中包含的天体都是由物质组成的.

2 方法·技巧平台

5. 正确认识物质世界从宏观到微观的大致尺度

宇宙世界的大小顺序是：宇宙、银河系、太阳系、地月系，如图11－1－2.

3 创新·思维拓展

6. 利用固体、液体、气体的宏观现象探究分子运动、分子间作用力等微观特征

(1)物质是由分子组成的，而分子之间并不是没有间隙. 如用一注射器密封一段空气柱，当向内压活

名题诠释

[例题1]　微观粒子与宇宙天体有很多相似之处. 下列说法中错误的是(　　).

A. 原子的结构与太阳系的结构很相似

B. 宇宙天体、分子都在永不停息地运动

C. 天体之间、分子之间都存有相互作用力

D. 宇宙天体、分子的运动都没有规律

■基础题　◆2008·江苏盐城

[解析]　宇宙广阔的难以想像，它是由数十亿个星系组成的，地球和太阳在宇宙中如同沧海一粟，无论是像地球一样的行星，还是像太阳一样发热发光的恒星，宇宙中各个天体都是由物质组成的，各个天体以及组成它们的物质都处于不停地运动和发展中.

[答案]　D

[点评]　不要以为人类作为万物之灵，人类居住的地球就是宇宙的中心；不要因为感觉到我们脚下的地球是不动的，就认为世界是静止的. 我们看到太阳、星星，通过科学研究分析，认识到宇宙是广阔无垠的，是在不停地运动发展的.

4 能力·题型设计

速效基础演练

1　下列说法中正确的是(　　).

A. 地球及其他一切天体都是由物质组成的

B. 有的物质在运动，有的物质静止不动

C. 构成宇宙的成分尚未研究清楚

D. 宇宙不光由物质组成

点击考例

测试要点1

[例题1]

昆明中考题

测试要点1

[例题]

知能提升突破

1　如图11－1－7甲是卢瑟福用α粒子轰击原子而产生散射的实验，在分析实验结果后，他提出了如图11－1－7乙所示的原子核结构，卢瑟福的这一研究过程是一个(　　).

教材课后习题解答

[动手动脑学物理(课本第8页)]

1. 本题具有开放性，同学们可以有较大的发挥空间.

气体：像空气，分子间距大，分子间的作用力极小，气体容易被压缩，有流动性.

1

教辅大师、特级教师王后雄教授科学超前的体例设置，帮您赢在学习起点，成就人生夙愿。

——题记

教材完全解读　物理　九年级(全一册)　配人课版

最新3年中考名题诠释

中考题型认证

中考的主要命题点为：(1)原子的结构(见1、2题)；(2)固态、液态、气态的微观模型(见3题)；(3)物质世界从微观到宏观的尺度(见4、6题)；(4)物质是由分子和原子组成的(见5题)．题型主要为选择题、填空题．

2.(2008·安徽)关于原子和原子核，以下叙述正确的是(　　).

A.原子核位于原子的中央，带负电

B.原子核外的电子带负电，并固定在某一位置

C.原子核带正电，电子带负电

[解析]　原子是由位于中心的原子核和核外电子组成的；原子核是由带正电的质子和不带电的中子组成的，原子核带正电核外电子带负电，故原子向外不显电性，并且核外电子围绕原子核高速运动．

[答案]　C

单元知识梳理与能力整合

中考命题趋向

命题形式有填空题、选择题、实验题中，通过计算出物质的密度，对照物质密度表，鉴别物质的种类，从而将物理知识与现实社会生活紧密联系在一起．

归纳·总结·专题

一、本单元知识结构

二、方法规律总结

1.物质世界的大致尺度

宇宙 → 银河系 → 太阳系 → 地球 → 物质 →

分子 → 原子 → 原子核、电子 → 夸克

2.质量及测量

(1)质量是物质的属性，它不随物体的位置、状态、形状的改变而改变．

新典型题分类剖析

类型1　微观物质结构的认识

[例1]　(2008·梅州)在探索微观世界的历程中，人们首先发现了电子，进而认识到原子是由(　　).

A.氢原子和电子组成的　B.质子和中子组成的

C.原子核和核外电子组成的　D.原子核和中子组成的

[解析]　原子由原子核和核外电子构成，原子核由质子和中子组成，质子和中子由更小的微粒夸克构成．

[答案]　C

[点评]　世界是由物质构成，物质由分子或原子构成．

知识与能力同步测控题

测试时间：90分钟　测试满分：100分

一、选择题(每小题3分，共30分)

1 (2008·成都)原子结构与下列事物结构最相似的是(　　).

A.蛋糕　B.面包　C.地球　D.太阳系

2 (2008·南京)小明在学习"从粒子到宇宙"的知识后，有下列认识，其中正确的是(　　).

A.雪花漫天飞舞说明分子在做无规则运动

B.宇宙是一个有层次的天体结构系统，地球是宇宙的中心

答案与提示

第11章

第一节　宇宙和微观世界

能力题型设计

★速效基础演练

1.A　2.A

3.A　[提示]在太阳系中，行星绕太阳转与电子绕原子核转极为相似.

4.C

5.光年　纳米(或10^{-10}米)

