经/典/教/材/配/套/丛/书

配套·高教社·卢刚·《线性代数(第三版)》(面向21世纪课程教材)

线性代数
习题全解与考研辅导

刘剑平◎主 编

华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

经典教材配套丛书

配套·高教社·卢刚·《线性代数(第三版)》(面向21世纪课程教材)

线性代数习题全解与考研辅导

刘剑平　主编

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数习题全解与考研辅导/刘剑平主编. —上海:华东理工大学出版社,2010.1

(经典教材配套丛书)

ISBN 978-7-5628-2689-7

Ⅰ.①线... Ⅱ.①刘... Ⅲ.①线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 240331 号

经典教材配套丛书

线性代数习题全解与考研辅导

主　　编 / 刘剑平
策　　划 / 周永斌
责任编辑 / 胡　景
责任校对 / 李　晔
出版发行 / 华东理工大学出版社
地址:上海市梅陇路 130 号,200237
电话:(021)64250306(营销部)
传真:(021)64252707
网址: press. ecust. edu. cn
印　　刷 / 江苏南通印刷总厂有限公司
开　　本 / 787 mm×1092 mm　1/16
印　　张 / 14.75
字　　数 / 378 千字
版　　次 / 2010 年 1 月第 1 版
印　　次 / 2010 年 1 月第 1 次
印　　数 / 1—4000 册
书　　号 / ISBN 978-7-5628-2689-7/O·218
定　　价 / 29.50 元

前言

PREFACE

线性代数是高等学校理、工科和经济学科专业的一门主要的基础课，也是研究生入学考试的必考内容. 由于线性问题广泛存在于科学技术的各个领域，而某些非线性问题在一定条件下可转化为线性问题得以解决，尤其是计算机的日益普及，用代数方法解决实际问题，已渗透到各个领域，显示出其重要性和实用性，且作为修读后续课程的一门必不可少的基础课程，更决定其地位的重要. 为了更好地指导学生学好这门课程，加深对所学内容的理解和掌握，提高其综合运用知识解决实际问题的能力，以及帮助学生有效地备考，我们编写了这本《线性代数习题全解与考研辅导》，其目的是为广大教师提供一本好的参考书，为广大学生提供一位好的"辅导老师".

本书是按教育部制订的教学基本要求组织编写，与卢刚主编的面向 21 世纪课程教材《线性代数(第三版)》配套的学习辅导书，内容包括矩阵、线性方程组、矩阵的特征值和特征向量、二次型、线性空间与线性变换等 5 章，每章均包含基本要求、基本内容、典型例题、练习题全解、习题全解、考研真题解析等. 本书可作为大学本科、专升本的学生学习线性代数的辅导教材，也可供参加硕士生入学考试的学习复习使用.

本书通过基本要求精述、基本内容精讲和典型例题精析，不仅使学生对基本概念、基本理论、基本方法有一个系统的总结，而且对理解各概念之间的关系，提高学生的分析问题、解决问题的能力，深入理解和巩固知识无疑是极其有益的. 每章有练习题和习题全解及考研真题解析帮助同学复习思考、开阔视野.

本书由长期从事线性代数教学和考研复习的有经验的教师编写而成. 由刘剑平主编. 曹宵临、施劲松、钱夕元、朱坤平、鲍亮、陆元鸿、刘宇凡、李平、吴大德、樊国号、孙叶、刘凤英、闫中凤、吴玉倩、叶炎钧等参与部分章节的编写和讨论.

在编写中难免存在不妥或商榷之处，恳请读者指教并提出宝贵意见.

作者的 e－mail 地址为 liujianping60@163. com.

刘剑平

2009 年 10 月

编委会

目录 CONTENTS

第1章 矩　阵

1.1 基本要求

1. 理解矩阵的概念，了解单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵、三角矩阵的概念，了解对称矩阵、反对称矩阵的概念.

2. 掌握矩阵的线性运算、乘法、转置以及它们的运算规律，了解方阵幂的性质.

