大代數學講義

下　冊

上野清　著
王家葵
張廷華　譯

商務印書館發行

大代數學講義

下冊

上野清 著
王家葵 張廷華 譯
駱師曾 趙秉良
王積沂 壽孝天 校

商務印書館發行

己酉年六月初版
中華民國三十八年八月第十二版

(54254)

大代數學講義二冊

每部基價陸拾元
印刷地點外另加運費

原著者　上野清
譯述者　王家炎　張廷華
校訂者　駱師曾　王積沂　趙秉良　壽孝天

發行兼印刷者　商務印書館
發行所　各地商務印書館

查理斯密司氏
霍爾氏乃托氏

大代數學講義

第五卷

第貳拾編

二項式之定理

252.* **諸代數式之積** 等於第壹式,每壹項第貳式,每壹項第三式,每壹項…………所乘得各積之代數和。此於67章。已詳述之。

今由此方法推究貳項式之方乘積如次。

253.* **二項式之定理** 假定各因子。皆如$a+b$而有n個。

即 $(a+b)(a+b)(a+b)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

從各因子中每取壹字相乘。即得此連乘積之壹項。如法取之。將各積相加。即得此連乘積之壹切項。(詳67章)。

先從n因子中各取a字。此祇有壹法。故a^n爲此連乘積之壹項。

次從n因子中取壹b。從其餘$n-1$因子中各取a。惟從n因子中取壹b之方法。等於從n物中取1之組合法而得${}_nC_1$。故${}_nC_1a^{n-1}b$爲此連乘積之第貳項。

又次從n因子中取貳b。其法等於從n物中取2之組合法而得${}_nC_2$。故${}_nC_2a^{n-2}b^2$爲此連乘積之第三項。

總之於n因子中取r個b(r不大於n而爲正整數)。其法等於從n物中取r之組合法。即可求得其項爲${}_nC_ra^{n-r}b^r$。

$\therefore\quad (a+b)(a+b)(a+b)\cdots\cdots\cdots n$因子

$$=a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots\cdots$$

而其最後之項爲 ${}_nC_n a^{n-n}b^n$ 即 b^n。

由是 n 爲正整數。則

$$(a+b)^n=a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots+b^n。$$

此公式謂之二項式之定理 (Binomial Theorem)。

若由 **244** 章以 ${}_nC_1$, ${}_nC_2$, ${}_nC_3$, …… 之值代入之。則上之公式爲

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+\frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}a^{n-r}b^r+\cdots\cdots+b^n。$$

此右邊之級數。謂之 $(a+b)^n$ 之展開式 (Expansion)。

254.* 歸納法之證 用歸納法 (Enduction)。證明二項式之定理。

n 爲任意之正整數。則

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+\frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}a^{n-r}b^r+\cdots\cdots+b^n。$$

即 $(a+b)^n=a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots+b^n$。

今假定此結果爲眞。乃以 $(a+b)$ 乘之。而歸併其同方乘之項。則得 $(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+(1+{}_nC_1)a^nb+({}_nC_1+{}_nC_2)a^{n-1}b^2+\cdots\cdots$

$$+({}_nC_{r-1}+{}_nC_r)a^{n-r+1}b^r+\cdots\cdots+b^{n+1}。$$

今 $1+{}_nC_1=1+n={}_{n+1}C_1$,

$${}_nC_1+{}_nC_2=n+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}=\frac{(n+1)n}{1\cdot2}={}_{n+1}C_2,$$

總之 ${}_nC_{r-1}+{}_nC_r={}_{n+1}C_r$ (見 **247** 章)。

由是得 $(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+{}_{n+1}C_1a^nb+{}_{n+1}C_2a^{n-1}b^2+\cdots\cdots$

$$+{}_{n+1}C_ra^{n+1-r}b^r+\cdots\cdots+b^{n+1}。$$

此定理對於 n 之任何值旣爲眞。則對於 n 任大之值亦必爲眞。今若 $n=1$。則易知此定理爲眞。故 $n=2$。亦必爲眞。如是 $n=3$, $n=4$, …… 即無論 n 之值如何。此定理皆爲眞可知矣。

〔第一例〕 展開 $(a+b)^4$。

$$(a+b)^4=1a^4+4a^3b+\frac{4\cdot3}{1\cdot2}a^2b^2+\frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}ab^3+\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}b^4$$

$$=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4。$$

〔第二例〕 展開 $(2x-y)^3$。

$$(2x-y)^3=(2x)^3+3(2x)^2(-y)+\frac{3\cdot2}{1\cdot2}(2x)(-y)^2+(-y)^3$$

$$=8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3。$$

〔第三例〕 展開 $(a-b)^n$。

$$(a-b)^n=a^n+na^{n-1}(-b)+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}(-b)^2+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}a^{n-r}(-b)^r+\cdots\cdots+(-b)^n$$

$$=a^n-na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}b^2-\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+(-1)^r\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}a^{n-r}b^r+\cdots\cdots(-1)^nb^n。$$