6.C

★知能提升突破

1.(1)物质　(2)石块　冰块　尘埃

2.A

2

最新3年中考名题诠释

汇集中考名题，讲解细致入微，教纲、考纲，双向例释；练习、考试，讲解透彻；多学、精练，效果显著。

单元知识整合

单元知识与方法网络化，帮助您将本单元所学教材内容系统化，形成对考点知识二次提炼与升华，全面提高学习效率。

考试高分保障

精心选编涵盖本章节或阶段性知识和能力要求的检测试题，梯度合理、层次分明，与同步考试接轨，利于您同步自我测评，查缺补漏。

点拨解题思路

试题皆提供详细的解题步骤和思路点拨，鼓励一题多解。不但知其然，且知其所以然，帮助您养成良好规范的答题习惯。

小熊图书 最新教辅

讲《中考完全解读》 复习讲解——紧扼中考的脉搏

练《中考完全学案》 难点突破——挑战思维的极限

讲《高考完全解读》 精湛解析——把握高考的方向

练《高考完全学案》 阶段测试——进入实战的演练

讲《教材完全解读》 细致讲解——汲取教材的精髓

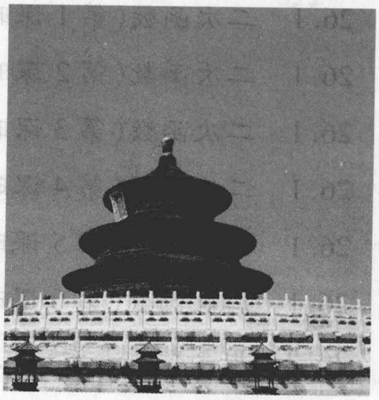
例《课标导航·基础知识手册》 透析题型——掌握知识的法宝

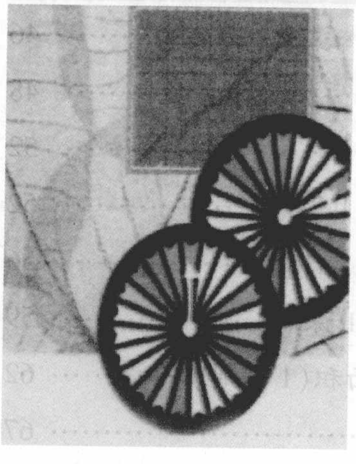
练《教材完全学案》 夯实基础——奠定能力的基石

伴随着新的课程标准问世及新版教材的推广，经过多年的锤炼与优化，数次的修订与改版，如今的“小熊图书”以精益求精的质量、独具匠心的创意，已成为备受广大读者青睐的品牌图书。今天，我们已形成了高效、实用的同步练习与应试复习丛书体系，如果您能结合自身的实际情况配套使用，一定能取得立竿见影的效果。

目 录

目 录





知识与方法

阅读索引

第26章 二次函数

第27章 相似

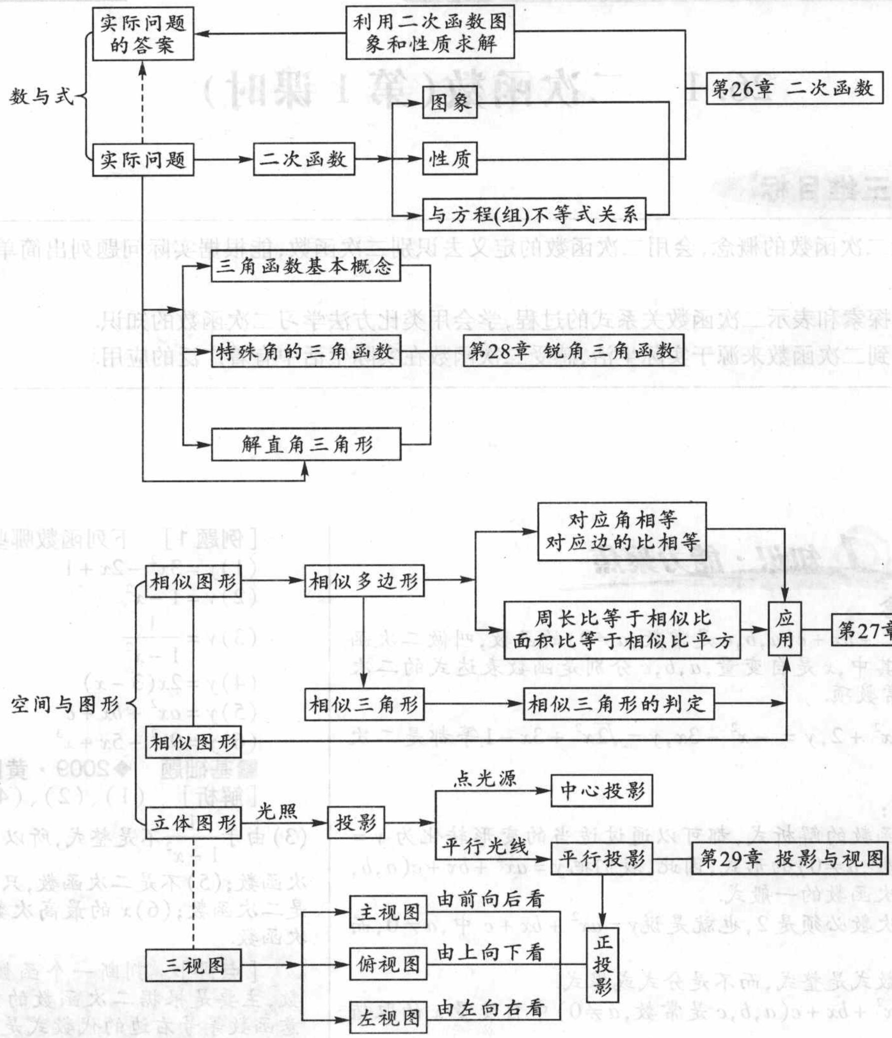
阅读索引

第28章 锐角三角函数

第29章 投影与视图

全书知识结构图解 · 名师学法指津

一、全书知识结构图解



二、名师学法指津

同学们在经历了从实际问题中抽象出函数(一次函数、反比例函数)的体验后,积累了不少有关函数的知识,掌握了用函数观点去看方程或方程组的解,去看不等式的解集问题的方法,并会用函数及其有关性质解决一些实际问题,因此,同学们应该很自信去学习二次函数.会用描点法画出二次函数的图象.在认识二次函数的图象是抛物线后,要利用其图象熟练掌握二次函数的图象开口方向是由 a 决定的,抛物线的顶点坐标、对称轴的求法.抛物线的解析式有三种不同的表达形式:即一般式 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$,顶点式 $y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$ 和乘积式 $y=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq0)$.学会在不同条件下用待定系数法选择不同的形式求出二次函数的解析式.明确由函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象通过平移得到 $y=ax^2+k(a\neq0)$、$y=a(x-h)^2(a\neq0)$、$y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$ 的图象的演变过程,知道函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 图象的作法.由于抛物线具有对称性,函数的增减性是以对称轴为分界的,因而特别要学会用抛物线的对称性巧妙地解决一些实际问题,注意类比方法、数形结合的思想在这一章里的应用.

