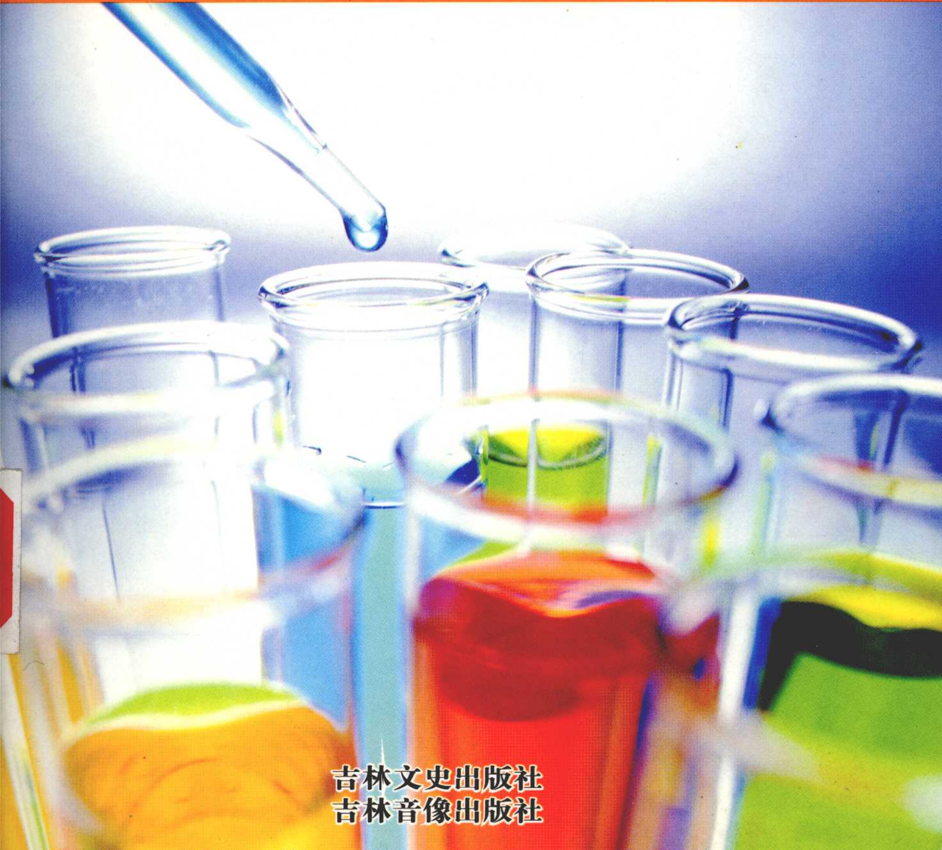
Famous Teachers' New Lesson Plans

名师新教案·优秀学生学习方法全书

A Collection of The Outstanding Students' Study Methods

数学学习法 上



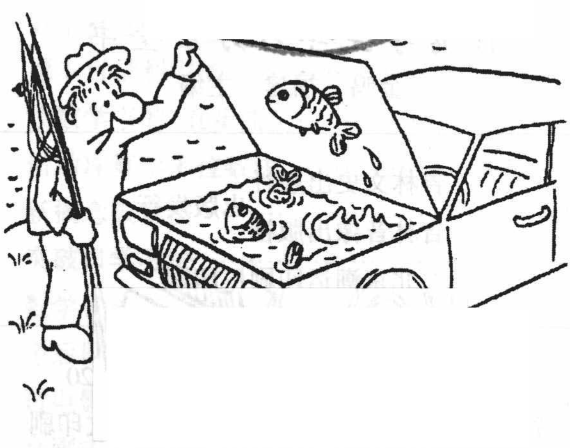
吉林文史出版社
吉林音像出版社

名师新教案

优秀学生学习方法全书 7

数学学习法　上

金鸣　福建⊙主编



吉林文史出版社
吉林音像出版社

图书在版编目(CIP)数据

名师新教案—优秀学生学习方法全书/金鸣主编。—长春:吉林文史出版社,2006.2

ISBN 7-80702-113-6

Ⅰ.名...　Ⅱ.金...　Ⅲ.学习方法—优秀学生—教案

Ⅳ.G.206

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 080133 号

名师新教案

优秀学生学习方法全书

金鸣　福建　主编

吉林文史出版社
吉林音像出版社
出版发行

北京潮运印刷厂印刷

开本:850×1168mm　1/32　印张:120

字数:2000 千字　　2006 年 3 月第 1 次印刷

印数:5000

ISBN 7-80702-113-6/G·206

定价:348.00 元(全 16 卷)

第七卷　目　录

数学学习
新技法

一、数学学习新技能

在学习数学的过程中要掌握好数学各环节的学习方法,掌握好数学不同内容的学习方法以及逐渐领会数学思想方法,把知识转化为能力,提高学习数学的效率,争取更好的成绩。

数学学习总论

1、兴趣

对于数学学习,无论是请教经验丰富的老师,还是请教研究数学的专家,或者是学业优异的同学,兴趣几乎总是开篇的话题。

