普通高等教育“十五”国家级规划教材

（高职高专教育）

# 实用微积分

任开隆　主编

高等教育出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材
（高职高专教育）

# 实用微积分

任开隆　主编

高等教育出版社

**内容提要**

本书是普通高等教育"十五"国家级规划教材，是教育部《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革建设项目计划》中立项的研究课题"高职高专教育高等数学课程教学内容体系改革、建设的研究与实践"的主要成果之一。内容包括函数极限连续、微分学及其应用、积分学及其应用、微分方程、逼近与级数、Mathematica 简介。节末精心安排了思考题，以帮助学生进一步理解本节的内容，节末还有习题，书末附有习题答案。

本书是根据"课题组"新制订的高职高专"理工类高等数学课程教学基本要求"编写的，本书力求简洁、通俗易懂、便于自学，坚持贯彻以应用为目的，书中列举了一些日常生活中有趣的实例，以提高学生的学习兴趣和运用数学知识解决实际问题的能力；编者坚持理论"以必需、够用为度"的原则，突出三个基本，即"基本概念、基本思想、基本方法"，力求使学生在较为系统地掌握数学概念、思想和方法的同时，掌握数学的基本结论，为他们今后的工作与学习打下必要的数学基础与良好的数学素质。在编写过程中，我们努力使本教材成为学生易学、教师易教的实用性较强的教材。

本书既适合高职高专院校使用，也适合成人高校及职业技术学院和民办高校使用。

**图书在版编目(CIP)数据**

实用微积分/任开隆主编.—北京:高等教育出版社，2004.6(2005 重印)

ISBN 7-04-014695-9

Ⅰ.实…　Ⅱ.任…　Ⅲ.微积分-高等学校:技术学校-教材　Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 029164 号

**策划编辑**　蒋　青　　**责任编辑**　蒋　青　　**封面设计**　杨立新　　**责任绘图**　杜晓丹
**版式设计**　王艳红　　**责任校对**　胡晓琪　　**责任印制**　韩　刚

| | | | |
|---|---|---|---|
| **出版发行** | 高等教育出版社 | **购书热线** | 010-58581118 |
| **社　　址** | 北京市西城区德外大街 4 号 | **免费咨询** | 800-810-0598 |
| **邮政编码** | 100011 | **网　　址** | http://www.hep.edu.cn |
| **总　　机** | 010-58581000 | | http://www.hep.com.cn |
| | | **网上订购** | http://www.landraco.com |
| **经　　销** | 北京蓝色畅想图书发行有限公司 | | http://www.landraco.com.cn |
| **印　　刷** | 北京市鑫霸印务有限公司 | | |
| **开　　本** | 787×1092　1/16 | **版　　次** | 2004 年 6 月第 1 版 |
| **印　　张** | 16 | **印　　次** | 2005 年 9 月第 2 次印刷 |
| **字　　数** | 380 000 | **定　　价** | 17.10 元 |



**物料号　14695-00**

# 出版说明

为加强高职高专教育的教材建设工作，2000年教育部高等教育司颁发了《关于加强高职高专教育教材建设的若干意见》(教高司[2000]19号)，提出了“力争经过5年的努力，编写、出版500本左右高职高专教育规划教材”的目标，并将高职高专教育规划教材的建设工作分为两步实施：先用2至3年时间，在继承原有教材建设成果的基础上，充分汲取近年来高职高专院校在探索培养高等技术应用性专门人才和教材建设方面取得的成功经验，解决好高职高专教育教材的有无问题；然后，再用2至3年的时间，在实施《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上，推出一批特色鲜明的高质量的高职高专教育教材。根据这一精神，有关院校和出版社从2000年秋季开始，积极组织编写和出版了一批“教育部高职高专规划教材”。这些高职高专规划教材是依据1999年教育部组织制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》(草案)和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》(草案)编写的，随着这些教材的陆续出版，基本上解决了高职高专教材的有无问题，完成了教育部高职高专规划教材建设工作的第一步。

2002年教育部确定了普通高等教育“十五”国家级教材规划选题，将高职高专教育规划教材纳入其中。“十五”国家级规划教材的建设将以“实施精品战略，抓好重点规划”为指导方针，重点抓好公共基础课、专业基础课和专业主干课教材的建设，特别要注意选择一部分原来基础较好的优秀教材进行修订使其逐步形成精品教材；同时还要扩大教材品种，实现教材系列配套，并处理好教材的统一性与多样化、基本教材与辅助教材、文字教材与软件教材的关系，在此基础上形成特色鲜明、一纲多本、优化配套的高职高专教育教材体系。