相似与轴对称、平移、旋转一样也是图形之间的一种变换.图形相似与图形全等有着十分密切的关系.两个图形全等可以看成是相似比为1的两个相似图形.而三角形相似是图形相似的基础.相似三角形的判定与性质是本章的重点,灵活运用相似三角形知识解决实际问题是难点.可以对照三角形全等的条件和性质认识相似三角形的条件和有关性质,并联系起来加以记忆.

锐角三角函数的学习,应准确掌握锐角三角函数定义的形成过程,掌握一个角的三角函数与直角三角形的边角关系.了解特殊角的三角函数值及我们使用的两种三角尺中三边的关系.有利于巩固30°,45°,60°角三角函数值的记忆.学会运用转化思想通过添加辅助线把不规则的图形或非直角三角形转化为直角三角形求解.特别要注意含60°,45°,75°角和30°,45°,105°角的两个三角形辅助线的添设.

投影与视图的学习要注意联系实际,多运用实物帮助理解.画三视图时,应注意看不见的棱要画成虚线,看得见的画成实线.要遵循正视图、俯视图的长相等,左视图、正视图的高相等,左视图、俯视图宽相等.正确区分中心投影与平行投影,点光源与平行光线的问题.

第26章　二次函数

26.1　二次函数(第1课时)

课标三维目标

1. 掌握二次函数的概念，会用二次函数的定义去识别二次函数，能根据实际问题列出简单的二次函数关系式.

2. 经历探索和表示二次函数关系式的过程，学会用类比方法学习二次函数的知识.

3. 认识到二次函数来源于实际生活，感受二次函数在实际生活中有着广泛的应用.

解题依据

名题诠释

1 知识·能力聚焦

1. 二次函数的概念

一般地，形如 $y=ax^2+bx+c(a,b,c$ 是常数，$a\neq0)$ 的函数，叫做二次函数(quadratic function). 其中，x 是自变量，a,b,c 分别是函数表达式的二次项系数、一次项系数和常数项.

如 $y=-x^2$，$y=\frac{1}{2}x^2+2$，$y=-x^2-3x$，$y=\sqrt{2}x^2+3x-1$ 等都是二次函数.

这里应该特别注意：

(1)任何一个二次函数的解析式，都可以通过适当的变形转化为 $y=ax^2+bx+c(a,b,c$ 是常数，$a\neq0)$ 的形式，因此，我们把 $y=ax^2+bx+c(a,b,c$ 是常数，$a\neq0)$ 叫做二次函数的一般式.

(2)自变量的最高次数必须是2，也就是说 $y=ax^2+bx+c$ 中，$a\neq0$，而 b,c 可以为0.

(3)含自变量的代数式是整式，而不是分式或根式.

(4)二次函数 $y=ax^2+bx+c(a,b,c$ 是常数，$a\neq0)$ 中自变量 x 的取值范围是全体实数.

(5)二次函数 $y=ax^2+bx+c(a,b,c$ 是常数，$a\neq0)$ 的结构特征是：等号左边是函数 y，等号右边是关于 x 的二次多项式.

警示：在二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 定义有 $a\neq0$ 的要求，即 $a\neq0$ 是二次函数定义中的一部分，是不可缺少的. 例如：$y=ax^2+bx+c$ 就不一定是二次函数.

2 方法·技巧平台

2. 判断函数是否为二次函数的方法

判断一个函数是否为二次函数，关键有三点：

(1)含有一个自变量，且自变量的最高次数为2.

(2)二次项系数不等于0.

(3)等式两边都是整式.

若能满足上述三个条件，这个函数就是二次函数，否则就不是二次函数.

具体操作时，可以将函数进行去分母、去括号、移项、合并同类项等变形，若能转化为一般式 $y=ax^2+bx+c(a,b,c$ 为常数，$a\neq0)$，那么，它就是二次函数，否则，它就不是二次函数.

如 $y=x(x-1)-x^2$ 整理后为 $y=-x$，不是二次函数. $y=(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}+1$ 也不是二次函数，因为 $(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}+1$ 是根式.

3. 利用二次函数的一般式进行简单的计算

根据二次函数的一般式 $y=ax^2+bx+c(a,b,c$ 为常数，$a\neq0)$，当 a,b,c

[例题1]　下列函数哪些是二次函数？

(1) $y=3x^2-2x+1$

(2) $y=1-x^2$

(3) $y=\frac{1}{1-x^2}$

(4) $y=2x(3-x)$

(5) $y=ax^2+bx+c$

(6) $y=9x^2-5x+x^3$

■基础题　◆2009·黄冈中考模拟题

[解析]　(1)、(2)、(4)是二次函数；(3)由于 $\frac{1}{1-x^2}$ 不是整式，所以 $y=\frac{1}{1-x^2}$ 不是二次函数；(5)不是二次函数，只有当 $a\neq0$ 时，才是二次函数；(6) x 的最高次数是3，也不是二次函数.

[点评]　判断一个函数是不是二次函数，主要是根据二次函数的定义去判断. 注意函数等号右边的代数式是否为整式，自变量的最高次数是不是2.

[例题2]　如果函数 $y=(m-3)x^{m^2-3m+2}+mx+1$ 是二次函数，求 m 的值.

■中难题

[解析]　根据二次函数的定义，需同时满足 $m^2-3m+2=2$，$m-3\neq0$ 两个条件时，$y=(m-3)x^{m^2-3m+2}+mx+1$ 才是二次函数.

[解]　根据题意，得 $\begin{cases}m^2-3m+2=2,\\m-3\neq0,\end{cases}$ 解得 $m=0$.

[点评]　$y=ax^2+bx+c$ 为二次函数的条件是 $a\neq0$，自变量 x 最高次数是2，不能忽视二次项系数不为零这一隐含条件.