我们知道,学习兴趣从本质上说是一种内在的学习动机,是一种“内驱力”。兴趣总是同强烈的求知欲望、主动的探求精神、认真的学习态度和高涨的学习热情紧密相联的。“动机是成就的基础”,“热爱是最好的老师”,在科学日趋进步,教育日渐普及,社会日益发展,竞争日见激烈的今天,莘莘学子一方面从“头悬梁、锥刺股”、“勤为径、苦作舟”的古训中吸取奋发的营养;一方面又从学习

的内部心理机制中探求新路，研究学习动机，注意培养和激发学习兴趣。这必将给数学学习注入新的活力。

兴趣是入门的阶梯，兴趣是成功的先导。因此，兴趣的激发、持续和向更高层次的升华是至关重要的，如何激发、持续和升华兴趣呢？第一，要丰富自己的学习活动。丰富的反面是贫乏，贫乏伴随枯燥。我们不应该把数学学习局限于记定理、背公式、做作业的小圈子里；也不应该把数学学习搞成脱离实际，全无感情的字母、数字、图形的大杂烩。事实上，数学是密切联系现实，应用非常广泛，充满逻辑美和形式美，富有思想方法的神奇宝矿。勾股定理带去了我们对于外星人智慧的问候，黄金分割把美写在山川大地。了解一些课堂外和校园外的数学，有助于使它变得生动活泼，富有情趣，充满吸引力，进而激发出强烈的求知欲望和无穷的学习积极性。第二，体会成功的快乐。兴趣推动着我们达到成功，成功又使我们增添了新的兴趣。可以毫不夸张地说，数学为我们提供了许多享受成功的机会，一道习题的奇思妙解，一种思路的豁然贯通，或得益于经年累月的苦苦求索，或只是智慧火光的瞬息一闪，然而它带给我们的愉悦和欢乐却是刻骨铭心的。一位著名的科学家曾深情回忆起童年的第一个100分，说它激励着往后一生的学习、工作和研究。第三，根据自己学习的实际情况，制定具体的学习目标，一步一个脚印的实现它、超越它，这是数学学习值得注意的特点。目标具体，循序渐进，打好基础，只有这样才能促进兴趣的保持和升华。

2、思考

有了兴趣就能学好数学吗？记得几年前一个学生求助地说："老师，我喜欢数学课，你讲的例题我都懂，就是做作业感到困难，更害怕考试。"原因何在呢？喜欢，说明还有些兴趣；懂，说明学习有了成效；但怕做题，怕考试，说明终究没能把数学学好。"懂"是有层次的，简单地说有真懂和假懂之分。"例题我都懂"，是懂得它的具体解法，还是弄清了问题的结构和解题的思路？是懂得解题过程的每一步推理和运算，还是整个把握了求解过程？只有弄清