普通高等教育“十五”国家级规划教材(高职高专教育)适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用。

教育部高等教育司<br>2002年11月30日

# 前　言

我们关于高职高专数学课程的改革，开始于1996年在北京市教委立项的《高职班“应用数学与计算”课程内容与体系的改革》，按照尊重科学性、不恪守学科性、强调应用性的原则，制订了高职数学的教学大纲与教学基本要求，编写了《应用数学与计算》和《应用数学与计算——实训》教材，后来被教育部定为全国高职高专数学课程的推荐教材。近年来，由于高等学校的不断扩招，高等教育已经从精英教育转变为大众教育。与此同时，随着社会经济结构的不断变化，人们的教育理念也在不断更新，终身教育的思想正在被越来越多的人们所接受。正在蓬勃发展的高等职业教育必须不断改进，才能适应新的形势。基础课程的改革也不例外。2000年教育部《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革建设项目计划》中立项的研究课题“高职高专教育高等数学课程教学内容体系改革、建设的研究与实践”正式启动，在课题负责人宣立新教授领导下，我们编写了这本《实用微积分》。这本书是该课题的成果之一，是一本面向高职高专学生的数学教材。

高职高专教育的培养目标是具有一定科学文化水平的应用性人才。由于他们将工作在生产建设第一线，始终位于科技更新、产业调整的最前沿，因此，他们不仅需要具有熟练的工作技能以适应当前的需要，更要具备不断学习、不断提高的能力，即终身学习的能力，才能适应时代的发展；他们不仅需要掌握一定的科学知识，更要具备良好的素质。根据这一特点，我们制订了高职高专数学新的教学大纲与教学基本要求，在编写教材时，坚持贯彻以应用为目的，以必需、够用为度的原则，突出三个基本，即“基本概念、基本思想、基本方法”，力求使学生在较为系统地掌握数学概念、思想和方法的同时，掌握数学的基本结论，学会用数学去思考问题，提高学生运用数学知识解决实际问题的能力，培养良好的数学素质，为他们今后的工作与学习打下必要的数学基础。

本书在内容叙述上，尽量采用通俗语言，力求简洁、易懂，便于自学。同时也保证内容阐述的科学性与准确性。既要激发基础好的学生多思考，又要使基础薄弱的学生容易理解。例如，在讲述极限概念时，虽然没有使用“$\varepsilon-\delta$”语言，但通过对函数图形与函数值变化的分析，看出了函数$f(x)$与极限值$A$之差的绝对值$|f(x)-A|$无限变小的趋势。这样既避开了抽象难懂的精确定义，又讲清了极限概念的本质——逼近的思想。

本书采用问题驱动式，对于每个数学概念的引入，力求从实际问题出发，突出问题的实际背景。尽量采用“提出问题—分析问题—解决问题”的途径讲清抽象的数学概念。在选择实例时，以目标明确、重点突出为准则，为此我们采用了很多经典的传统实例。例如，瞬时速度问题、曲边梯形的面积等。这是因为考虑到这些问题比较简单，几乎不涉及其他学科的知识，便于学生集中精力理解相关的数学概念。教学实践证明这些实例的教学效果确实是非常理想的。

数学是一门高度抽象的学科，只有正确把握数学与现实世界相互作用的关系，才能深刻理解数学的本质。本书对有些重要的定理给出了证明，而相当多的定理没有给出证明，只给出条件和

结论，让学生学会使用；有兴趣的学生可以查看参考书目。由于数学的课堂教学是以抽象思维和逻辑推理为主要形式的，为了帮助学生理解抽象的概念、定理和结论，掌握数学的方法，启发学生解决问题的思路，本书在讨论问题时尽可能应用直观的几何图形、数值表格进行解释、说明，使得枯燥、抽象的数学问题变得生动、具体，容易理解。在引入连续的概念时，首先通过四个图形对连续的概念进行直观解释，在教学中绝大多数学生都能够准确指出哪一个函数在 $x_0$ 点是连续的，然后再对图形进行分析，很自然地得出了连续的定义。在引入函数的极值的概念时，我们给出了不连续的、连续的和可微的三个图形，让学生观察、分析和讨论哪些点是函数的极值点哪些点不是函数的极值点？通过讨论绝大多数学生掌握了极值的概念，认为这样讲对概念的理解非常清楚，教学效果很好。为了强调数学理论的实用性，突出运用数学的方法，我们特别介绍了方向导数和梯度，提出测量湖底深度的问题。在这个例子中，没有函数具体的表达式，也就无法计算偏导数和梯度，但是通过测量和计算可以得到偏导数和梯度的近似值，沿着近似的负梯度方向一步一步地寻找到湖底最深处，使学生了解了数学方法在实际问题中是如何应用的。我们在给出数学的一般性结论后，尽量给出一些更现实、更具体的应用问题。在微分方程一章中，我们选用了减肥模型、在谋杀案件中如何判定死亡的时间及在交通事故的勘察中如何判定刹车前的车速等问题。由于这些实例与现实生活联系紧密、生动有趣，极大地提高了学生的学习兴趣。

