面向21世纪高职高专教材

高等数学

（修订版）

田文秋　宋振新　主编

上册

经济日报出版社

面向21世纪高职高专教材

高等数学

（理工科用） 上册

修订版

主　　编　田文秋　宋振新
执行主编　赵红革　任士宏
副 主 编　高　华　胡文英　陈运明　彭　刚
编　　委　陈运明　孙慧娟　赵红革　金　环
　　　　　胡文英　刘祥生　宋振新　高　华
　　　　　彭　刚　万　武　江楚义　唐守宪
　　　　　任士宏
主　　审　唐守宪
参　　编　崔新兰
统　　稿　宋振新　赵红革

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/田文秋 宋振新 赵红革主编
北京:经济日报出版社,2003.6
ISBN 7-80180-177-6

Ⅰ.高...
Ⅱ.①田...②宋...③赵...
Ⅲ.高等数学—高等学校:技术学校—教材
Ⅳ.G.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 036455 号

高等数学

主　　编	田文秋　宋振新　赵红革
责任编辑	刘之光
责任校对	史鸿飞
出版发行	经济日报出版社
地　　址	北京市宣武区白纸坊东街2号(邮编 100054)
销售电话	(010)63582221
网　　址	edp.ced.com.cn
E - mail	edp@ced.com.cn
经　　销	全国新华书店
印　　刷	北京振兴源印务有限公司
开　　本	850mm×1168mm　1/32
总 印 张	29.00
总 字 数	700千字
版　　次	2003年6月第一版　2004年8月第一次修订
印　　次	2004年8月第二次印刷
书　　号	ISBN 7-80180-177-6/G·034
总 定 价	45.80元(全套)

内容简介

本书是依照教育部颁布的《高职高专教育基础课程教学基本要求》,结合自身多年相关教学经验编写而成的。全书14章,分上、下册。供管理类、工科类学生使用。上册共分7章,内容包括函数、极限与连续,导数与微分,导数的应用,不定积分与定积分,定积分的应用,常微分方程,无穷级数;下册共分7章,内容包括向量代数与空间解析几何,多元函数微分学,多元函数积分学,矩阵及其应用,概率论,数理统计,数学实验。

本书除可作为高职高专理工科类教学用书外,也可作为成人高校、夜大、职大、函大等层次的教学用书和广大自学者及工程技术人员的自学用书。对数学爱好者本书也是较好的自学教材。

前　言

本书是高等职业技术及高等专科教育理工农医科类教学用书，依照教育部颁布的《高职高专教育基础课程教学基本要求》，并结合编辑委员会成员多年从事高职教学实践经验的基础上编写而成的.

在编写教材时，我们本着以提高高职高专教育教学质量，以培养高素质应用型人才为目标，力求教材内容"紧扣大纲、易学、实用"的指导思想.力求信息量大，适用面宽，文字简明通顺，教材渗透现代教学思想.

本套教材具有以下特点：

1. 本教材的编写既考虑到高等数学本学科的科学性，又能针对高职高专学生的接受能力和理解程度，适当选取教材内容的深度和广度；既注重从实际问题引入基本概念，又注重基本概念的几何解释、经济背景和物理意义，以使教学内容形象、直观，便于学生理解和掌握，并达到"学以致用"的目的.

2. 基本要求与拓宽知识面相结合，适应不同要求和不同层次的教学.

鉴于计算机的广泛应用及数学软件的日臻完善，为促进教学手段不断改革和创新，提高学生使用计算机解决数学问题的意识和能力，激发学生的兴趣，我们在本书下册编入了易于理解、便于上机操作的数学实验，来作为高等数学的延伸补充，进而提高学生的素质.

全书分上、下两册，共14章，总课时为160～180学时，书末附有基本初等函数表、几种常用的平面曲线、积分表，各院校可根据

实际情况决定内容的取舍,数学实验也可分散到相应的章节去做,带“*”的章节和内容可供选学.

参加编写的单位及人员有:

北京联合大学校本部田文秋副教授担任主编.

第1章,长沙通信职业技术学院陈运明;第2章,沙市大学孙慧娟;第3章,山东水利职业学院赵红革、济宁职业技术学院金环;第4章,江西交通职业技术学院胡文英、刘祥生;第5章、14章,河北能源职业技术学院宋振新;第6章,浙江工业职业技术学院高华;第7章,岭南职业技术学院彭刚;第8章,湖北轻工业职业技术学院万武;第9章,黄岗职业技术学院江楚义;第10章,沈阳建筑工程学院职业技术学院唐守宪;第11章、12章、13章,辽阳职业技术学院任士宏.

我们在本教材的编写过程中也得到了编委会成员所在院校的大力支持,在此表示衷心的感谢.