问题的实质，把握解法的精髓，从局部到全貌完整地理解和掌握，才能达到真懂。

学习数学更离不开思考。数学的逻辑性、系统性很强，而其应用又十分广泛。一条简单的数轴，既直观地表示了小学里所学的整数、小数和分数，又明显地预示着初中将要学习的负数、有理数，还直观地蕴含着相反数、绝对值及大小比较等概念，它的基本思维(数形结合)还将影响到更广泛的数学领域。乘法公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，这里的a、b既可以是数(整数、小数、分数或无理数)，又可以表示式(如代数式)；从左到右它是多项式的乘法，从右到左它是因式分解；直接应用它是乘法公式的因式分解公式，间接应用则可求值、化简、计算和证明。如计算a^2-b^2常常以化成$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$为简，讨论a^2与b^2的大小关系或研究a^2-b^2的奇偶性时，也通常是化成$(a+b)(a-b)$，以便于处理。数学学习为我们提供了广阔的思考天地，思考则富有情趣，思考则别有洞天，思考则融会贯通。“问渠哪得清如许，为有源头活水来”，思考便是数学学习的源头活水。

3、练习

人们常说数学是思维的体操，体操有赖于练习，数学也是有赖于练习的。一位老师说，数学学习犹如入山采宝，不练习则犹如入宝山而空返。美国新数学丛书的编辑者关于练习也说过一段话：“学数学的最好办法是‘做数学’，要养成读书时手边备有纸和笔的习惯”。

这些都是至理名言，但我们不禁要问，今天的学生练习还少吗？课本、习题集、练习册、达标题，已经够多了，太多了！看来怎么练，练什么，这里有一个方法和选择的问题。首先，练习的概念是广泛的，做习题无疑是最常见的练习。但在学习的全过程中，读一读、想一想、说一说、算一算，这样经常性的动口、动脑和动手，应该是更广泛的练习，甚至是更重要的练习。做习题，也不能满足于选用公式，算对答案，更重要的是通过“为什么要这样做”以训练解题的思路，“还能够怎样做”以积累解题的方法，“怎样做简单合理”

以提高解题的技能技巧。

此外，练习题要有选择。就当前情况看，程序解法、技能训练的习题要适度，过多过滥则事与愿违，还容易造成思维惰性。难度大、方法独特的题目要少，一则它很少有助于基础知识的学习，二则它也不是提高能力的有效途径。总之，题量要适中，题目要精当，题型要变化。重在精练、深思，贵在及时总结，就一定能够提高练习水平，进而提高数学学习水平。

数学概念学习法

数学中的概念是推理论证和运算的基础。准确地理解概念是学好数学课的前提。中学数学课本中几乎每一章节都是从建立概念、给出定义开始的；每一个定理的论证、每一个公式的推导都是以相应的概念奠基的；每一个例题或习题的演算也都是在明确的概念指导下进行的。然而，在同学当中，不少人存在着一种忽视概念学习，只对"算题"感兴趣的偏向。于是，那些由于概念不清而不会解题或导致解题错误的例子，就屡见不鲜了。这种不良倾向，严重地妨碍着对数学基础知识和基本技能的熟练掌握，妨碍着分析问题、解决问题能力的培养和提高。

例如，有这样一道填空题："$3-2\sqrt{2}$的相反数是__；倒数是__；算术平方根是__；共轭根式是__。"要想正确地填上这四个空白，就必须弄懂"相反数"、"倒数"、"算术平方根"和"共轭根式"这四个概念，否则将一筹莫展。能够正确理解上述四个概念的同学，就会回答出$3-2\sqrt{2}$的相反数是$2\sqrt{2}-3$；倒数是$3+2\sqrt{2}$；算术平方根是$\sqrt{2}-1$，共轭根式是$3+2\sqrt{2}$。

又如设 A = 有理数，B = 无理数，试写出 $A\cap B$。

如果对有理数、无理数这些基本概念不清，就可能把 $A\cap B=\varphi$ 误写成 $A\cap B=A$，或 $A\cap B=B$。如果对有理数、无理数概念清楚，但对集合的概念和符号表示不清楚，又会出现 $A\cap B=0$，$A\cap B=\{0\}$等错误。