255. 公項 由二項式之定理。而得 $(a+b)^n$ 展開式之公項爲 $\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}a^{n-r}b^r$。

而以適當之値代其 r。可得其任意之項。故謂之公項。如令 r 爲 0。即得第一項。令 r 爲 n。即得第 $n+1$ 項。故此公項爲自初項起之第 $r+1$ 項也。(見 **244** 章之註中)。

256. 等係數 與初末兩項等距離之項。其係數相等。

於 $(a+b)^n$ 之展開式。自初項順計之第 $r+1$ 項爲 ${}_nC_ra^{n-r}b^r$。自末項逆計之第 $r+1$ 項(卽自首項順計之第 $n-r+1$ 項)爲 ${}_nC_{n-r}a^rb^{n-r}$。

惟 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$， (由 **215** 章)。

又如次之證法可自了解。

將 $(a+b)^n$ 互換其 a, b 而爲 $(b+a)^n$。其展開式相同。$(a+b)^n$ 之第 $r+1$ 項爲 ${}_nC_ra^{n-r}b^r$。而 $(b+a)^n$ 之第 $r+1$ 項爲 ${}_nC_rb^{n-r}a^r$。此其係數同爲 ${}_nC_r$。故相等也。

257. 簡式 於 **253** 章之公式，令 $a=1, b=x$。則

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^2+\cdots\cdots+\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}x^r+\cdots\cdots+x^n。$$

此公式凡論二項式之定理多可用之。而二項式之形如 $(a+b)^n$ 者。亦包括於此公式。例如

$$(a+b)^n=\left\{a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right\}^n=a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n=a^n\left\{1+n\frac{b}{a}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{b}{a}\right)^2+\cdots\cdots\right\}$$

$$=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+\cdots\cdots。$$

258. 二項式展開之最大項 $(1+x)^n$之第$r+1$項。等於第r項以$\frac{n-r+1}{r}x$乘之。

惟$\frac{n-r+1}{r}x=\left(\frac{n+1}{r}-1\right)x$。而 $\frac{n+1}{r}$ 因r增大而減小。故r增大時。$\frac{n-r+1}{r}x$從而減小。若$\frac{n-r+1}{r}x$對於r之任何值而小於1時。則第$r+1$項。必比第r項爲小。故若使第r項爲最大。必其

$$\frac{n-r+1}{r}x<1 \quad 及 \quad \frac{n-(r-1)+1}{r-1}x>1。$$

由是 $$r>\frac{(n+1)x}{x+1} \quad 及 \quad r<\frac{(n+1)x}{x+1}+1。$$

於$(1+x)^n$之展開式。其各項之絕對值(無關於其正負)。不因其x之符號變化而異。故$(1-x)^n$之r項。當 $r>\frac{(n+1)x}{x+1}$ 及 $r<\frac{(n+1)x}{x+1}+1$時。其第r項。亦爲最大之項。

若 $r=\frac{(n+1)x}{x+1}$。則 $\frac{n-r+1}{r}x=1$。其最大之項不止一項。其第r項與第$r+1$項同大。故此二項俱謂之最大項。

又 $(a+x)^n=a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$。故$(a+x)^n$之第$r$項。當$r>\dfrac{(n+1)\frac{x}{a}}{\frac{x}{a}+1}$ 及 $r<\dfrac{(n+1)\frac{x}{a}}{\frac{x}{a}+1}+1$時爲最大。

〔第一例〕 於$(1+x)^{20}$之展開式。其$x=\frac{1}{4}$。求其最大項。

以第r項爲最大。則必$r>\frac{(20+1)\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+1}=4\frac{1}{5}$及$r<4\frac{1}{5}+1$。由是知其第五項爲最大。

〔第二例〕 設$x=\frac{5}{6}$。試求$(1+x)^{10}$之最大項。

其第r項。當$r>\frac{(10+1)\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}+1}=5$及$r<5+1$爲最大。則5項6項爲最大。

〔第三例〕 求$(10+3x)^{15}$展開式之最大項。但$x=4$。

其第r項。當$r>\dfrac{(15+1)\dfrac{3x}{10}}{\dfrac{3x}{10}+1}=\dfrac{16\times\dfrac{6}{5}}{\dfrac{6}{5}+1}=8\dfrac{8}{11}$及$r<9\dfrac{8}{11}$爲最大。