同时,在编辑和出版的过程中,由于任务本身的难度大,时间紧,书中难免有值得商榷和不妥之处,我们欢迎专家、同行和读者批评指正,使本书在教学实践中不断提高和完善.

编　　者

2003年5月

目　录

第 1 章　函数、极限与连续

函数描述了客观世界中量与量之间的依赖关系，是高等数学研究的主要对象，其研究的基本方法是极限方法．本章将在复习和加深函数有关知识的基础上着重讨论函数的极限，并介绍函数的连续性．

1.1　函　　数

函数是微积分学研究的对象，在中学里已经学习过函数概念，在这里我们不是简单的重复，而是要从全新的视角来对它进行描述并重新分类．

1.1.1　函数的概念

1. 常量与变量

在日常生活、生产活动和经济活动中，经常遇到各种不同的量．例如身高、气温、产量、收入、成本等．这些量可以分为两类，一类量在考察的过程中不发生变化，只取一个固定的值，我们把它称做常量．例如：圆周率 π 是个永远不变的量，某种商品的价格，某个班的学生人数在某一段时间内保持不变，这些量都是常量；另一些量在所考察的过程中是变化的，可以取不同数值，我们把它称做变量．例如：一天中的气温，生产过程中的产量都是在不断变化的，它们都是变量．

常量习惯用字母 a, b, c, d 等表示；变量习惯用 x, y, z, u, v, w 等表示．

2. 函数的概念及表示法

在某个变化过程中,往往出现多个变量,这些变量不是彼此孤立的,而是相互影响和相互制约的,一个量或一些量的变化会引起另一个量的变化.如果这些影响是确定的,是依照某一规则的,那么我们说这些变量之间存在着函数关系.

例如,圆的面积 A 与半径 r 之间的关系由 $A=\pi r^2$ 表示.这里 A 与 r 都是变量,当半径 r 变化时,圆的面积 A 作相应的变化.

定义 1 设 x 和 y 是两个变量,若当变量 x 在非空数集 D 内任取一数值时,变量 y 依照某一规则 f 总有惟一确定的数值与之对应,则称变量 y 为变量 x 的函数,记作 $y=f(x)$.这里 x 称为自变量,y 称为因变量或函数.f 是函数符号,它表示 y 与 x 的对应规则.有时函数符号也可以用其他字母来表示,如 $y=g(x)$ 或 $y=\varphi(x)$ 等.

集合 D 称为函数的定义域,相应的 y 值的集合则称为函数的值域.

当自变量 x 在其定义域内取某个确定值 x_0 时,因变量 y 按照所给函数关系 $y=f(x)$ 求出的对应值 y_0,则 y_0 叫做当 $x=x_0$ 时的函数值,记作 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$.

[例 1] 已知 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$,求:$f(0)$,$f(\dfrac{1}{2})$,$f(-x)$,$f(\dfrac{1}{x})$,$f(x+1)$,$f(x^2)$.

解: $f(0)=\dfrac{1-0}{1+0}=1$,

$$f(\frac{1}{2})=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3},$$

$$f(-x)=\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\frac{1+x}{1-x},$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x+1},$$

$$f(x+1)=\frac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=\frac{-x}{2+x},$$

$$f(x^2)=\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

[例 2] 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\dfrac{3}{5x^2+2x}$;

(2) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$;

(3) $f(x)=\lg(4x-3)$;

(4) $f(x)=\arcsin(2x-1)$;

(5) $f(x)=\lg(4x-3)-\arcsin(2x-1)$.

解:(1) 在分式$\dfrac{3}{5x^2+2x}$中,分母不能为零,所以 $5x^2+2x\neq 0$,解得 $x\neq-\dfrac{2}{5}$,且 $x\neq 0$,即定义域为

$$(-\infty,-\frac{2}{5})\cup(-\frac{2}{5},0)\cup(0,+\infty).$$

(2) 在偶次根式中,被开方式必须大于等于零,所以有 $9-x^2\geqslant 0$,解得 $-3\leqslant x\leqslant 3$,即定义域为$[-3,3]$.

(3) 在对数式中,真数必须大于零,所以有 $4x-3>0$,解得 $x>\dfrac{3}{4}$,即定义域为$(\dfrac{3}{4},+\infty)$.

(4) 反正弦或反余弦中的式子的绝对值必须小于等于 1,所以有 $-1\leqslant 2x-1\leqslant 1$,解得 $0\leqslant x\leqslant 1$,即定义域为$[0,1]$.

(5) 该函数为(3),(4)两例中函数的代数和,此时函数的定义域应为(3),(4)两例中定义域的交集,即$(\dfrac{3}{4},+\infty)\cap[0,1]=$

$(\frac{3}{4},1]$.