我们知道，“算是数，不是集合，它只能是某一个集合中的元素，{0}和φ都是集合，但φ是不含任何元素的集合，而0则是只含有一个元素“0”的集合。它们之间的关系是：

$0(\{0\}, 0 \notin \varphi, \subset\varphi(\{0\}$。

通过上面两个例子，我们看到，正确理解和运用数学概念，是非常重要的。概念是进行正确思维的前提和依据。没有明确的概念作基础，逻辑思维将是无源之水，无本之木。概念不清就会思维混乱，必然导致计算、推理发生错误。

为了正确掌握深刻理解各种重要的数学概念，必须认真阅读教材，仔细领会概念的含意，并通过做一定数量的练习题，加强理解，澄清那些糊涂的概念，具体可以从以下几个方面多下功夫。

1、从文字上仔细领会

数学概念都是用文字来表达的，且文字精练、简明、准确，所以对有些数学概念的辨析简直需要“咬文嚼字”。

例如，“数列中从第二项起，每一项与前一项之差都等于常数，则此数列称为等差数列”。这个定义粗看起来似乎是对的，仔细一想就会发现问题。应将“常数”改为“同一个常数”。否则“3,5,6,9…”不也成了等差数列了吗？因为它们的“差”分别为2,1,3…都是常数。

2、从正反面反复比较

为对概念作进一步理解，还可从正面辨析和反面比较。以“角”的概念为例，中学阶段出现过不少种“角”，如直线的倾斜角、直线与平面所成的角、复数的辐角主值等。它们以各种的定义出发，都有一个确定的取值范围。

如直线与平面所成的角，是“平面的一条斜线和它在平面内的射影所成的锐角，叫做这条直线与这个平面所成的角”。反过来说，如果不规定“锐角”就不是唯一的了。很容易发现斜线和它在平面内的射影所成的角有两个，一个是锐角，另一个是钝角。

又如直线 $y=\frac{-\sqrt{3}x}{3}$ 的倾斜角是 $\frac{-\pi}{6}$ 吗？由直线的倾斜角的

概念“直线向上的方向与 X 轴正方向所夹的最小正角”。其范围是$[0,\pi)$，$\frac{-\pi}{6}$显然是不对的，正确的答案应该是$\frac{5\pi}{6}$。

3、从特例中认真验证

对概念理解产生偏题的常见病之一是“忘记特例”。

例如，“任何数的零次幂都等于 1”这句话是不对的，因为 0 无意义。

“在极坐标平面内，如果规定 $\rho>0, 0\leqslant\theta<2\pi$，那么平面内的点与一对有序实数是一一对应的”这句话也不对，因为极点的极角是不确定的。

“经过球面上任意两点一定可以作唯一的大圆”这句话粗看起来没有什么错误。因为球面上两点和球心一般只确定一个平面，但当这两点和球心在一条直线上时，就可以作出无数个大圆了。

4、从条件的限制加深理解

对概念的理解产生偏颇的常见病之二是“忽视条件”。如果忽视了条件，就会曲解题意，使结果面目全非。

如“当 $z\in c$ 时，$|z-i|+|z+i|=1$ 表示的图形是椭圆”这个判断是不对的。因为椭圆不只反映了平面内动点到两个定点的距离之和为常数，而且这个常数必须大于这两点定点间的距离。若将上面等式改为大于 2 的实数，判断就正确了。

数学定理学习法

数学的论题(即判断)，通常称之为命题。命题有真有假，如果命题经过逻辑推理论证为真，就叫做定理。定理是正确的命题，常有人说：“某定理不成立”或“某命题的逆定理不成立”，这些说法都是不妥当的。应该说成“某命题不成立”或“某定理的逆命题不成立”。