本教材在课程体系方面与其他教材不同的是特别强调了微分概念，突出了微分法的应用。在微分学部分中，我们利用一元函数的微分求出反函数的导数，又利用一元函数的微分形式不变性给出复合函数、隐函数和由参数方程所确定的函数的求导法则，使这些求导方法变得统一，便于运算。实践表明这样的讲法学生容易理解，并且不容易出现计算错误。特别是隐函数的求导问题，过去学生在学习中，常常不能理解在所给的方程 $F(x,y)=0$ 中 $y$ 是 $x$ 的函数这一事实，因此在对方程两端求导时，经常丢掉 $y'$，采用微分计算后，避开了学生容易出错的地方，使得隐函数求导的正确率有很大的提高。同时由于强调了微分，学生对函数的微分形式十分熟悉，这使得在计算积分时，分部积分公式便于记忆，也使得凑微分法与分部积分法变得简单容易。在求解一阶线性非齐次微分方程时，我们采用了参考书目 10 中的办法，使用微分求解简练易懂。在定积分中我们强调了“微元法”，反复阐述“以直代曲”、“以常量代变量”的思想，使学生接受和掌握“微元法”，并能应用“微元法”根据实际问题列出微分方程，顺畅解决实际问题。

另外，在泰勒公式的证明中，我们采用了参考书目 9 中的办法，使证明简单明了。

由于微型计算机的普及与发展，符号运算很容易实现，函数求导都可以由计算机完成，但是有的积分，计算机却不会，只要做一个简单的换元后，计算机就可以完成。因此，本书在内容、例题与习题的选择上均以帮助学生理解基本概念、掌握基本计算方法为目的。没有出现单纯技巧性、复杂计算或很难的题目。每节的后面都精心安排了思考题以帮助学生进一步理解本节内容。

我们希望通过本课程的学习，不仅使学生学到数学的知识，更应该有利于他们开阔眼界，养成正确的思维方式，有利于学生综合素质的提高。在编写过程中，我们努力使本教材成为学生易学、教师易教的实用性较强的教材。

本教材经过两届学生试用，基本教学时数都在 96 学时左右，可以根据学生的基础灵活掌握。

参加本教材编写的有钱瑛（第一章、第六章）、曹彩霞（第二章）、史凤丽（第三章）、车燕（第四章、第五章），任开隆负责全部教材的框架结构、统稿、定稿。

北京航空航天大学李心灿教授认真审阅了全部教材的原稿，提出了许多很好的有价值的意

见和建议，在此我们对李心灿教授表示衷心的感谢。

课题组的同事们对本教材的初稿进行了初审，提出了不少宝贵的意见；北京联合大学基础部李英教授看了全部教材的原稿，提出了不少改进的意见；华乐康副教授提出了许多很好的建议，有关函数极值的三个图形及定积分换元中的“出新元伴新限、新元不出现，上下限不变”等都是华乐康副教授宝贵的教学经验的总结；尚学海副教授、陈正一副教授、陈冬副教授、曾庆黎副教授、邢春峰、张静等老师也看了教材的部分原稿，提出了不少宝贵的意见，对此编者一并表示深深的谢意。

我们还要感谢北京联合大学领导、基础课部领导及老主任武继玉教授的关心和支持。

本书的编写和出版，自始至终得到了高等教育出版社及高职高专分社的大力支持和帮助，在此一并致以诚挚的谢意。

由于我们的水平所限，本教材必有不少缺点和错误，敬请广大师生、读者批评指正。

编　者

2004 年元旦于北京

# 目　　录

# 第一章　函数　极限　连续

函数是数学最基本的概念，极限、连续是微积分的两个重要概念．在中学，我们对函数的概念已经有了初步的了解，也熟悉了一些函数．本章将在此基础上对函数及相关内容作进一步的补充，并讨论函数的极限与连续等问题．