故知第9項爲最大。

最大係數 二項展開式之最大係數。亦可用同法求之。因$(1\pm x)^n$展開式第$r+1$項之係數。等於第r項之係數以$\pm\frac{n-r+1}{r}$乘之。由是第r項之係數。其絕對値爲最大者。則必

$\frac{n-r+1}{r}<1$及$\frac{n-(r-1)+1}{r-1}>1$。卽$r>\frac{n+1}{2}$及$r<1+\frac{n+1}{2}$。

若n爲偶數。則第r項之係數。當$r=\frac{n}{2}+1$爲最大。若n爲奇數。則$\frac{n+1}{2}$及$\frac{n+3}{2}$之兩項。俱爲最大係數之項。

例題二十四

求次之各展開式。

1. $(x+a)^5$。 答 $x^5+5x^4a+10x^3a^2+10x^2a^3+5xa^4+a^5$
2. $(2a-x)^5$。 答 $32a^5-80a^4x+80a^3x^2-40a^2x^3+10ax^4-x^5$。
3. $(1-x^2)^6$。 答 $1-6x^2+15x^4-20x^6+15x^8-6x^{10}+x^{12}$。
4. $(2a-3a^2)^4$。 答 $16a^4-96a^5+216a^6-216a^7+81a^8$。
5. $(2x^2-3)^4$。 答 $16x^8-96x^6+216x^4-216x^2+81$。
6. $(x^2-2y^3)^5$。 答 $x^{10}-10x^8y^3+40x^6y^6-80x^4y^9+80x^2y^{12}-32y^{15}$。

7. 求 $(x-3y)^{10}$ 之第三項。　　答　$405x^8y^2$。

〔解〕 由**255**章之公式第三項$={}_{10}C_2x^8(-3y)^2$。

8. 求 $(3x-4)^{20}$ 之第五項。　　答　$\frac{\underline{|20}}{\underline{|16}\,\underline{|4}}\cdot 3^{16}4^4x^{16}$。

9. 求 $(2-x)^{22}$ 之第二十一項。　　答　$924x^{20}$。

10. 求 $(x-y)^{42}$ 之第四十項。　　答　$-\frac{\underline{|42}}{\underline{|3}\,\underline{|39}}x^3y^{39}$。

11. 求 $(1+x)^8$ 之中項。　　答　$70x^4$。

〔解〕 $(1+x)^8$ 之展開式有$8+1$卽9項。故中項爲第五項。由是可求得其第五項。卽爲其中項。

12. 求 $(1+x)^{21}$ 之中項。　　答　$\frac{\underline{|21}}{\underline{|10}\,\underline{|11}}x^{10}$ 及 $\frac{\underline{|21}}{\underline{|11}\,\underline{|10}}x^{11}$。

〔解〕 此展開式有22項。故中項爲第11項第12項。

13. 求 $(x-3y)^n$ 之公項。　　答　$(-1)^r\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}3^rx^{n-r}y^r$。

〔解〕 第 $(r+1)$ 項$=\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}x^{n-r}(-3y)^r$。

14. 求 $(x^2+y^3)^n$ 之公項。　　答　$\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}x^{2n-2r}y^{3r}$。

15. 記 $(3x-2y)^{15}$ 之最初三項及最後三項。

答 $(3x)^{15}-30(3x)^{14}y+420(3x)^{13}y^2\cdots-945x^2(2y)^{13}+45x(2y)^{14}-(2y)^{15}$

16. 求 $(1+x)^{12}$ 之最大係數之項。　　答　$924x^6$。

17. 求 $(1+x)^{15}$ 之最大係數之項。　　答　$6435x^7$, $6435x^8$。

18. 試示 $(1+x)^{2n}$ 展開式 x^n 之係數。等於 $(1+x)^{2n-1}$ 展開式 x^n 之係數之2倍。

〔證〕 $(1+x)^{2n}$ 其 x^n 之係數之項。爲第 $(n+1)$ 項。卽 $\frac{\underline{|2n}}{\underline{|n}\,\underline{|n}}x^n$。

又 $(1+x)^{2n-1}$ 其 x^n 之項。爲第 $(n+1)$ 項。卽 $\frac{\underline{|2n-1}}{\underline{|n}\,\underline{|n-1}}x^n=\frac{\underline{|2n}}{2\,\underline{|n}\,\underline{|n}}x^n$

故 $(1+x)^{2n}$ 式其 x^n 之係數。等於 $(1+x)^{2n-1}$ 式中 x^n 之係數之2倍。

19 $(1+x)^{2n}$之中項。爲 $\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}{\underline{|n}}2^n x^n$。