1、定理的种类

任何定理总是对于对象及其属性加以某种肯定或否定。按照这种性质来分类，定理可分为肯定式与否定式两类。它们的标准

形式是：

2.*肯定式定理* 即“如果某个对象具有性质 A,那么这个对象也具有性质 B。”其标准形式是：“若 A 则 B”,也可用记号 $A\Rightarrow B$ 表示。例如,“如果平面外的一条直线和这个平面内的一条直线平行,那么这条直线就和这个平面平行”。

3.*否定式定理* 即“如果某个对象具有性质 A。那么这个对象不具有性质 B。”其标准形式是“若 A 则 $\overline{B}$,也可用记号 $A\Rightarrow B$ 表示。例如,“$\sqrt{2}$不是有理数”。

有些定理不只包含一个结论,有两个或更多个的结论。例如定理“过两条平行线中一条直线的平面,与另一条直线平行或经过另一条直线”,就包含有两个结论。这种定理实际上是把同一条件的几个定理合在一起的,称为联合式定理。它的标准形式是：“若 A,则 $B_1,B_2,\cdots,B_n$。

假如把 n 个定理综合起来叙述成一个定理 N,而且这 n 个定理的条件和结论所含事项的双方都面面俱到且互不相容(即两个定理不能同时成立),那么这个定理 N,叫做分断式定理。例如,定理“在同一个三角形中,等边对等角,大边对大角,小边对小角”,其条件中,把两边的长短关系“等于”,“大于”,“小于”一一说尽,结论也把所对的两角的大小关系一一说完,而且这些关系又各不相容,所以这个定理是分断式定理。假设条件和结论分别是 A_i 和 B_i($i=1,2,\cdots,n$),那么分断式定理的标准形式是：“若 A_i,则 B_i”。显然,分断式定理是一种联合式定理,但联合式定理不一定是分断式定理,因为各分定理可能相容。

2、*定理的学习*

(1)深刻理解定理的条件和结论

数学定理是反映数学对象的属性之间的关系的真理。

每一个定理,都要在一定的条件下才能成立,所以要学好定理,必须深刻理解定理的条件和结论,并掌握其适用范围。如果对于数学定理的条件与结论模糊不清,一知半解,就会导致思维混乱,结果错误。

如在计算$(\sin 10° + i\cos 10°)^3$这个题目时，忽略了棣莫佛定理对于复数的三角形式才可以运用的条件，就会得到

$(\sin 10° + i\cos 10°)^3 = \sin 30° + i\cos 30° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$的错误结果。

又如已知a、b为互不相等的实数，且有$a^2 = 7 - 3a$，$b^2 = 7 - 3b$，求$\frac{b}{a^2} + \frac{a}{b^2}$的值。若按一般常规先求出a、b的值，再分四种情况计算，就会陷入繁杂的运算而不能自拔。倘能注意观察，透过现象看本质，变已知条件为$a^2 + 3a - 7 = 0$，$b^2 + 3b - 7 = 0$的形式，就不难发现可设a、b为方程$x^2 + 3x - 7 = 0$的两根，从而利用一元二次方程的韦达定理，有$a + b = -3$，$ab = \frac{-27}{4}$，变$\frac{b}{a^2} + \frac{a}{b^2}$为$\frac{(a+b)^3 - 3ab(a+b)}{a^2b^2}$就不难求解了。

(2)改隐式为显式

定理的叙述有“显式”与“隐式”等；有些定理把条件和结论叙述得很明显，甚至就是标准形式，我们不妨把这种定理的叙述形式叫做显式(完整式)。还有些定理的叙述，文字简洁，但其中条件和结论表现得并不是很明显，我们把它称为隐式(省略式)。证题时，需要先把隐式变为显式，以弄清定理的结构，即正确区分定理的条件和结论。如“垂直于同一条直线的两个平面平行”。我们把它改变为“如果两个平面都垂直于同一条直线，那么这两个平面平行”。这样，条件和结论就明显了。改隐式为显式，是学习数学定理必须掌握的基本技能。