[例题3]　(1)当 $m=$ ________ 时，函数 $y=(m+1)x^{2m+1}+4x-5$ 是二次函数？

(2)当 $m=$ ________ 时，函数 $y=(m+1)x^{2m+1}+4x-5$ 是一次函数？

■中难题

[解析]　此题根据二次函数和一次函数的定义，确定 m 的值. (1)题关键要考虑两点：一是自变量的最高次数，二是最高次项系

一定时,可以根据自变量 x 的值求出函数 y 的值,也可以根据 y 的值列一元二次方程求出 x 的值,还可根据定义求字母的值. 例如:当 k 为何值时,$y=(k+2)x^{k^2+1}$ 是二次函数,解答此题只需 $k+2\neq0$ 且 $k^2+1=2$ 即可,即 $k=1$ 或 $k=-1$.

3 创新·思维拓展

4. 二次函数的分类与特征

二次函数 $y=ax^2+bx+c$(a,b,c 是常数,$a\neq0$)中,x,y 是变量,a,b,c 是常量. 自变量 x 的取值范围是全体实数,b 和 c 可以是任意实数,但 a 必须是不等于0的数. 因为 $a=0$ 时,$y=ax^2+bx+c$ 就变成 $y=bx+c$,若 $b\neq0$,则 $y=bx+c$ 是一次函数,若 $b=0$,则有 $y=c$,这是一个常函数.

$y=ax^2(a\neq0)$,$y=ax^2+bx(a\neq0)$ 和 $y=ax^2+c(a\neq0)$ 都是二次函数. 其中 $y=ax^2(a\neq0)$ 是最简单的二次函数.

当函数的解析式中,自变量的指数、系数的地方出现了待定字母时,一定要注意题目的设问,要注意分类思想在题中的体现.

数不为零. (2)题运用了分类讨论思想,讨论时应防止重复和遗漏.

(1)依题意有 $\begin{cases}2m+1=2,\\ m+1\neq0,\end{cases}$ 解之得 $\begin{cases}m=\dfrac{1}{2},\\ m\neq-1,\end{cases}$ $\therefore m=\dfrac{1}{2}$. 故当 $m=\dfrac{1}{2}$ 时,函数 $y=(m+1)x^{2m+1}+4x-5$ 是二次函数.

(2)若原函数是一次函数,则 $(m+1)x^{2m+1}$ 是一次项或常数项,从而可分三种情况考虑.

① $\begin{cases}2m+1=1,\\ m+1+4\neq0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=0,\\ m\neq-5,\end{cases}$ 即 $m=0$.

② $m+1=0$,即 $m=-1$.

③ $2m+1=0$,即 $m=-\dfrac{1}{2}$.

[答案] (1)$\dfrac{1}{2}$ (2)0或 -1 或 $-\dfrac{1}{2}$

4 能力·题型设计

速效基础演练

1 下列函数是二次函数的是( ).

A. $y=\dfrac{1}{x}-x$

B. $y=(\sqrt{x})^2+2\sqrt{x}-1$

C. $y=(x-1)(x-2)-x^2$

D. $y=-\dfrac{1}{3}x^2+2x$

2 函数 $y=(m-3)x^{|m|-1}+3x-1$ 是二次函数,则 m 的值是( ).

A. 3 B. -3 C. ±2 D. ±3

3 设 $y=y_1-y_2$,若 y_1 与 x^2 成正比例,y_2 与 $\dfrac{1}{x}$ 成反比例,则 y 与 x 的函数关系是( ).

A. 正比例函数 B. 一次函数

C. 二次函数 D. 反比例函数

4 一台机器原价60万元,如果每年的折旧率是 x,两年后这台机器的价格为 y 万元,则 y 与 x 之间的函数关系式为( ).

A. $y=60(1-x)^2$ B. $y=60(1-x)$

C. $y=60-x^2$ D. $y=60(1+x)^2$

5 某市园丁居民小区要在一块一边靠墙(墙长15m)的空地上修建一个矩形花园 $ABCD$. 花园的一边靠墙,另三边用总长为40m的栅栏围成. 如图26-1-1,若设花园 BC 边的长为 x(m),花园的面积为 S(m²),则 S 与 x 的函数关系式为______,自变量 x 的取值范围是______.

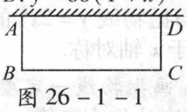


图26-1-1

点击考例

知能提升突破

1 写出一个你喜爱的二次函数,使 a、b、c 满足 $a+b+c=0$,则这个二次函数的解析式为______.

2 若 $y=(m^2-1)x^2+(m^2+2m-3)x-m-1$,当 m______时,y 是 x 的二次函数,当 m______时,y 是 x 的一次函数.

3 正方形边长是4cm,当边长增加 $x$cm时,面积增加 $y$cm².

(1)写出 y 与 x 的函数关系式;

(2)边长增加3cm,4cm时,面积分别增加了多少?

4 某广告公司设计一幅周长为12m的矩形广告牌,广告设计费为每平方米1 000元,设矩形一边长为 xm,面积为 Sm².

(1)求出 S 与 x 之间的函数关系式,并指出自变量 x 的取值范围;

(2)若要求设计的广告牌边长为整数,请你填写下表,并探究 x 取何值时,广告牌设计费最多.

x(m)						
S(m²)						
设计费(元)						

教材课后习题解答

[第3页练习]

1. 解:如图26-1-2,$S=2\pi r\cdot h+2\pi r^2$.

$\because h=r$,$\therefore S=4\pi r^2$.

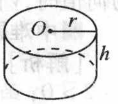


图26-1-2

2. 解:$\because m=\dfrac{n(n-1)}{2}$,

$\therefore m=\dfrac{n^2-n}{2}(n\geq2)$.

26.1 二次函数(第2课时)

课标三维目标

1. 会用描点法画出二次函数 $y=ax^2$ 的图象;掌握二次函数 $y=ax^2$、$y=ax^2+c$ 的性质,弄清 $y=ax^2$ 与 $y=ax^2+c$ 之间的联系和相互转化过程.

2. 经历探索二次函数 $y=ax^2$、$y=ax^2+c$ 的图象与性质的过程,能运用二次函数 $y=ax^2$ 的图象及性质解决简单的实际问题,掌握数形结合的数学思想方法.

3. 通过数学学习活动,体会数学与实际生活的联系,感受数学的实际意义,激发学习兴趣.