〔證〕 中項爲第$(n+1)$項。故

$$\frac{\underline{|2n}}{\underline{|n}\,\underline{|n}}x^n=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdots\cdots(2n-1)2n}{\underline{|n}\,\underline{|n}}x^n=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)2n\,\underline{|n}}{\underline{|n}\,\underline{|n}}x^n。$$

20. 用二項式之定理。求$(99)^4$, $(51)^4$及$(999)^3$。

〔解〕 $(99)^4=(100-1)^4=(100)^4-4\times(100)^3+6\times(100)^2-4\times100+1$

$=100000000-4000000+60000-400+1=96059601$。

$(51)^4=(50+1)^4=(50)^4+4\times(50)^3+6\times(50)^2+4\times50+1$

$=6250000+500000+15000+200+1=6765201$。

$(999)^3=(1000-1)^3=(1000)^3-3\times(1000)^2+3\times1000-1=997002999$。

21. 於$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^n$展開式$x^r$之係數。爲 $\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|\frac{1}{2}(n+r)}\,\underline{|\frac{1}{2}(n-r)}}$。

〔證〕 第$(p+1)$項。爲 $\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|p}\,\underline{|n-p}}x^{n-p}\left(\dfrac{1}{x}\right)^p=\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|p}\,\underline{|n-p}}x^{n-2p}$。

$r=n-2p$。 $\therefore\ p=\dfrac{1}{2}(n-r)$。以此代入。卽得所求之係數。爲

$$\frac{\underline{|n}}{\underline{|\frac{1}{2}(n-r)}\,\underline{|n-\frac{1}{2}(n-r)}}。$$

22. 求$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^{2n}$之中項。 答 $(-1)^n\dfrac{\underline{|2n}}{(\underline{|n})^2}$。

〔解〕 中項卽第$(n+1)$項$=\dfrac{\underline{|2n}}{\underline{|n}\,\underline{|n}}x^n\left(-\dfrac{1}{x}\right)^n=(-1)^n\dfrac{\underline{|2n}}{(\underline{|n})^2}$。

23. $(1+x)^n$展開式。第五,第六,及第七項之係數。爲等差級數。求其n之値。 答 7或14。

〔解〕 設第五,第六,第七項爲a, b, c。則

$b=\dfrac{n-4}{5}a$, $c=\dfrac{n-5}{6}\times b=\dfrac{(n-4)(n-5)}{5\cdot6}a$。由題意。$a+c=2b$。

卽 $a+\dfrac{(n-4)(n-5)}{5\cdot6}a=2\times\dfrac{n-4}{5}a$。 $\therefore\ 30+(n-4)(n-5)=12(n-4)$。

卽 $n^2-21n+98=0$。 $\therefore\ n=7$或14。

24. $(1+x)^n$展開式第二，第三，及第四項之係數。爲等差級數。求其n之值。 答 7。

25. $(1+x)^n$展開式奇數項之和爲a。偶數項之和爲b。則

$$(1-x^2)^n=a^2-b^2。$$

〔證〕 $$(1+x)^n=\left(1+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\underline{|4}}x^4+\cdots\cdots\right)$$

$$+\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}x^3+\cdots\cdots\right)=a+b。\quad\therefore\ (1-x)^n=a-b。$$

$$(1-x^2)^n=(1+x)^n(1-x)^n=a^2-b^2。$$

259. 二項展開式係數之性質

如次之公式

$$(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots+c_rx^r+\cdots\cdots+c_nx^n。\quad(1)$$

但 $c_0=c_n=1,\ c_1=c_{n-1}=n$。總之 $c_r=c_{n-r}=\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|r}\ \underline{|n-r}}$。

〔第一〕 於(1)設$x=1$。則$2^n=c_0+c_1+c_2+c_3+\cdots\cdots+c_n$。故 $(1+x)^n$展開式係數之和等於2^n。

〔第二〕 於(1)設$x=-1$。則$(1-1)^n=c_0-c_1+c_2-\cdots\cdots+(-1)^nc_n$。

$$0=(c_0+c_2+c_4+\cdots\cdots)-(c_1+c_3+c_5+\cdots\cdots)。$$

故二項式之展開式。其奇數項係數之和。等於其偶數項係數之和。

〔第三〕 因$c_r=c_{n-r}$。故$c_0=c_n,\ c_1=c_{n-1}\cdots\cdots$。由是

$$(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots+c_rx^r+\cdots\cdots+c_nx^n。$$

及 $$(1+x)^n=c_n+c_{n-1}x+c_{n-2}x^2+\cdots\cdots+c_{n-r}x^r+\cdots\cdots+c_0x^n。$$