3. 了解方阵行列式的概念和性质，掌握用行列式的性质及行列式按行(列)展开定理计算行列式.

4. 理解可逆矩阵的概念、性质以及矩阵可逆的充要条件，理解伴随矩阵的概念，掌握用伴随矩阵求矩阵的逆阵.

5. 了解矩阵的初等变换和初等矩阵的概念及关系，理解矩阵的秩的概念及性质，掌握用初等变换求矩阵的逆阵和秩的方法.

6. 了解分块矩阵的概念及其运算法则.

1.2 基本内容

1.2.1 矩阵的概念

1.2.1.1 定义

由 $m\times n$ 个元素 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行、n 列的矩形元素表

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m\times n$ 维(阶)矩阵，简记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$.

注1　本书中我们讨论的主要是实矩阵，即 $\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ij} 为实数的情形.

注2　当 $m=n$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵.

注3　称 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}_{m\times n}$ 为同维(阶)矩阵，如果两个同维矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的对应元素相等，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

1.2.1.2 特殊矩阵

零矩阵：元素全为零的矩阵，记作 $\boldsymbol{O}$.

行矩阵：$\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

列矩阵：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_m\end{pmatrix}$.

三角阵：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$称为上三角阵，满足 $a_{ij}=0\ (i>j)$；

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$称为下三角阵，满足 $a_{ij}=0\ (i<j)$.

对角阵：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\0&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\xlongequal{\triangle}\mathrm{diag}(a_{11},a_{12},\cdots,a_{nn})$，满足 $a_{ij}=0\ (i\neq j)$.

数量阵：$\mathrm{diag}(k,k,\cdots,k)=\begin{pmatrix}k&&&\\&k&&\\&&\ddots&\\&&&k\end{pmatrix}$.

单位阵：$\mathrm{diag}(1,1,\cdots,1)=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}$，常记作 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{E}$，有时也记作 $\boldsymbol{I}_n$ 或 $\boldsymbol{I}$.

对称阵：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，满足 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$.

反对称阵：$\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，满足 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$.

注 1 行(列)矩阵通常称为行(列)向量，并习惯用小写字母表示，其每一元素称为分量，分量个数称为向量的维数.

注 2 上述所列的特殊矩阵，除零矩阵、行或列矩阵外，均为方阵.

注 3 对反对称阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$来说，必有 $a_{ii}=0\ (i=1,2,\cdots,n)$.

注 4 任一方阵 $\boldsymbol{A}$ 均可表示为一个对称阵与一个反对称阵之和，即

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}).$$

1.2.2 矩阵的运算

(1) **加法**：设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$.

条件：同维矩阵才能相加.

运算规则：交换律：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$

结合律：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$

零元素：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$

负元素：$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$

(2) **数乘**：设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$k$ 为数，则 $k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}$.

运算规则：分配律：$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$

结合律：$k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$

零元素：$0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

1元素：$1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$

(3) **乘法**：设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，则 $\boldsymbol{AB}=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n).$$

条件：左边矩阵的列数等于右边矩阵的行数.

运算规则：结合律：$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$，$(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=k(\boldsymbol{AB})$，$k$ 为任意数

分配律：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$，$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$

注1 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}$.

注2 交换律不满足，即 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$. 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 称 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 可交换相乘.

注3 消去律不满足，即若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}\not\Rightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$. 但当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

注4 方阵的幂：设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，

(ⅰ) 指数法则：$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$，$(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$（$k$，$l$ 为正整数）；

(ⅱ) 矩阵多项式：设 m 次多项式

$$f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

则 $f(\boldsymbol{A})=a_m\boldsymbol{A}^m+a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}$ 是一个 n 阶矩阵；

(ⅲ) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则

$$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}),\ (\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2\pm2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2,\ (\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2,$$

一般有 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^m=\mathrm{C}_m^0\boldsymbol{A}^m+\mathrm{C}_m^1\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{B}+\cdots+\mathrm{C}_m^{m-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{m-1}+\mathrm{C}_m^m\boldsymbol{B}^m$（$m$ 为自然数）.