应当指出,在实际应用问题中,除了要根据解析式子本身来确定自变量的取值范围以外,还要考虑到变量的实际意义.

函数 $f(x)$ 的具体表达方式是不尽相同的,这就产生了函数的不同表示法,函数的表示法通常有 3 种:公式法、表格法和图示法.

(1) 以数学式子表示函数的方法叫做函数的公式法,上述例子中的函数都是以公式表示的,公式法的优点是便于理论推导和计算.

(2) 以表格形式表示函数的方法叫做函数的表格法,它是将自变量的值与对应的函数值列为表格,如三角函数表、对数表、企业历年产值表等,都是以这种方法表示的函数,表格法的优点是所求的函数值容易查得.

(3) 以图形表示函数的方法叫做函数的图示法.这种方法在工程技术上应用较普遍,图示法的优点是直观形象,且可看到函数的变化趋势.

3. 分段函数

把定义域分成若干部分,函数关系由不同的式子分段表达的函数称为分段函数.分段函数是微积分中常见的一种函数.例如在中学数学课出现过的绝对值函数可以表示成

$$y = |x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

[例 3] 符号函数

$$y = \mathrm{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

就是一个分段函数,它的定义域为 $D = (-\infty, +\infty)$,值域为 $M = \{-1, 0, 1\}$(如图 1-1 所示).

[例 4]　设函数

$$y=f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x>0\\ 2 & x=0\\ 3x & x<0\end{cases}$$

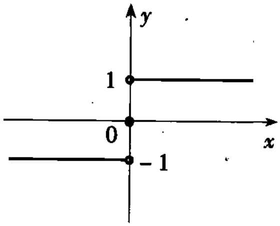

图 1-1

当 x 取 $(0,+\infty)$ 内的值时，y 的值由关系式 $y=x^2+1$ 来计算；当 $x=0$ 时，$y=2$；当 x 取 $(-\infty,0)$ 内的值时，y 的值由关系式 $y=3x$ 来计算. 例如，$f(3)=3^2+1=10$，$f(-5)=3\times(-5)=-15$. 它的图像如图 1-2 所示.

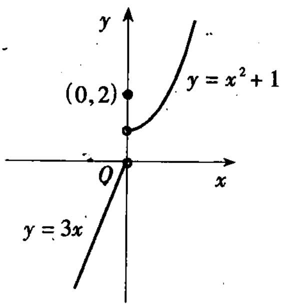

图 1-2

注意：分段函数是由几个关系式合起来表示一个函数，而不是几个函数. 对于自变量 x 在定义域内的某个值，分段函数 y 只能确定惟一的值. 分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并集.

[例 5]　设函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & -4\leqslant x<1\\ 1 & 1\leqslant x<3\\ 5x-1 & x\geqslant 3\end{cases}$$

求 $f(-\pi)$，$f(1)$，$f(3.5)$ 及函数的定义域.

解：因为 $-\pi\in[-4,1)$，所以 $f(-\pi)=\sin(-\pi)=0$；因为 $1\in[1,3)$，所以 $f(1)=1$；因为 $3.5\in[3,+\infty)$，所以 $f(3.5)=5\times3.5-1=16.5$；函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-4,+\infty)$.

[例 6]　用分段函数表示函数 $y=3-|2-x|$，并画出图形.

解：根据绝对值定义可知，当 $x\leqslant2$ 时，$|2-x|=2-x$；当 $x>2$ 时，$|2-x|=x-2$. 于是有

$$y=\begin{cases}3-(2-x) & x\leqslant2\\ 3-(x-2) & x>2\end{cases}$$

即 $y=\begin{cases}1+x & x\leqslant 2\\ 5-x & x>2\end{cases}$

其图像如图 1-3 所示.

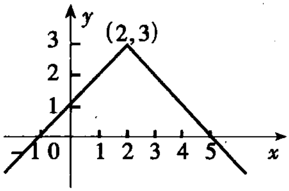

图 1-3

1.1.2 函数的几种特性

1. 函数的有界性

定义 2 设函数 $y=f(x)$在集合 D 上有定义,如果存在一个正数 M,对于所有的 $x\in D$,恒有$|f(x)|\leqslant M$,则称函数$f(x)$在 D 上是有界的.如果不存在这样的正数 M,则称 $f(x)$在 D 上是无界的.

如图 1-4 所示,函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有界的几何意义是:曲线 $y=f(x)$在区间(a,b)内被限制在 $y=-M$ 和 $y=M$ 两条直线之间.