此二級數之積。其在右邊x^n之係數爲$c_0{}^2+c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2+\cdots\cdots+c_n{}^2$。其在左邊。即$(1+x)^n\times(1+x)^n$即$(1+x)^{2n}$。惟$x^n$之係數。依255章得$\dfrac{\underline{|2n}}{\underline{|n}\ \underline{|n}}$。故$(1+x)^n$展開式係數平方之和。等於$\dfrac{\underline{|2n}}{\underline{|n}\ \underline{|n}}$。

〔第四〕 如第三 $(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots+c_nx^n$。

而 $$(1-x)^n=c_n-c_{n-1}x+c_{n-2}x^2-\cdots\cdots+(-1)^nc_0x^n。$$

於此右邊兩級數積中x^n之係數。爲

$$(-1)^n\{c_0{}^2-c_1{}^2+c_2{}^2-\cdots\cdots+(-1)^nc_n{}^2\}。$$

而 $(1+x)^n\times(1-x)^n$。即 $(1-x^2)^n$ 其 x^n 之係數。如 n 係奇數則爲 0。如 n 係偶數。則爲 $(-1)^{\frac{n}{2}}\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|\tfrac{1}{2}n}\,\underline{|\tfrac{1}{2}n}}$。

由是 $c_0{}^2-c_1{}^2+c_2{}^2-\cdots\cdots+(-1)^n c_n{}^2$。因 n 之奇或偶而爲 0。或 $(-1)^{\frac{n}{2}}\dfrac{\underline{|n}}{(\underline{|\tfrac{1}{2}n})^2}$。

例題

1. 試示 $c_1+2c_2+3c_3+\cdots\cdots+rc_r+\cdots\cdots+nc_n=n2^{n-1}$。

〔證〕 $c_1+2c_2+3c_3+\cdots\cdots+rc_r+\cdots\cdots+nc_n$

$$=n+2\frac{n(n-1)}{1\cdot2}+3\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}+\cdots\cdots+r\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}+\cdots\cdots+n$$

$$=n\left\{1+(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot2}+\cdots\cdots+\frac{\underline{|n-1}}{\underline{|r-1}\,\underline{|n-r}}+\cdots\cdots+1\right\}$$

$$=n(1+1)^{n-1}=n2^{n-1}。$$

2. 試示 $c_0-\dfrac{1}{2}c_1+\dfrac{1}{3}c_2-\cdots\cdots+(-1)^n\dfrac{c_n}{n+1}=\dfrac{1}{n+1}$。

〔證〕 $c_0-\dfrac{1}{2}c_1+\dfrac{1}{3}c_2-\cdots\cdots=1-\dfrac{1}{2}n+\dfrac{1}{3}\dfrac{n(n-1)}{1\cdot2}-\cdots\cdots$

$$=\frac{1}{n+1}\left\{n+1-\frac{(n+1)n}{1\cdot2}+\frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot2\cdot3}-\cdots\cdots+(-1)^n\right\}$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}\left\{1-(n+1)+\frac{(n+1)n}{1\cdot2}-\frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot2\cdot3}+\cdots+(-1)^{n+1}\right\}$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}(1-1)^{n+1}=\frac{1}{n+1}。$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}(1-1)^{n+1}=\frac{1}{n+1}。$$

3. n 爲正整數。則

$$\frac{c_0}{x}-\frac{c_1}{x+1}+\frac{c_2}{x+2}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{c_n}{x+n}=\frac{\underline{|n}}{x(x+1)\cdots\cdots(x+n)}。$$

試示明之。

〔證〕 此可用歸納法證明之。先假定本題 x 之一切值。及對於 n 之任何正整數而爲眞者。即

$$\frac{1}{x}-\frac{{}_nC_1}{x+1}+\frac{{}_nC_2}{x+2}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{{}_nC_n}{x+n}=\frac{\underline{|n}}{x(x+1)\cdots\cdots(x+n)}。$$

今以$n+1$代其x。則

$$\frac{1}{x+1}-\frac{{}_nC_1}{x+2}+\frac{{}_nC_2}{x+3}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{{}_nC_n}{x+n+1}=\frac{\lfloor n}{(x+1)(x+2)\cdots\cdots(x+n+1)}。$$