解题依据

1 知识·能力聚焦

1. 抛物线及有关概念

一次函数的图象是一条直线,反比例函数的图象是双曲线,二次函数的图象是抛物线.

二次函数 $y=ax^2$ 的图象是一条关于 y 轴对称的曲线,这条曲线叫做抛物线.对称轴与抛物线的交点叫做抛物线的顶点.

特征:(1)该抛物线是轴对称图形,其对称轴是 y 轴.例如,平行于 x 轴的直线 l 交抛物线于 A、B 两点,由对称性可知:A、B 两点关于 y 轴对称,即线段 AB 的垂直平分线就是 y 轴.如图 26-1-3.

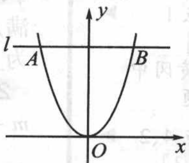


图 26-1-3

(2)由于二次函数 $y=ax^2$ 的图象是抛物线,故也称为抛物线 $y=ax^2$.

(3)二次函数 $y=ax^2$ 中隐含了一个重要条件 $a\neq0$.

(4)由于抛物线 $y=ax^2$ 与对称轴的交点有且只有一个,故抛物线的顶点只有1个,因为 y 轴上点的横坐标为0,故 $y=ax^2$ 的顶点横坐标为0.当 $x=0$ 时,$y=a\cdot0^2=0$,所以抛物线 $y=ax^2$ 的顶点坐标为(0,0),即坐标原点.

(5)抛物线的几个主要特征:开口方向、对称轴、顶点.

2 方法·技巧平台

2. 二次函数 $y=x^2$ 的图象的画法

(1)列表:为了便于计算和描点,一般以 O 为中心选取自变量 x 的整数值,y 也相应地是整数(至少为五组数).

(2)描点:把自变量 x 与函数 y 的每对对应值分别作为点的横坐标与纵坐标,在平面直角坐标系内找出对应的点.

(3)连线:用平滑的曲线(按自变量由小到大的顺序)连接各点.

注意:①画图时图象应越过端点,表示向上或向下无限延伸;②作图象时应注意在两个象限内画出的曲线是对称的;③顶点处不能画成尖形,而应平滑;④"顺序"是指自变量从小到大的顺序(或从左到右).

一般来说,选点越多,图象越精确,但也要具体问题具体分析.抛物线是向两方无限延伸的,在画函数图象时,要注意这一点.

3. 二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象和性质

(1)二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象是一条抛物线,其对

名题诠释

◎[例题1] 用描点法作出二次函数 $y=2x^2$ 的图象,并利用已有图象作出二次函数 $y=-2x^2$ 的图象.结合图象说明它们各自的性质及相互联系.

■基础题

[解析] 通过列表、描点、连线画出其图象,再结合图象回答有关问题.

[解] (1)在自变量 x 的取值范围内取一些值,并算出对应的 y 值,列表如下:

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=2x^2$	…	18	8	2	0	2	8	18	…

(2)把表中 x 与 y 的每一对取值分别作为点的横坐标和纵坐标在直角坐标系中进行描点.

(3)根据自变量由小到大的顺序依次用平滑曲线连接各点,即得到二次函数 $y=2x^2$ 的图象,如图26-1-5.

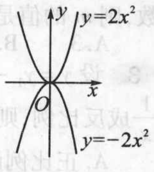


图 26-1-5

二次函数 $y=-2x^2$ 的图象与 $y=2x^2$ 的图象关于 x 轴对称,由对称性可知 $y=-2x^2$ 的图象.抛物线 $y=2x^2$ 的图象开口向上,关于 y 轴对称.当 $x>0$ 时,y 随 x 的增大而增大;当 $x<0$ 时,y 随 x 的增大而减小,图象有最低点(0,0).当 $x=0$ 时,y 有最小值0.抛物线 $y=-2x^2$ 的图象开口向下,关于 y 轴对称.当 $x>0$ 时,y 随 x 的增大而减小;当 $x<0$ 时,y 随 x 的增大而增大.$x=0$ 时,y 有最大值0.抛物线 $y=-2x^2$ 与抛物线 $y=2x^2$ 的图象形状相同,仅开口方向不同,它们关于 x 轴对称.

[点评] 画抛物线一定要注意图象的对称性,x 在对称轴左、右两边对称地取值.

◎[例题2] 已知函数 $y=(n+2)x^{n^2+n-4}$ 是关于 x 的二次函数,求:

(1)满足条件的 n 值;

(2)n 为何值时,抛物线有最低点?求出这个最低点.当 x 为何值时,y 随 x 的增大而增大?

(3)n 为何值时,函数有最大值?最大值是多少?当 x 为何值时,y 随 x 的增大而减小?

■中难题

[解析] 抛物线有最低点的条件是它的开口向上,即 $n+2>0$;函数有最大值的条件是抛物线开口向下,即 $n+2<0$.

称轴是 y 轴，顶点在原点处，开口方向由 a 的正负决定. 当 $a>0$ 时，开口向上，抛物线（除顶点外）都在 x 轴的上方，并向上无限延伸，顶点 $(0,0)$ 是最低点，即当 $x=0$ 时，y 有最小值为 0. 在对称轴左侧，y 随 x 的增大而减小，在对称轴右侧，y 随 x 的增大而增大；当 $a<0$ 时，开口向下，抛物线（除顶点外）都在 x 轴下方，并向下无限延伸，顶点 $(0,0)$ 是最高点，即当 $x=0$ 时，y 有最大值为 0. 在对称轴左侧，y 随 x 的增大而增大，在对称轴右侧，y 随 x 的增大而减小.

（2）抛物线 $y=ax^2(a\neq0)$ 的开口大小由 $|a|$ 决定，$|a|$ 越大，抛物线的开口越小；$|a|$ 越小，抛物线的开口越大.

例如：函数 $y_1=-x^2$，$y_2=-\frac{1}{2}x^2$，$y_3=-2x^2$ 的图象大致如图 26－1－4 所示，则图中从里向外的三条抛物线对应的函数依次是______.