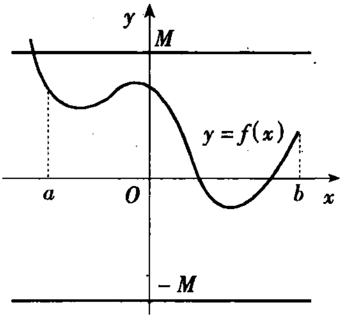

图 1-4

对于函数的有界性,要注意以下两点:

(1) 当一个函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有界时,正数 M 的取法不是惟一的.例如 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的,有$|\sin x|\leqslant 1$,但也可以取 $M=2$,即$|\sin x|<2$ 总是成立的,实际上 M 可以取任何大于 1 的数.

(2) 有界性是依赖于区间的.例如 $y=\dfrac{1}{x}$在区间$(1,2)$内是有界的,但在区间$(0,1)$内则无界.

2. 函数的奇偶性

定义 3 设函数 $y=f(x)$在集合 D 上有定义,如果对任意的 $x\in D$,恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$为偶函数;如果对任意的

$x \in D$,恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$为奇函数.

由定义可知,对任意的 $x \in D$,必有 $-x \in D$,否则,$f(-x)$没有意义.因此函数具有奇偶性时,其定义域必定是关于原点对称的.

偶函数的图像是对称于 y 轴的,如图 1-5 所示.因为 $f(-x)=f(x)$,所以如果点 $P(x,f(x))$是曲线上的一个点,则它关于 y 轴的对称点 $Q(-x,f(x))$,也是曲线上的点.

奇函数的图像是对称于原点的,如图 1-6 所示.因为 $f(-x)=-f(x)$,所以如果点 $p(x,f(x))$是曲线上的一个点,则它关于原点的对称点 $Q(-x,-f(x))$也是曲线上的点.

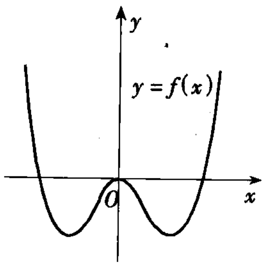

图 1-5

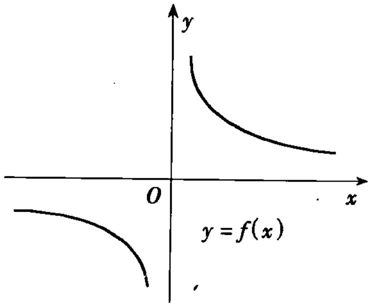

图 1-6

[例 7] 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=3x^4-5x^2+7$;

(2) $f(x)=2x^2+\sin x$;

(3) $f(x)=\frac{1}{2}(a^{-x}-a^x)(a>0,a\neq 1)$.

解:由函数奇偶性的定义可知:

(1) 因为 $f(-x)=3(-x)^4-5(-x)^2+7=3x^4-5x^2+7=f(x)$,所以 $f(x)=3x^4-5x^2+7$ 是偶函数.

(2) 因为$f(-x)=2(-x)^2+\sin(-x)=2x^2-\sin x\neq f(x)$,同样可以得到$f(-x)\neq -f(x)$,所以$f(x)=2x^2+\sin x$既非奇函数,也非偶函数.

(3) 因为$f(-x)=\frac{1}{2}(a^{-(-x)}-a^{-x})=\frac{1}{2}(a^{x}-a^{-x})=-\frac{1}{2}(a^{-x}-a^{x})=-f(x)$,所以$f(x)=\frac{1}{2}(a^{-x}-a^{x})$是奇函数.

3. 函数的单调性

定义 4 设函数$y=f(x)$在区间(a,b)内有定义,如果对于(a,b)内的任意两点x_1和x_2,当$x_1<x_2$时,有$f(x_1)<f(x_2)$,则函数$f(x)$在(a,b)内是单调增加的;如果对于(a,b)内的任意两点x_1和x_2,当$x_1<x_2$时,有$f(x_1)>f(x_2)$,则称函数$f(x)$在(a,b)内是单调减少的.

单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数.

单调增加的函数的图像是沿x轴正向逐渐上升的,如图1-7所示;单调减少的函数的图像是沿x轴正向逐渐下降的,如图1-8所示.

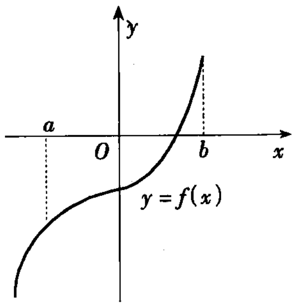

图 1-7

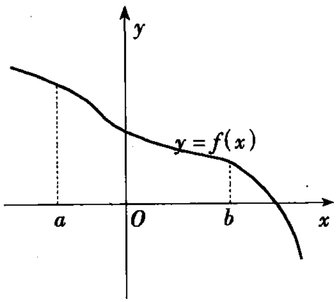

图 1-8

[例 8] 验证函数$y=3x-2$在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的.