由前之恆同式減此恆同式。則

$$\frac{1}{x}-\frac{{}_nC_1+1}{x+1}+\frac{{}_nC_2+{}_nC_1}{x+2}-\cdots\cdots+(-1)^r\frac{{}_nC_r+{}_nC_{r-1}}{x+r}+\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{x+n+1}$$

$$=\frac{\lfloor n+1}{x(x+1)\cdots\cdots(x+n+1)}。$$

但由**247**章對於r之任何正整數爲${}_nC_r+{}_nC_{r-1}={}_{n+1}C_r$。

由是上之恆同式。爲

$$\frac{1}{x}-\frac{{}_{n+1}C_1}{x+1}+\frac{{}_{n+1}C_2}{x+2}-\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\frac{{}_{n+1}C_{n+1}}{x+n+1}=\frac{\lfloor n+1}{x(x+1)\cdots\cdots(x+n+1)}。$$

故本題對於n項之某值而爲眞者。此對於n任大之值亦爲眞。然$n=1$能合於本題。故$n=2$亦必合於本題。由斯推之。n爲$3, 4,$ $\cdots\cdots$。凡對於一切之正整數。當無有不合者。本題之反證法。則詳於後之**297**章例題3。

〔餘論〕 以x之特別值代入之。可得$c_0, c_1, \cdots\cdots$之關係。

若$x=1$。則 $\frac{c_0}{1}-\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{3}-\cdots\cdots+\frac{1}{n+1}$。而$x=\frac{1}{2}$。則

$$\frac{c_0}{1}-\frac{c_1}{3}+\frac{c_2}{5}-\cdots\cdots=\frac{2^n\lfloor n}{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n+1)}。$$

4. $c_0a-c_1(a-1)+c_2(a-2)-c_3(a-3)+\cdots\cdots+(-1)^nc_n(a-n)=0$。

及 $c_0a^2-c_1(a-1)^2+c_2(a-2)^2-c_3(a-3)^2+\cdots\cdots+(-1)^nc_n(a-n)^2=0$。

〔證〕 由第二設n爲任意之正整數。則

$$1-n+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}+\cdots\cdots+(-1)^n=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$n>1$，則$n-1$爲正整數。故於(1)用$n-1$以代其n。

$$1-(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot2}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

以a乘(1)以n乘(2)而相加。得

$$a-n(a-1)+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}(a-2)-\cdots\cdots+(-1)^n(a-n)=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$\therefore\quad c_0a-c_1(a-1)+c_2(a-2)-\cdots\cdots+(-1)^nc_n(a-n)=0$, 但$n>1$。

$n>2$。則於(3)之n尙可減1。故於(3)以$n-1$代n。且以$a-1$代a。

則 $a-1-(n-1)(a-2)+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}(a-n)=0$……………………(4)

以a乘(3)以n乘(4)而相加。則

$$a^2-n(a-1)^2+\frac{n(n-1)}{1.2.}(a-2)^2-\cdots\cdots+(-1)^n(a-n)^2=0。$$

$$c_0a^2-c_1(a-1)^2+c_2(a-2)^2-\cdots\cdots+(-1)^nc_n(a-n)^2=0,\ 但\ n>2。$$

〔餘論〕 準此方法推之。則

$$a^p-n(a-1)^p+\frac{n(n-1)}{1.2.}(a-2)^p-\cdots\cdots+(-1)^n(a-n)^p=0。$$

但p爲小於n之正整數。見**305**章。

260. 二項因子之積

求$x+a, x+b, x+c,\cdots\cdots n$因子之積。如次之記法爲便。

於諸字中每取壹字之和$a+b+c+\cdots\cdots$以S_1代之。於諸字中每取二字相乘之和$ab+ac+\cdots\cdots$。以S_2代之。總之於諸字中每取r字相乘之和。則以S_r代之。

今所求者。爲二項因數$(x+a)(x+b)(x+c)\cdots\cdots$之積。

自此二項因數之各項。每取一字相乘。卽所求連乘積之一項。故此連乘積。等於每次一字各相乘積之和。

先從各因子中取x。此祇有一法。故x^n爲連乘積之一項。

又於$a, b, c,\cdots\cdots$諸字中任取一字。於其餘$n-1$因子取x。則得$ax^{n-1}, bx^{n-1}, cx^{n-1},\cdots\cdots$其和爲$S_1x^{n-1}$。

又於$a, b, c,\cdots\cdots$諸字中任取二字。於其餘$n-2$因子取x。則得$abx^{n-2}, acx^{n-2},\cdots\cdots$其和爲$S_2x^{n-2}$。

總之於$a, b, c,\cdots\cdots$諸字中任取r個字。於其餘$n-r$因子取x。其各乘積之和爲S_rx^{n-r}。

由是 $(x+a)(x+b)(x+c)\cdots\cdots$

$$=x^n+S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}+\cdots\cdots+S_rx^{n-r}+\cdots\cdots+S_n。$$