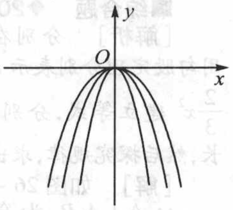


图 26－1－4

错解：$y_2=-\frac{1}{2}x^2$，$y_1=-x^2$，$y_3=-2x^2$. 其实 $|a|$ 越大，抛物线的开口就越小，抛物线越接近 y 轴，反之亦然. 此题错误的原因，一是只比较了 a 的值. 即 $-\frac{1}{2}>-1>-2$. 二是对上述规律不理解，错误地认为 $|a|$ 越大，开口就越大.

正解：$y_3=-2x^2$，$y_1=-x^2$，$y_2=-\frac{1}{2}x^2$.

（3）在几条抛物线的关系式中，若 $|a|$ 相等，则其形状相同，即若 a 相等，则开口方向及形状相同；若 a 互为相反数，则形状相同，开口方向相反.

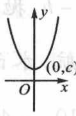
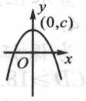
4. 二次函数 $y=ax^2+c(a\neq0)$ 的图象和性质

二次函数 $y=ax^2+c(a\neq0)$ 的图象可由抛物线 $y=ax^2(a\neq0)$ 向上（或向下）平移而得到.

当 $c>0$ 时，抛物线 $y=ax^2$ 向上平移 $|c|$ 个单位可得到 $y=ax^2+c$；

当 $c<0$ 时，抛物线 $y=ax^2$ 向下平移 $|c|$ 个单位可得到 $y=ax^2+c$.

关于二次函数 $y=ax^2+c(a\neq0)$ 的性质，主要从抛物线的开口方向、顶点、对称轴、函数值的增减性以及函数的最大值或最小值等方面来研究. 下面结合图象，将其性质列表归纳如下：

函数	$y=ax^2+c(a>0,c>0)$	$y=ax^2+c(a<0,c>0)$
图象		
开口方向	向上	向下
顶点坐标	$(0,c)$	$(0,c)$
对称轴	y 轴	y 轴
函数变化	当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小	当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大
最大（小）值	当 $x=0$ 时，$y_{最小值}=c$	当 $x=0$ 时，$y_{最大值}=c$

［解］（1）由题意得 $\begin{cases}n^2+n-4=2,①\\n+2\neq0.②\end{cases}$

由①得 $n=2$ 或 $n=-3$，由②得 $n\neq-2$.

∴ 当 $n=2$ 或 $n=-3$ 时，原函数为二次函数.

（2）若抛物线有最低点，则抛物线开口向上，

∴ $n+2>0$，即 $n>-2$，∴ 只能取 $n=2$.

∵ 这个最低点为抛物线的顶点，其坐标为 $(0,0)$，

∴ 当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大.

（3）∵ 函数有最大值，∴ 抛物线开口向下，

∴ $n+2<0$，$n<-2$，∴ 只能取 $n=-3$.

∵ 函数最大值为抛物线顶点的纵坐标，顶点坐标为 $(0,0)$，

∴ $y_{最大值}=0$. 当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小.

［点评］ 熟悉二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象和性质是解此题的关键. 在第（1）小问中，容易忽视二次函数的定义中 $a\neq0$ 的条件，而没有将求出的 n 的值进行检验. 此题虽不影响结果，但解题时，若没有 $n+2\neq0$ 这一步，解题就缺乏严谨.

［例题3］ 在同一坐标系中，画出以下二次函数的图象，并结合图象回答下列问题.

①$y=2x^2$；②$y=2x^2+1$；③$y=-2x^2$；④$y=-2x^2-1$.

（1）各图象的开口方向、对称轴和顶点坐标分别是什么？

（2）抛物线 $y=2x^2$ 与抛物线 $y=2x^2+1$ 有什么关系？抛物线 $y=-2x^2$ 与抛物线 $y=2x^2$ 有什么关系？抛物线 $y=-2x^2$ 与抛物线 $y=-2x^2-1$ 呢？

（3）由上面的结论你能得出什么规律？

■基础题

［解］（1）通过列表、描点、连线三个步骤画各函数的图象，如图 26－1－6.

x	…	-2	-1	0	1	2	…
$y=2x^2$	…	8	2	0	2	8	…
$y=2x^2+1$	…	9	3	1	3	9	…
$y=-2x^2$	…	-8	-2	0	-2	-8	…
$y=-2x^2-1$	…	-9	-3	-1	-3	-9	…

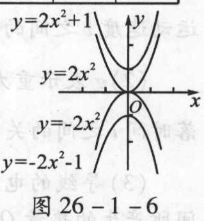


图 26－1－6

由图象可知：抛物线 $y=2x^2$ 图象开口向上，对称轴是直线 $x=0$，顶点坐标是 $(0,0)$；抛物线 $y=2x^2+1$ 图象开口向上，对称轴是直线 $x=0$，顶点坐标是 $(0,1)$；抛物线 $y=-2x^2$ 图象开口向下，对称轴是直线 $x=0$，顶点坐标是 $(0,0)$；抛物线 $y=-2x^2-1$ 的图象开口向下，对称轴是直线 $x=0$，顶点坐标是 $(0,-1)$.

（2）抛物线 $y=2x^2$ 向上平移一个单位便得到抛物线 $y=2x^2+1$；抛物线 $y=-2x^2$ 与抛物线 $y=2x^2$ 关于 x 轴对称；而抛物线 $y=-2x^2$ 向下平移一个单位便得到抛物线 $y=-2x^2-1$.

（3）由上述结论可知：抛物线的开口方向取决于 a 的正负，c 的变化使抛物线顶点的纵坐标也发生变化.

［点评］ 函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 与 $y=ax^2+c(a\neq0)$、$y=-ax^2(a\neq0)$ 与 $y=-ax^2+c(a\neq0)$ 可以通过平移相互得到，不同的是它们的顶点坐标不同，但对称轴都是 y 轴、抛物线上下平移的规律是上加下减常数项.

抛物线 $y=ax^2+c(a\neq0)$ 的对称轴是 y 轴，顶点坐标是 $(0,c)$，与抛物线 $y=ax^2(a\neq0)$ 的形状相同.

函数 $y=ax^2+c(a\neq0)$ 的图象是由函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象向上(或向下)平移 $|c|$ 个单位得到的，顶点坐标为 $(0,c)$.