## 第一节　函　数

### 一、引例

在研究自然现象和科学问题时，常常会碰到两种不同的量．一种量在研究过程中始终保持不变，称为常量．另一种量在研究过程中取值会发生变化，称为变量．通常用字母 $a,b,c\cdots$ 等表示常量，用字母 $x,y,z,t\cdots$ 等表示变量．在同一问题中，往往存在着几个变量，而它们又是相互依赖，按照一定的规律变化的．下面我们来看几个例子（以两个变量为例）．

**引例 1**　已知圆的半径为 $r$，则其面积 $A$ 为　$A=\pi r^2$．

**引例 2**　2002 年 8 月 1 日至 8 月 10 日北京地区每天最高气温（如表 1－1）．

**表 1－1　北京地区日最高气温表**

| 日期 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 气温（℃） | 34 | 37 | 34 | 33 | 32 | 30 | 29 | 30 | 28 | 30 |

**引例 3**　下面是两位患者的心电图．

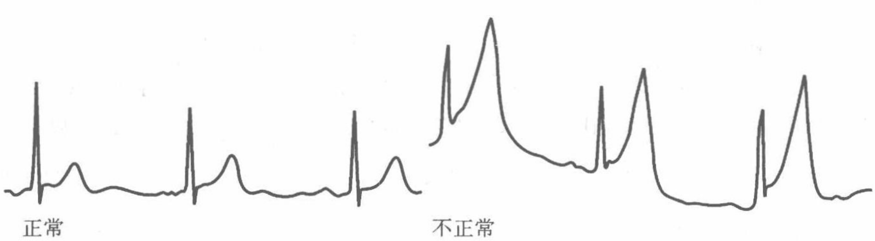



图 1－1　两位患者的心电图

以上几个例子虽然涉及的问题各不相同，但它们都表达了两个变量之间的一种对应关系，而这种变量之间的对应关系就是函数概念的实质．

## 二、函数

**定义 1.1** 设在某个变化过程中有两个变量 $x$ 和 $y$,$D$ 为一个实数集合. 若对于每一个 $x\in D$,变量 $y$ 依照某一规则 $f$ 总有一个确定的数值与之对应,则称 $f$ 是定义在 $D$ 上的函数. $x$ 称为自变量,$y$ 称为因变量,也常常称 $y$ 为 $x$ 的函数,记作 $y=f(x)$. $D$ 称为函数 $f(x)$ 的定义域. 集合 $Y=\{y=f(x)\mid x\in D\}$ 称为函数 $f(x)$ 的值域.

一般地,函数的定义域是指使函数表达式有意义的全体点的集合.

由定义 1.1 可知在上述引例中,圆的面积 $A$ 是半径 $r$ 的函数,最高气温是日期的函数,心肌输出电压是时间 $t$ 的函数.

今后在对函数的讨论中,经常用到一个概念——邻域.

设 $a$ 与 $\delta$ 是两个实数,且 $\delta>0$,点集 $\{x\mid |x-a|<\delta\}$ 称为点 $a$ 的 $\delta$ 邻域,记作 $U(a,\delta)$,或简记为 $U(a)$. 点 $a$ 称为邻域的中心,$\delta$ 称为邻域的半径.

因为 $|x-a|<\delta\Leftrightarrow a-\delta<x<a+\delta$,

所以 $U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$,即 $U(a,\delta)$ 就是开区间 $(a-\delta,a+\delta)$.

$U(\hat{a},\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$ 称为点 $a$ 的去心邻域,或简记为 $U(\hat{a})$. 这里 $0<|x-a|$ 表示 $x\neq a$.

**例 1.1.1** 确定函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-\lg\dfrac{x}{x-2}$ 的定义域.

**解** 设 $y_1=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, $y_2=\lg\dfrac{x}{x-2}$.

对于 $y_1$,应有 $\sqrt{x-1}>0$,即 $x>1$;对于 $y_2$,应有 $\dfrac{x}{x-2}>0$,即 $x>2$ 或 $x<0$;对于所给函数,应有 $x>2$. 所以所求函数的定义域应为 $(2,+\infty)$.

在引例 1 中已知圆的半径 $r$ 时,则其面积 $A=\pi r^2$,此时 $A$ 是 $r$ 的函数. 若已知圆的面积 $A$,求它的半径 $r$ 呢? 显然有 $r=\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$,这时,面积 $A$ 是自变量,$r$ 是 $A$ 的函数. 这里称函数 $r=\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$ 为函数 $A=\pi r^2$ 的反函数.