此末項S_n。卽$abc\cdots\cdots$至n因子之積也。

若$a,b,c,\cdots\cdots$變爲負。則$S_1, S_3, S_5,\cdots\cdots$爲負。而$S_2, S_4, S_6,\cdots\cdots$爲正。

由是 $(x-a)(x-b)(x-c)\cdots\cdots$

$$=x^n-S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}-\cdots\cdots+(-1)^rS_rx^{n-r}+\cdots\cdots+(-1)^nS_n。$$

261. 文覃蒙 Vandermonde 氏定理之證 此定理如 249 章所載。而次之證明。則考自 Cayley 氏 (在 Messenger of Mathematics 第五卷)。

設 n 為正整數。a 及 b 為任意之數量。則由 249 章。

得 $(a+b)_n=a_n+na_{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.2.}a_{n-2}b_2+\cdots+\frac{\lfloor n}{\lfloor r\lfloor n-r}a_{n-r}b_r+\cdots+b_n$。

假定 n 為任何正整數。而此定理恆為眞。則於其左邊。即

$(a+b)_n=(a+b)(a+b-1)(a+b-2)\cdots\cdots(a+b-n+1)$, 以 $a+b-n$ 乘之。

得 $(a+b)_n\times(a+b-n)=(a+b)(a+b-1)\cdots\cdots(a+b-n+1)(a+b-n)$

$$=(a+b)_{n+1}。$$

又此右邊之級數。亦以 $a+b-n$ 乘之。惟此乘數可變成種種之形。以乘各項如次。

第一項以 $\{(a-n)+b\}$ 乘。

第二項以 $\{(a-n+1)+(b-1)\}$ 乘。

第三項以 $\{(a-n+2)+(b-2)\}$ 乘。

第 r 項以 $\{(a-n+r-1)+(b-r+1)\}$ 乘。

如是上之恆同式為

$$\begin{aligned}(a+b)_{n+1}=a_n\{(a-n)+b\}&+{}_nc_1a_{n-1}b\{(a-n+1)+(b-1)\}\\&+{}_nc_2a_{n-2}b_2\{(a-n+2)+(b-2)\}+\cdots\cdots\\&+{}_nc_{r-1}a_{n-r+1}b_{r-1}\{(a-n+r-1)+(b-r+1)\}\\&+{}_nc_ra_{n-r}b_r\{(a-n+r)+(b-r)\}+\cdots\cdots\\&+b_n\{a+(b-n)\}。\end{aligned}$$

但 $a_n\{(a-n)+b\}=a_n(a-n)+a_nb=a_{n+1}+a_nb_1$,

${}_nc_1a_{n-1}b_1\{(a-n+1)+(b-1)\}={}_nc_1(a_nb_1+a_{n-1}b_2$,

${}_nc_{r-1}a_{n-r+1}b_{r-1}\{(a-n+r-1)+(b-r+1)\}={}_nc_{r-1}(a_{n-r+2}b_{r-1}+a_{n-r+1}b_r)$,

${}_nc_ra_{n-r}b_r\{(a-n+r)+(b-r)\}={}_nc_r(a_{n-r+1}b_r+a_{n-r}b_{r+1})$,

………………………………………

$b_n\{a+(b-n)\}=a_1b_n+b_{n+1}$。

由是 $(a+b)_{n+1}=a_{n+1}+(1+{}_nc_1)a_nb_1+\cdots\cdots$

$$+({}_nc_{r-1}+{}_nc_r)a_{n+1-r}b_r+\cdots\cdots+b_{n+1}。$$

惟 ${}_nc_{r-1}+{}_nc_r={}_{n+1}c_r$。

故 $(a+b)_{n+1}=a_{n+1}+{}_{n+1}c_1a_nb_1+\cdots\cdots+{}_{n+1}c_ra_{n+1-r}b_r+\cdots\cdots+b_{n+1}$。

由是此定理。若對於n任何之正整數值爲眞。則對於$n+1$之値亦爲眞。惟$n=2$此定理知其爲眞。故$n=3$亦必爲眞。順次$4, 5,\cdots\cdots$亦無不眞矣。

262. 多項式之定理 多項式$a+b+c+\cdots\cdots$之n方乘。亦可由二項式之方法求得。但n爲正整數。

$(a+b+c+d+\cdots\cdots)^n$。卽 $\{a+(b+c+d+\cdots\cdots)\}^n$ 其展開式之公項。由二項式定理而得 $\dfrac{\lfloor n}{\lfloor r\ \lfloor n-r}a^r(b+c+d+\cdots\cdots)^{n-r}$。