[特别提醒] 抛物线 $y=ax^2(a\neq0)$ 的对称轴、最值与顶点密不可分，其对称轴即为过顶点且与 x 轴垂直的一条直线，其顶点横坐标 $x=0$，抛物线平移不改变抛物线的形状，即 a 的值不变，只是位置发生变化而已.

3 创新·思维拓展

5. 直线与抛物线的综合问题

(1)两函数图象相交，就是说两图象都经过某些点，也就意味着这些点的横、纵坐标代入两函数的表达式中都成立，所以，两表达式组成的方程组的解就是其图象的交点的横、纵坐标. 求直线与抛物线的交点，解直线与抛物线两表达式组成的方程组就可得到.

例如：求函数 $y=x-2$ 与函数 $y=-x^2$ 的图象的交点坐标.

解：由两个函数表达式组成的方程组为 $\begin{cases}y=x-2,\\y=-x^2.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_1=-2,\\y_1=-4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_2=1,\\y_2=-1.\end{cases}$

$\therefore$ 函数 $y=x-2$ 与函数 $y=-x^2$ 的图象有两个交点，它们的坐标分别是 $(-2,-4)$，$(1,-1)$.

在解决直线与抛物线的交点问题时，通常将它化为方程组的问题，反映了数形结合的思想方法，是数与形的统一.

(2)利用函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象解决问题.

6. 利用函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 解决实际问题

二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 是刻画客观世界许多现象的一种重要的数学模型. 利用它的图象和性质可解决很多实际问题，特别在物理学领域和工程方面.

如：(1)某物体的质量为 m，它运动时的能量 E 与它的运动速度 v 之间的关系式为 $E=\dfrac{1}{2}mv^2$(m 为定值)；

(2) g 表示重力加速度，当物体自由下落时，高度 h 与下落时间 t 之间的关系式是 $h=\dfrac{1}{2}gt^2$(g 为定值)；

(3)导线的电阻为 R，当导线中有电流通过时，单位时间所产生的热量 Q 与电流强度 I 之间的关系式是 $Q=I^2Rt$(R 为定值).

此外，二次函数在建筑学、运动学中也有广泛的应用，如拱桥、吊桥等.

[特别提醒] 数形结合思想是指利用图形来表达数量之间的关系，为解答问题提供具体、形象的工具和方法，学会运用数形结合的思想方法去解决问题，会起到直观、简捷的效果.

$y=ax^2(a\neq0)$ 是二次函数中最简单的一个函数，在实际生活中，涉及二次函数的问题时，往往建立 $y=ax^2(a\neq0)$ 这种形式的函数解决问题较简捷.

[例题4] 二次函数 $y=\dfrac{2}{3}x^2$ 的图象如图 26－1－7 所示，点 A_0 位于坐标原点，点 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_{2\,008}$ 在 y 轴的正半轴上，点 $B_1,B_2,B_3,\cdots,B_{2\,008}$ 在二次函数 $y=\dfrac{2}{3}x^2$ 位于第一象限的图象上，若 $\triangle A_0B_1A_1$，$\triangle A_1B_2A_2$，$\triangle A_2B_3A_3$，$\cdots$，$\triangle A_{2\,007}B_{2\,008}A_{2\,008}$ 都为等边三角形，求 $\triangle A_{2\,007}B_{2\,008}A_{2\,008}$ 的边长.

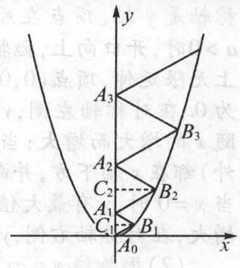


图 26－1－7

■综合题 ◆2009·兰州

[解析] 分别在 $\triangle A_0A_1B_1$，$\triangle A_1A_2B_2$，$\triangle A_2A_3B_3$，$\cdots$ 中，运用勾股定理分别表示 B_1、B_2、B_3 的坐标，利用抛物线解析式 $y=\dfrac{2}{3}x^2$ 建立等式，分别求出 $\triangle A_0A_1B_1$，$\triangle A_1A_2B_2$，$\triangle A_2A_3B_3$ 的边长，然后探究规律，求出 $\triangle A_{2\,007}$、$A_{2\,008}$、$B_{2\,008}$ 的边长.

[解] 如图 26－1－7 所示，作 $B_1C_1\perp y$ 轴，垂足为 C_1.

$\because \triangle A_0A_1B_1$ 为等边三角形，$\therefore \angle A_0B_1C_1=30°$.

设 $A_0C_1=a$，则 $A_0B_1=2a$，$B_1C_1=\sqrt{3}a$. $\therefore B_1(\sqrt{3}a,a)$，

$\therefore a=\dfrac{2}{3}(\sqrt{3}a)^2$，$\therefore a=\dfrac{1}{2}$，$\therefore A_0B_1=1$.

作 $B_2C_2\perp y$ 轴，设 $A_1C_2=m$，则 $A_1B_2=2m$，$C_2B_2=\sqrt{3}m$.

$\therefore B_2(\sqrt{3}m,1+m)$. 又 $1+m=\dfrac{2}{3}(\sqrt{3}m)^2$.

$\therefore 2m^2-m-1=0$，$(2m+1)(m-1)=0$，$\therefore m=1$ 或 $-\dfrac{1}{2}$(舍).

$A_1B_2=2$. 同理可求 $A_2B_3=3$，$A_3B_4=4$，$\cdots$

$\therefore \triangle A_{2\,007}B_{2\,008}A_{2\,008}$ 的边长为 2 008.

[例题5] 有一座抛物线形状的拱桥，正常水位时，桥下水面宽度 AB 为 20m，拱顶距离水面 4m.