**定义 1.2** 已知函数 $y=f(x)$,若把 $y$ 看作是自变量,$x$ 看作是因变量,由关系式 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数,而 $y=f(x)$ 称为直接函数.

由于习惯用 $x$ 表示自变量而用 $y$ 表示函数,因此常常将 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 写成 $y=\varphi(x)$. $y=f(x)$ 与 $y=\varphi(x)$ 互为反函数,例如 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 与 $y=x^3-1$ 互为反函数.

## 三、函数的表示法

函数的表示方法常用的有三种:表格法、图示法和公式法(解析法).

**1. 表格法** 将自变量的某些取值与其对应的函数值列成表格表示函数的方法称为表格法. 如引例 2、数学用表等都是用表格法来表示函数的. 这种表示法使用方便,但数据有限.

**2. 图示法** 用图形表示函数的方法称为图示法. 如引例 3. 这种方法直观性强,但不便于理论上的推导运算.

**3. 公式法** 用数学式表示函数的方法称为公式法，又称为解析法．如引例 1．在以后的讨论中，函数几乎都是用公式法表示的．这种表示法便于对函数进行理论上的研究，但不够直观．

在用公式法表示函数时，常常会碰到下面几种情况．

(1) 分段函数

**例 1.1.2** 某商场进行促销活动，规定购买某种商品 2 千克以下(含 2 千克)，每千克 5 元，超过 2 千克者，超过部分 8 折．请写出购买量 $x$ 与应付款 $y$ 之间的函数关系，并求出购买 10 千克此商品所需的款数．

**解** 由题意有
$$y=\begin{cases}5x, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 10+4(x-2), & x>2,\end{cases}$$

当 $x=10$ 时， $y=10+4(10-2)=42$．

在很多实际问题中，常常要根据自变量的不同取值范围，用不同的式子来表示一个函数，这种函数称为分段函数．上例中所得函数就是一个分段函数．再如
$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$
也是一个分段函数．

**例 1.1.3** 设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & x=0,\\ x^2, & x>0,\end{cases}$

(1) 画出 $f(x)$ 的图形； (2) 求出 $f(x)$ 的定义域； (3) 求出 $f(-2)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(2)$．

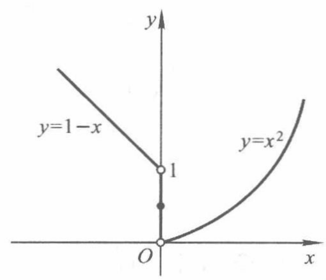


图 1－2

**解** (1) $f(x)$ 的图形如图 1－2；

(2) 由上式可得 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$；

(3) $f(-2)=1-x\big|_{x=-2}=1-(-2)=3$，

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=x^2\Big|_{x=\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4},$$

$$f(2)=x^2\big|_{x=2}=2^2=4.$$

(2) 隐函数

在函数的公式表示法中，一般是把函数 $y$ 用含有自变量 $x$ 的式子表示，例如 $y=\sin x$，$y=3x^2+2x-1$ 等等，这样的函数一般称为显函数．但在很多问题中也常常用一个含有 $x$，$y$ 的二元方程来表示一个确定的函数，例如 $x-1+y^3=0$，$e^x+xy-e^y=0$ 等等．这些方程都确定了 $x$ 与 $y$ 的对应关系，这样的函数称为隐函数．有些隐函数可以表示成显函数的形式，例如 $x-1+y^3=0$ 可以化成显函数 $y=\sqrt[3]{1-x}$．但有些隐函数则不可能表示成显函数，例如 $e^x+xy-e^y=0$．因此隐函数是表达函数的一种必不可少的形式．

(3) 用参数方程确定的函数

变量 $x$ 与 $y$ 之间的函数关系也可以通过一个参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$，$(t\in T)$ 来表示．例如函数

$y=\sqrt{1-x^2}$可以表示为$\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t\end{cases}$$(0\leqslant t\leqslant\pi)$.又如摆线的函数表达式为$\begin{cases}x=a(\theta-\sin\theta),\\ y=a(1-\cos\theta).\end{cases}$这样的函数称为由参数方程确定的函数.

## 四、函数的几种特性

设函数 $y=f(x)$,$D$ 为其定义域.

**1. 有界性** 设 $X\subset D$,若存在常数 $M>0$,使得对于每一个 $x\in X$,有$|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$在 $X$ 上有界,否则称 $f(x)$在 $X$ 上无界.