由同理 $(b+c+d+\cdots\cdots)^{n-r}$ 展開式之公項。爲

$$\frac{\lfloor n-r}{\lfloor s\ \lfloor n-r-s}b^s(c+d+\cdots\cdots)^{n-r-s}。$$

$(c+d+\cdots\cdots)^{n-r-s}$ 之公項。爲

$$\frac{\lfloor n-r-s}{\lfloor t\ \lfloor n-r-s-t}c^t(d+\cdots\cdots)^{n-r-s-t}。\text{以下類推。}$$

由是 $(a+b+c+d+\cdots\cdots)^n$ 展開式之公式。爲

$$\frac{\lfloor n}{\lfloor r\ \lfloor n-r}\times\frac{\lfloor n-r}{\lfloor s\ \lfloor n-r-s}\times\frac{\lfloor n-r-s}{\lfloor t\ \lfloor n-r-s-t}\times\cdots\cdots a^rb^sc^t\cdots\cdots。$$

卽 $$\frac{\lfloor n}{\lfloor r\ \lfloor s\ \lfloor t\cdots\cdots}a^rb^sc^t\cdots\cdots。$$

但 $r, s, t\cdots\cdots$ 各値爲零或爲正整數。而 $r+s+t+\cdots\cdots=n$。

〔別證〕 上之結果。可由**253**章之方法得之。

惟以連乘積 $(a+b+c+\cdots\cdots)(a+b+c+\cdots\cdots)\cdots\cdots$ 之任一項。等於從諸因子各取其任一項相乘之積。

故 $a^rb^sc^t\cdots\cdots$。先從n因子內之r因子取a。其方法之數爲${}_nc_r$。然後從其餘$n-r$因子內之s因子取b。其方法之數爲${}_{n-r}c_s$。又從其餘$n-r-s$因子內之t因子取c。其方法之數爲${}_{n-r-s}c_t$。以下類推如是其方法之全數。爲 ${}_nc_r\times{}_{n-r}c_s\times{}_{n-r-s}c_t\times\cdots\cdots$

卽 $\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}\times\dfrac{\underline{|n-r}}{\underline{|s}\,\underline{|n-r-s}}\times\dfrac{\underline{|n-r-s}}{\underline{|t}\,\underline{|n-r-s-t}}\times\cdots\cdots=\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|s}\,\underline{|t}\cdots\cdots}$。

由是 $(a+b+c+\cdots\cdots)^n$ 展開式之公項。爲

$$\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|s}\,\underline{|t}\cdots\cdots}a^rb^sc^t\cdots\cdots。$$

例　題

1. 求 $(a+b+c)^3$ 展開式中 abc 之係數。

〔解〕 以 $=3$, $r=s=t=1$ 代入公項之公式中。而得所求之係數。爲 $\dfrac{\underline{|3}}{\underline{|1}\,\underline{|1}\,\underline{|1}}=6$。

2. 求 $(a+b+c+d)^4$ 展開式中 a^2b^2, bcd^2, $abcd$ 之係數。

〔解〕 求得各項爲 $\dfrac{\underline{|4}}{\underline{|2}\,\underline{|2}}a^2b^2$, $\dfrac{\underline{|4}}{\underline{|1}\,\underline{|1}\,\underline{|2}}bcd^2$, $\dfrac{\underline{|4}}{\underline{|1}\,\underline{|1}\,\underline{|1}\,\underline{|1}}abcd$。故其各項係數爲 6, 12, 24。

263. 多項式公項之係數 用前章求公項之公式。則得 $(a+bx+cx^2+dx^3+\cdots\cdots)^n$ 展開式之公項。爲

$$\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|s}\,\underline{|t}\,\underline{|u}\cdots\cdots}a^r(bx)^s(cx^2)^t(dx^3)^u\cdots\cdots。$$

卽

$$\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|s}\,\underline{|t}\,\underline{|u}\cdots\cdots}a^rb^sc^td^u\cdots\cdots x^{s+2t+3u+\cdots\cdots}。$$

由是於此展開式中求其 x 之特別方乘。如 x^a 之係數。則可取其適合於次之方程式。所有 $r, s, t, \cdots\cdots$ 各異之正整數值。

$$s+2t+3u+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=a,$$

$$r+s+t+u+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=n。$$

由此方程式。求得 $r, s, t\cdots\cdots$ 各相當值之和。卽可求得其係數。

例　題

1. 求 $(1+2x+3x^2)^4$ 展開式中 x^5 之係數。　　答 312。

〔解〕 $(1+2x+3x^2)^4$ 之公項爲 $\dfrac{\underline{|4}}{\underline{|r}\,\underline{|s}\,\underline{|t}}1^r2^s3^tx^{s+2t}$。