(4) **转置**：设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$，则 $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置阵，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{A}'$.

运算规则：$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，　$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$

$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$（$k$ 为数），　$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

1.2.3 方阵的行列式

1.2.3.1 “递推”定义

定义 一阶行列式 $|\boldsymbol{A}|=|a_{11}|=a_{11}$，设 $n-1$ 阶行列式已经定义，则 n 阶行列式定义为

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{1+i}a_{1i}M_{1i}$$
$$=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n},$$

其中 M_{ij} 为 a_{ij} 的余子式,表示划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行,第 j 列后剩下的 $n-1$ 阶行列式.

如果定义代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,则

$$|\boldsymbol{A}|=\sum_{i=1}^{n}a_{1i}A_{1i}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}. \tag{1.1}$$

注 1 一阶行列式 $|-3|=-3$.

二阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc.$

注 2 式(1.1)又称为行列式按第一行展开定义.事实上,有按行列式中任一行或任一列展开的公式,即

$$|\boldsymbol{A}|=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

$$|\boldsymbol{A}|=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

1.2.3.2 "逆序"定义

定义 n 阶行列式等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积之代数和,即

$$|\boldsymbol{A}|=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个全排列,$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$是 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

注 1 n 阶行列式由 $n!$ 项组成的代数和.

注 2 一个排列 $j_1j_2\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n$ 中,若 $j_t>j_s$,则称这两个数组成一个逆序.

注 3 逆序数为 $j_1j_2\cdots j_n$ 中逆序的总数.例如

$$\tau(3,1,4,2)=3;\ \tau(n,n-1,\cdots,1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

1.2.3.3 行列式的性质

(1) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式与其转置的行列式相同,即

$$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|.$$

注 所有对列成立的行列式性质,对行也成立.

(2) 互换行列式中两列(或行)的位置,行列式变号.

推论 如果行列式的两列(或行)相同,则行列式为零.

(3) 某数 λ 乘行列式,等于用数 λ 乘它的某一列(或行)的所有元素,即

$$\lambda|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\lambda\boldsymbol{\alpha}_i,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|, \tag{1.2}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 维的列向量.

注 在式(1.2)的右端,数 λ 只能乘某一列(或行),其余列(或行)不变.

推论 1 数 λ 乘方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式等于 λ^n 乘 $\boldsymbol{A}$ 的行列式,即

$$|\lambda\boldsymbol{A}|=\lambda^n|\boldsymbol{A}|.$$

推论 2 如果行列式的一列(或行)为零,则行列式为零.

推论 3 如果行列式的两列(或行)对应成比例,则行列式为零.

(4) $\boldsymbol{A}$ 的行列式中某一列(或行)可分成两个向量之和,则 $\boldsymbol{A}$ 的行列式等于分别由这两个列(或行)向量取代 $|\boldsymbol{A}|$ 中这一列(或行)构成行列式之和,即

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k+\boldsymbol{\beta}_k,\boldsymbol{\alpha}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\alpha}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|+|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k,\boldsymbol{\alpha}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|. \tag{1.3}$$

注 式(1.3)称为行列式的加法性质.

推论 将行列式的某一列(或行)的任意 λ 倍加到另一列(或行)上去,行列式不变.

(5) 对于方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式,有

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}|\boldsymbol{A}| & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}.$$

(6) 拉普拉斯定理

在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中任意取定 k 行($1\leqslant k\leqslant n$),由这 k 行元素组成的所有 k 阶子式 $\boldsymbol{M}_i(i=1,2,\cdots,t)$ 与它们的代数余子式 $\boldsymbol{B}_i(i=1,2,\cdots,t)$ 的乘积之和等于 $\det\boldsymbol{A}$,即

$$\det\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{B}_2+\cdots+\boldsymbol{M}_t\boldsymbol{B}_t,$$

其中 $t=C_n^k$.

显然 $k=1$ 时,即为行列式的展开定义.