例如 $y=\sin x$,$y=\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界;

$y=\dfrac{1}{x}$在$(-1,0)\cup(0,1)$无界(如图 1-3).

**2. 单调性** 设区间 $I\subset D$、任取 $x_1$、$x_2\in I$,当 $x_1<x_2$时,若恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 $I$ 上是单调增加的;若恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 $I$ 上是单调减少的.单调增加与单调减少的函数统称为单调函数.

从几何直观上看,单调增加(减少)的函数其图形是自左向右上升(下降)的(如图 1-4).

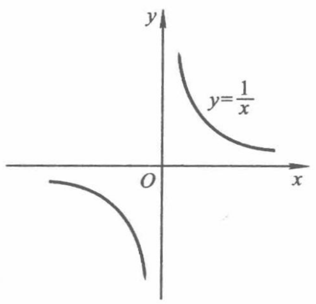



图 1-3

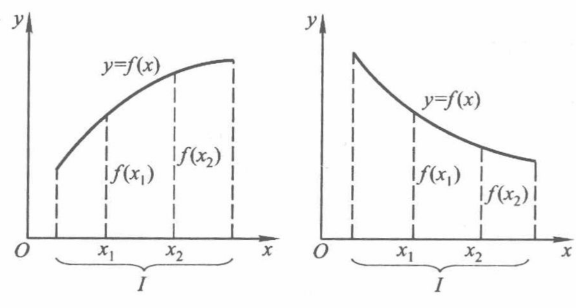



图 1-4

**3. 奇偶性** 对于每一个 $x\in(-a,a)$ $(a>0)$,若有 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$为奇函数,若有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$为偶函数.

奇函数的图形关于原点对称,偶函数的图形关于 $y$ 轴对称(如图 1-5).

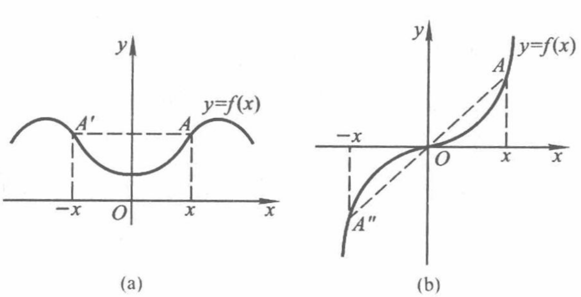



图 1-5

**4. 周期性** 设存在常数 $T\neq 0$,使得对于每一个 $x\in D$,有 $x\pm T\in D$,且 $f(x\pm T)=f(x)$

恒成立,则称函数 $f(x)$为周期函数.通常称使得上式成立的最小正数 $T$ 为函数$f(x)$的周期.

例如,$y=\sin x$,$y=\cos x$ 是周期为 $2\pi$ 的周期函数,$y=\tan x$,$y=\cot x$ 是周期为 $\pi$ 的周期函数.

若 $l\in D$,则周期函数的图形在区间$[l+kT,l+(k+1)T]$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$上是相同的(如图 1-6).

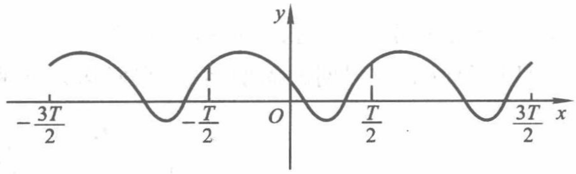



图 1-6

## 五、初等函数

1. 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数等五类函数称为基本初等函数.

(1) 幂函数 $y=x^{\alpha}$($\alpha$ 为常数,$-\infty<\alpha<+\infty$)

其定义域随指数 $\alpha$ 而定.但无论 $\alpha$ 取何值,幂函数在$(0,+\infty)$内总是有定义的.其图像如图 1-7.

(2) 指数函数 $y=a^{x}$($a>0,a\neq1$)

其定义域为$(-\infty,+\infty)$,$\forall a$,$y=a^{x}$都过点$(0,1)$,其图像如图 1-8(a).