(3)试作证明或推导

学习定理的证明或推导方法有两种，一种是直接阅读教材，按照教材中给出的解答过程，找出每一步的理论依据及其推算过程，从而弄懂推证方法。

另一种方法是，不先看书，而是通过认真审理，分析定理的条件和结论，联想有关的知识，运用分析与综合的方法，理出解决问

题的思路，并且试写解答过程，然后再与教材中的解答方法相对照、比较，进行修改补充，从而准确地掌握证明或推导方法。

两种方法相比较，第一种方法便当省力，但不利于培养数学能力，有时会感到方法来之突然，甚至感到不可琢磨，而且所学到的方法也往往是僵死的；第二种方法比较费力，但对其推证方法感到自然，印象深刻，便于灵活运用，更有利的是在学习推证过程中，能较快地提高分析能力，想像能力，推理能力和解决问题的能力。

(4)逆向分析

对所学的定理，要从不同的角度，不同的方面去分析，去思考，可提高解题的正确率，并促进思维能力的发展。

对于一个定理，应写出它的逆命题，并判断是否成立。正确的要加以证明，不正确的要举出反例。如 $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ 要分析它的正向 $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$，逆向 $2\sin\alpha\cos\alpha=\sin2\alpha$；$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin2\alpha}{2}$。变形 $\sin\alpha=\frac{\sin2\alpha}{2\cos\alpha}$；$\cos\alpha=\frac{\sin2\alpha}{2\sin\alpha}$。

(5)重视定理的选择

证同一题目，寻求多种方法，再对最简捷，最合理的证法进行探索，这对于合理选择定理，灵活运用定理，简捷证题是很有益处的。

例，正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各条棱长为 a，D 是 CC_1 的中点，求证：A_1B 垂直于平面 AB_1D。(见图1)

①应用“如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线和这个平面垂直。”

思路分析1：

连接 AB_1 交 A_1B 于 O，由于 ABB_1A_1 是正方形

$\therefore A_1B\perp AB_1$ 且 A_1B 与 AB_1 互相平分于 O

连接 DO，$\because AD=B_1D$，则 $A_1B\perp OD$

$\because A_1B\perp$ 平面 AB_1D

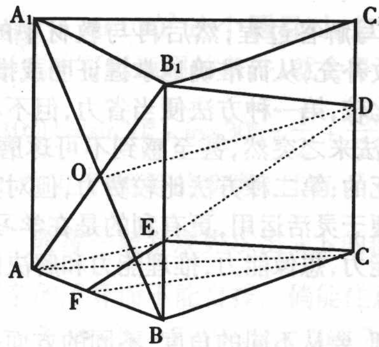


图 1

②应用“如果两个平面垂直，那么在一个平面内垂直于它们交线的直线，垂直于另一个平面”。

思路分析 2：

由 $AD=DB_1$ 可知 $OD\perp AB_1$，同理 $OD\perp A_1B$

$\therefore OD\perp$ 平面 ABB_1A_1，于是平面 $AB_1D\perp$ 平面 ABB_1A_1。

而 $A_1B\perp AB_1$　　$\therefore A_1B\perp$ 平面 AB_1D

③应用“一条直线垂直于两个平行平面中的一个平面，它也垂直于另一个平面。”

思路分析 3：

取 BB_1，AB 的中点 E，F。连 CE，EF，CF。由于 $CE/\!/B_1D$，$EF/\!/AB_1$，$\therefore$ 平面 $AB_1D/\!/$ 平面 FEC

而 $A_1B\perp AB_1$

$\therefore A_1B\perp EF$

又平面 $ABC\perp$ 平面 ABB_1A_1，$CF\perp AB$

则 $CF\perp$ 平面 AAB_1A_1

$\therefore CF\perp A_1B$

$\therefore A_1B\perp$ 平面 CEF

故 $A_1B\perp$ 平面 AB_1D

(6)注意定理的推广

由于普遍性的规律寓于具体的事物中，因此我们在证明一个