(1)建立如图 26－1－8 所示的直角坐标系，求出该抛物线的解析式；

(2)在正常水位的基础上，当水位上升 hm 到达 CD 时，桥下水面宽度为 dm，请将 d 表示成 h 的函数关系式；

(3)为保证过往船只顺利通航，桥下水面宽度不得小于 18m，则水深超过正常水位多少米时，就会影响过往船只顺利通航？

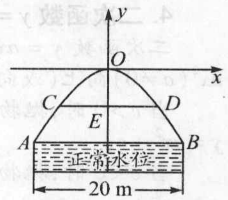


图 26－1－8

■应用题 ◆2009·黄冈中学模拟题

[解析] (1)此抛物线顶点在原点，对称轴是 y 轴，故可设抛物线解析式为 $y=ax^2(a\neq0)$，再在抛物线上找一点，代入解析式中求出 a.

(2)当水位上升 hm 时，$OE=4-h$，抛物线上 D 点纵坐标为 $h-4$.

(3)为保证过程船只顺利通航，水面宽度不得小于 18m，即 $CD\geq18$. 从而求出 h.

[解] (1)设 $y=ax^2$，将 $B(10,-4)$ 代入，得 $-4=a\times10^2$，$\therefore a=-\dfrac{1}{25}$，$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-\dfrac{1}{25}x^2$.

(2)当水位上升 hm 时，D 点纵坐标为 $h-4$，将它代入抛物线解析式，得 $h-4=-\dfrac{1}{25}x^2$，$\therefore x=\pm5\sqrt{4-h}$，于是桥下水面宽度 $d=10\sqrt{4-h}$(m).

(3) $CD\geq18$，即 $10\sqrt{4-h}\geq18$. $\therefore h\leq0.76$.

$\therefore$ 当水深超过正常水位 0.76m 时，就会影响过往船只顺利通航.

[思维误区] 此题是将实际问题转化成数学问题，易犯的错误有在找 B 点坐标时没有考虑 B 点所处的象限，把 B 点错写成 $(10,4)$，其次当水位上升 hm 时，D 点纵坐标错写成 $h+4$ 的错误.

4 能力·题型设计

速效基础演练

1　在平面直角坐标系中，将二次函数 $y=2x^2$ 的图象向上平移 2 个单位，所得图象的解析式为(　　).

A. $y=2x^2-2$　　B. $y=2x^2+2$

C. $y=2(x-2)^2$　　D. $y=2(x+2)^2$

2　函数 $y=ax^2(a\neq 0)$ 的图象经过点 $(a, 8)$，则 a 的值为(　　).

A. ± 2　　B. -2　　C. 2　　D. 3

3　若抛物线 $y=(2+m)x^{m^2-10}$ 的开口向下，则 m 的值为(　　).

A. 3　　B. -3

C. $2\sqrt{3}$　　D. $-2\sqrt{3}$

4　下列函数中，当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大的是(　　).

A. $y=-2x$　　B. $y=\frac{1}{x}$

C. $y=2x^2$　　D. $y=-2x^2$

5　如图 26－1－9，正方形 $ABCD$ 的边长为 10，四个全等的小正方形的对称中心分别在正方形 $ABCD$ 的顶点上，且它们的各边与正方形 $ABCD$ 各边平行或垂直. 若小正方形的边长为 x，且 $0<x\leqslant 10$，阴影部分的面积为 y，则能反映 y 与 x 之间函数关系的大致图象是(　　).

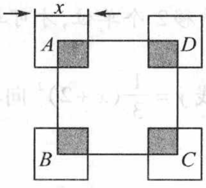
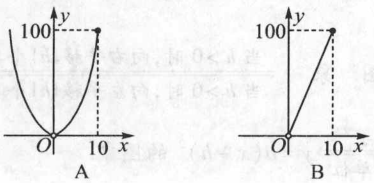


图 26－1－9



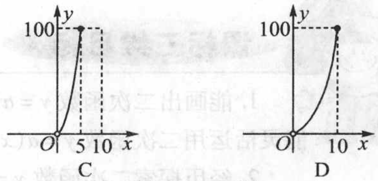


图 26－1－10

点击考例

知能提升突破

1　已知 $a\neq 0$，在同一直角坐标系中，函数 $y=ax$ 与 $y=ax^2$ 的图象有可能是(　　).

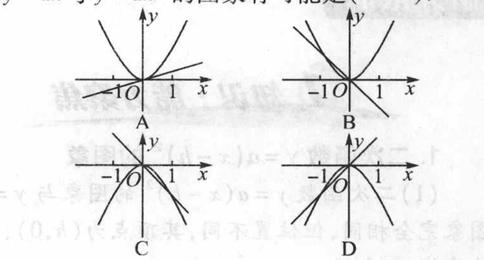


图 26－1－11

2　已知二次函数 $y=-x^2+2(m-1)x+2m-m^2$ 的图象关于 y 轴对称，则由此图象的顶点 A 和图象与 x 轴的两个交点 B、C 构成的 $\triangle ABC$ 的面积是(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 2

3　抛物线 $y=-2x^2+1$ 的顶点坐标是______，对称轴是______，当 x______时，y 随 x 增大而增大，当 x______时，y 随 x 增大而减小，当 $x=$______时，y 有最______值，为______.

4　二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+3$ 与 $y=-\frac{1}{2}x^2-3$ 的图象是怎样由 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象平移得到的？

5　如图 26－1－12，桥拱是抛物线形，桥拱上有一点 P，其坐标为 $(2, -1)$，当水位在 AB 位置时，水面宽 12 米，求水面离拱顶的高度 h.

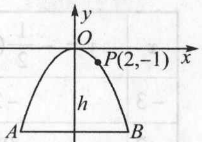


图 26－1－12

教材课后习题解答

[第 7 页练习]

解：抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+2$ 是由抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 向上平移 2 个单位得到的，抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-2$ 是由抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 向下平移 2 个单位得到的. 它们的开口方向都向上，对称轴都是 y 轴(或直线 $x=0$)，顶点坐标分别是 $(0,0)$，$(0,2)$，$(0,-2)$. 抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+k$ 的开口向上，对称轴为 y 轴，顶点坐标为 $(0,k)$，它是由抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 向上(或向下)平移 $|k|$ 个单位得到的. 函数图象如图 26－1－13.

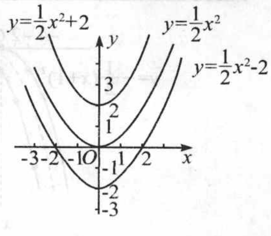


图 26－1－13