由拉普拉斯定理可得:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & c_{11} & \cdots & c_{1r}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & c_{k1} & \cdots & c_{kr}\\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1r}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0\\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}.$$

1.2.3.4 特殊行列式的值

(1) 上三角行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

（2）下三角行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

（3）对角行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

（4）$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

（5）$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

（6）$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

（7）范德蒙行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j),$$

其中$\prod$为连乘积的符号.

（8）初等矩阵的行列式

$$|P(i,j)| = -1,\ |P(i(k))| = k,\ |P(i,j(k))| = 1.$$

1.2.4 分块矩阵

1.2.4.1 定义

用若干条纵线和横线把一个矩阵分成若干个小块，每一小块称为矩阵的一个子块或子矩阵，则以这些子块为元素的原矩阵称为分块矩阵.

1.2.4.2 运算

进行分块矩阵的加、减、乘法和转置运算，可将子矩阵当作通常矩阵的元素看待.

注 1 同维矩阵，只有用同样的分块方法分块时，才能进行分块相加.

注 2 分块乘法只有当左边矩阵的列分法与右边矩阵的行分法一致时才能进行.

注 3 分块转置除了行列互换外，每一子块也须转置，即若

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2r}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{21}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s1}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s2}^{\mathrm{T}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{1r}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{2r}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix},$$

这一点容易忽视.

1.2.4.3 上(下)三角矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1s}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2s}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{A}_{ss}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{ss}\end{vmatrix}=\det\boldsymbol{A}_{11}\det\boldsymbol{A}_{22}\cdots\det\boldsymbol{A}_{ss}.$$

1.2.5 可逆矩阵

1.2.5.1 可逆矩阵的定义

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，若存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

注 1 可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必是方阵，其逆必唯一，记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即有

$$\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}.$$

注 2 可逆矩阵又称为非退化阵或非奇异阵或满秩阵，不可逆阵又称为退化阵或奇异阵或降秩阵.

1.2.5.2 可逆矩阵的性质

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 均可逆，且

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A},\ (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}.$$

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，数 $k\neq0$，则 $k\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$.

(3) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同阶可逆阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

(4) 对 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}$ 或 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{B}$ 为 $m\times m$ 可逆阵，$\boldsymbol{C}$ 为 $n\times n$ 可逆阵，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1} & -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}^{-1}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1}\end{pmatrix} \quad 或 \quad \boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{C}^{-1}\end{pmatrix}.$$

(5) 若 $\boldsymbol{A}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 可逆，

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s^{-1}\end{pmatrix},$$

则

$$\begin{pmatrix} & & & \boldsymbol{A}_1\\ & & \boldsymbol{A}_2 & \\ & \iddots & & \\ \boldsymbol{A}_s & & & \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} & & & \boldsymbol{A}_s^{-1}\\ & & \boldsymbol{A}_{s-1}^{-1} & \\ & \iddots & & \\ \boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \end{pmatrix}.$$

注 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶的可逆矩阵，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 不一定可逆.

1.2.5.3 可逆矩阵的判别方法

(1) 利用定义：若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则必有 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

(2) 利用行列式：若 $|\boldsymbol{A}|\neq0$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

1.2.5.4 逆矩阵的计算方法

(1) 利用伴随阵

由 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 可以推出

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|},\ (\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} 及 |\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1},$$

其中 $\boldsymbol{A}^*=(\boldsymbol{A}_{ij})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

(2) 利用定义，从式子中凑出 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

1.2.5.5 与逆有关的行列式

(1) $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$.

(2) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|.$$

(3) 当 $\boldsymbol{D}$ 可逆时，

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{D}|\,|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}|.$$

（4）当 A,D 都可逆时，

$$|A||D-CA^{-1}B|=|D||A-BD^{-1}C|,$$

即

$$|D-CA^{-1}B|=\frac{|D|}{|A|}|A-BD^{-1}C|.$$

1.2.6 矩阵的初等变换与初等矩阵

1.2.6.1 初等变换、初等矩阵及其关系

（1）矩阵的初等行变换、初等列变换统称为初等变换，有如下三类.