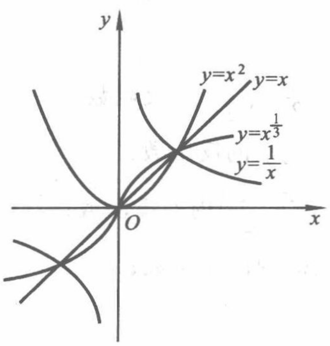
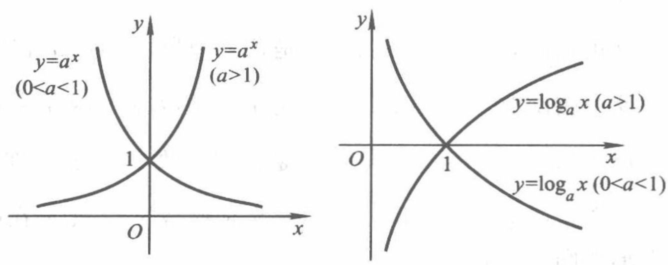



图 1-7　幂函数 $y=x^{\alpha}$




(a) 指数函数 $y=a^{x}$($a>0,a\neq1$)　(b) $y=\log_{a}x$ ($a>0,a\neq1$)

图 1-8

当 $a>1$ 时,$y=a^{x}$单调增加,当 $0<a<1$ 时,$y=a^{x}$单调减少.

在科技工程问题中常用的是底数为 $e=2.718\,28\cdots$的指数函数 $y=e^{x}$.

(3) 对数函数　$y=\log_{a}x$ ($a>0,a\neq1$)

对数函数 $y=\log_{a}x$ 是指数函数 $y=a^{x}$ 的反函数,其定义域为$(0,+\infty)$,其图像如图 1-8(b).

当 $a>1$ 时,$y=\log_{a}x$ 是单调增加的,当 $0<a<1$ 时,$y=\log_{a}x$ 是单调减少的.

特别地,以 e 为底的对数函数称为自然对数,记作 $y=\ln x$.

(4) 三角函数

常用的三角函数有

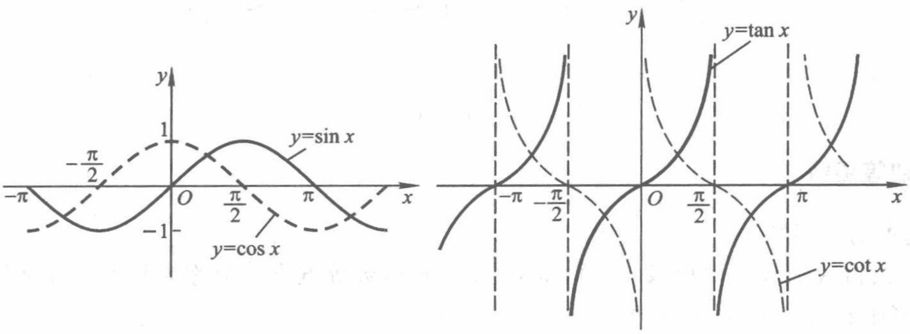
正弦函数　$y=\sin x$　　　余弦函数　$y=\cos x$

它们的图像如图 1 - 9(a). 它们的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[-1,1]$,且均为以 $2\pi$ 为周期的周期函数. 正弦函数 $y=\sin x$ 为奇函数,余弦函数 $y=\cos x$ 为偶函数.

正切函数　$y=\tan x$　$\left(x\neq(2n+1)\frac{\pi}{2},n=0,\pm1,\pm2\cdots\right)$

余切函数　$y=\cot x$　$(x\neq n\pi,n=0,\pm1,\pm2\cdots)$

它们的图像如图 1 - 9(b),且均为以 $\pi$ 为周期的周期函数. 它们均为奇函数.




(a) 正弦函数与余弦函数　　(b) 正切函数与余切函数

图 1 - 9

另外还有两个三角函数:正割函数 $y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$,余割函数 $y=\csc x=\frac{1}{\sin x}$.

(5) 反三角函数

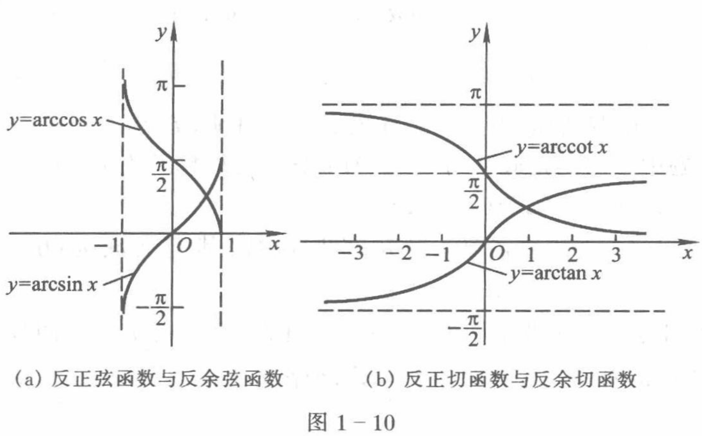
反正弦函数　$y=\arcsin x$　是正弦函数 $y=\sin x$ 在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的反函数;

反余弦函数　$y=\arccos x$　是余弦函数 $y=\cos x$ 在区间$[0,\pi]$上的反函数;

反正切函数　$y=\arctan x$　是正切函数 $y=\tan x$ 在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内的反函数;

反余切函数　$y=\text{arccot}\ x$　是余切函数 $y=\cot x$ 在区间$(0,\pi)$内的反函数;

其图形如图 1 - 10.