第一类：将 A 的第 i 行(列)与第 j 行(列)对换.

第二类：以非零常数 k 乘 A 的第 i 行(列).

第三类：将 A 的第 i 行(列)的 k 倍加到第 j 行(列)上.

（2）单位阵 E 经过一次初等变换后得到的矩阵称为初等矩阵，记为 $P(i,j)$，$P(i(k))$，$P(i,j(k))$有

$$(P(i,j))^{-1}=P(i,j),\quad (P(i(k)))^{-1}=P\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right),$$

$$(P(i,j(k)))^{-1}=P(i,j(-k)).$$

（3）初等变换与初等矩阵之间的关系

初等矩阵左(右)乘 A，相当于对 A 进行一次相应的初等行(列)变换.

注 1　若矩阵 A 经过有限次初等变换得到矩阵 B，则称 B 与 A 等价.

注 2　任一矩阵 A 经有限次初等变换后均可化为形如 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 的矩阵，其中 r 为 A 的秩，称矩阵 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 为 A 的标准形.

注 3　n 阶矩阵 A 可逆的充分必要条件是 A 可以表示成初等矩阵的乘积.

1.2.6.2 初等变换的应用

（1）求逆阵

$$(A \,\vdots\, E)\xrightarrow{\text{行变换}}(E \,\vdots\, A^{-1})\quad \text{或}\quad \begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列变换}}\begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}.$$

注　对 $(A \,\vdots\, E)\sim(E \,\vdots\, A^{-1})$ 只能用行初等变换.

对 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$ 只能用列初等变换.

（2）若 A 可逆且 $AX=B$，则 $X=A^{-1}B$ 可由初等行变换求得

$$(A \,\vdots\, B)\xrightarrow{\text{行变换}}(E \,\vdots\, A^{-1}B).$$

（3）若 A 可逆且 $XA=B$，则 $X=BA^{-1}$ 可由初等变换求得

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列变换}}\begin{pmatrix} E \\ BA^{-1} \end{pmatrix}.$$

1.2.7 矩阵的秩

1.2.7.1 矩阵秩的定义

定义 1 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式

在 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中任取 k 行，k 列（$1\leqslant k\leqslant \min(m,n)$），位于这 k 行，k 列交叉点处的元素按原来次序所组成的行列式，称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k 阶子式.

定义 2 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩

设在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有一个不等于零的 r 阶子式 D，且所有的 $r+1$ 阶子式（如果有的话）全等于零，那么 D 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式，数 r 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，记为 $\mathbf{rank}(\boldsymbol{A})$，简记为 $r(\boldsymbol{A})$.

定义 3 满秩阵

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，若 $r(\boldsymbol{A})=n$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为满秩阵.

1.2.7.2 矩阵秩的性质

(1) $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A})$； (2) $r(\lambda\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$，其中 $\lambda\neq 0$；

(3) $r(\boldsymbol{A})=0$ 等价于 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$； (4) $r(\boldsymbol{A}_{m\times n})\leqslant\min(m,n)$.

1.2.7.3 矩阵秩的有关结论

(1) 初等变换不改变矩阵的秩，即

$$若\ \boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B},则\ r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B}).$$

(2) 矩阵乘上一个可逆阵不改变原矩阵的秩，即当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，有

$$r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B});\quad r(\boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{B}).$$

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 为方阵，则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0 \Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=n$.

1.2.7.4 矩阵秩的求法

(1) 用定义求矩阵的秩.

(2) 用初等变换法求矩阵的秩.

(ⅰ) 用行初等变换化矩阵为梯矩阵；

(ⅱ) 矩阵的秩为梯矩阵非零行的行数.

(3) 用性质求矩阵的秩.

1.3 典型例题

【例 1】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -6 & 2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB},\boldsymbol{BA},\boldsymbol{A}^2$.

解 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -6 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -6 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 5\\ -20 & -10\end{pmatrix},$$