(a) 反正弦函数与反余弦函数　　(b) 反正切函数与反余切函数

图 1 - 10

由基本初等函数与常数经过有限次四则运算可以得到较简单的函数,例如

$$y=x^2-2x+3,\quad y=e^x\arcsin x+5\tan x,\quad y=\frac{\ln x}{\cos x},\cdots.$$

2. 复合函数

先看一个例子,设 $y=\sin u$,$u=x^2+1$,将 $u=x^2+1$ 代入 $y=\sin u$,则有 $y=\sin(x^2+1)$,此时称 $y=\sin(x^2+1)$是 $y=\sin u$,$u=x^2+1$ 的复合函数.

**定义 1.3** 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $U$,函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 $X$,$D=\{x\in X\mid\varphi(x)\in U\}$非空,则对于每一个 $x\in D$,通过 $u=\varphi(x)$,变量 $y$ 有确定的值 $y=f(u)$与之对应,从而得到一个以 $x$ 为自变量,$y$ 为因变量的函数.这个函数称为函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$的复合函数,记作 $y=f[\varphi(x)]$.$u$ 称为中间变量.

复合是由较简单的函数构造复杂函数的重要方法.复合函数还可以由两个以上的函数复合而成,如 $y=\sqrt{u}$,$u=\cot v$,$v=\dfrac{x}{2}$,则 $y=\sqrt{\cot\dfrac{x}{2}}$是经过两个中间变量 $u$ 和 $v$ 复合而成的.

但要注意,并不是任何两个函数都可以进行复合的,如 $y=\arcsin u$,$u=x^2+2$ 在实数范围内复合就没有意义.

**例 1.1.4** 指出下列函数是怎样构成的:

(1) $y=\sin^2 x$;　(2) $y=\ln\tan 3x$;　(3) $y=e^{\sqrt{1-x^2}}$.

**解** (1) $y=\sin^2 x$ 是由基本初等函数 $y=u^2$,$u=\sin x$ 复合而成的;

(2) $y=\ln\tan 3x$ 是由基本初等函数 $y=\ln u$,$u=\tan v$ 和函数 $v=3x$ 复合而成的,其中 $v=3x$ 是常数 3 与 $x$ 的乘积.

(3) $y=e^{\sqrt{1-x^2}}$ 是由基本初等函数 $y=e^u$,$u=\sqrt{v}$和函数 $v=1-x^2$复合而成的,其中 $v$ 是常数 1 与 $x^2$的差.

3. 初等函数

**定义 1.4** 由基本初等函数与常数经过有限次的四则运算与有限次的函数复合步骤所构成的,可以用一个解析式表示的函数称为初等函数.

例如,$y=2x^3-1$,$y=2\sin x+\cos 3x$,$y=\ln(x+\sqrt{1-x^2})$等都是初等函数.在初等函数的表达式中常常既有函数的四则运算又有函数的复合.例如函数 $y=\ln(x+\sqrt{1-x^2})$是由 $y=\ln u$ 和 $u=x+\sqrt{1-x^2}$复合而成,而 $u=x+\sqrt{1-x^2}$又是函数 $x$ 与$\sqrt{1-x^2}$的和,而$\sqrt{1-x^2}$又是由函数$\sqrt{v}$和 $v=1-x^2$复合而成.今后在讨论中碰到的函数绝大多数都是初等函数.正确分析清楚初等函数的构成,即分清函数构成步骤中,哪些是四则运算,哪些是函数的复合,对于今后一些问题的讨论是非常重要的.

## 六、建立函数关系

在解决实际问题时,常常首先要建立函数关系.下面举例说明这一过程.

**例 1.1.5** 已知一物体的质量为 $m$,它与地面的摩擦系数是 $\mu$,设有一与水平方向成 $\alpha\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$角的拉力 $F$,在力 $F$ 的作用下,物体沿水平方向做匀速直线运动(图 1-11),求拉