GAI LULUN

概率论

吴俊杰 编

湖南大学出版社

概 率 论

吴俊杰 编

湖 南 大 学 出 版 社

内 容 提 要

全书分为六章，随机事件与概率、随机变量、随机向量、随机变量函数的分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理。本书说理清楚、深入浅出，着重学生能力的培养，既便于教学，又便于自学，并有大量的典型例题，各章都配备适量的习题和答案。

本书可作为高等工业院校、财经院校的教材，也可作为函大、电大及职工高等院校教材，工程技术人员，社会青年自学用书。

概 率 论

吴俊杰 编

责任编辑 朱 华

☆

湖南大学出版社出版发行

（长沙市岳麓山）

湖南省新华书店经销 湖南大学印刷厂印刷

☆

787×1092 32开 9.75印张 217.6千字

1989年7月第1版 1989年7月第1次印刷

印数：0001——4000册

ISBN 7-314-00422-6/O·26

定价：1.95元

引　言

自然界里人们观察到的现象大体可归结为两类。一类是所谓的确定性现象，例如，在一个标准大气压下，水在100℃时会沸腾，清晨太阳必然从东方升起；重物总是垂直地落在地面，等等，这一类现象在观察前是可以预言的，它的结果是确定的。但是人们还发现另一类现象，它是事前不可能预言的，在相同的条件下重复进行观察，其结果未必相同。例如，在自动化车间里，每天将有多少台机床发生故障；新生的婴儿是男孩还是女孩；抛掷一枚均匀的对称的硬币，结果是正面向上还是背面向上；某射手射击一次是击中10环还是没击中10环等等，这些现象在观察后才能知道它的结果，而事先由于它出现哪个结果的不确定性，而无法预言。这一类现象称为随机现象。是不是随机现象没有规律性可言呢？人们通过反复的观察和实践，发现它们具有明显的统计规律性。例如，尽管初生婴儿对个别讲，生男孩或女孩是有随机性，但根据各个国家各时期人口的统计资料，新生婴儿中男孩和女孩的比例大约总是1:1。又如对靶进行射击，观察命中点的分布，当射击次数很多时，就会发现离靶心越近，分布越密等等。由此可知，对随机现象作个别观察，有明显的不确定性，即它有多种可能的结果发生，而事前无法断言出现那个结果，而在大量重复观察时，就表现出某种规律，我们称它为随机现象的统计规律性。

概率论是研究随机现象统计规律性的学科，它是现代数学的重要分支之一。它不仅有丰富的理论，而且广泛地应用在工业、农业、军事、医学、公用事业、尖端科学等各个领域中，并起着越来越重要的作用。因此，对每一个科学工作者或工程技术人员来说，掌握这门学科具有重要的现实意义。

目　录

第一章　随机事件与概率

§1　随机事件

一、随机试验与样本空间

为了叙述方便起见，我们把观察和试验统称为试验，也就是说，这里把试验的含义推广，它既指各种各样的科学试验，也把对某事物的某一种特征进行的一次观察，称为进行一次试验。

具有下列特点的试验称为随机试验。

1. 它可以在相同的条件下重复进行；

2. 每次试验的可能结果不止一个，而究竟出现那个结果，试验前不能准确地预言。

3. 试验中一切可能的结果在试验前是已知的，而且每次试验中必有一个结果出现，也仅有一个出现。

例 1　抛一枚硬币（今后所有例中提到的硬币，除特别声明外，都是质地均匀、形状对称的硬币）观察出现正反面的情况，一次试验就是抛一枚硬币，这是随机试验，记为 E_1，试验的可能结果有两个：出现正面，出现反面。在试验前是无法断言那个结果出现。

例 2　设袋中有6个球，每个球编一个号码，编号为1，2，3，4，5，6。从中任取一球，观察取得球的号码，它也是随机试验，记为 E_2，试验的可能结果有6个：号码是

1，2，3，4，5，6。

例 3 将一枝硬币抛两次，观察出现正、反面的情况，这里把硬币抛二次是进行一次试验，这个随机试验记为E_3，试验的可能结果有4个：（正，正），（正，反），（反，正），（反，反），这里的记号如（反，反）表示“第一次出现反面，第二次出现反面”。

例 4 从包含一件次品（记为a）和四件正品（记作b_1，b_2，b_3，b_4）的五件产品中任意取出两件，具体拿出两件就是进行一次试验，这个随机试验记为E_4，它有10个可能的结果，如用记号（b_1，b_2）表示拿到两件是“正品b_1和正品b_2”，则实验可能的结果是（a、b_1），(a、b_2)，(a、b_3)(a、b_4)，(b_1、b_2)，(b_1、b_3)，(b_1，b_4)，(b_2，b_3)，(b_2、b_4)，(b_3，b_4)，在试验前不能确定那个结果会出现，而试验后必有且仅有其中一个出现。

例 5 记录某电话交换台接到的呼叫次数，这是随机试验，记为E_5，试验的结果是（接到呼叫数）：0（没有呼叫），1（接到1次呼叫），2，3，…，由于难于规定一个呼叫数的上界，所以认为每个非负整数都是一个可能的试验结果。

随机试验的每一个可能结果，称为**基本事件**，全体基本事件组成的集合称为**样本空间**，通常用字母Ω表示，Ω中的元素，即基本事件，有时也称为样本点。

这样可以看出

对于随机试验E_1，样本空间为

$$\Omega_1=\{正、反\}$$

它是由出现正面，出现反面这两个基本事件所组成。

对于随机试验E_2，样本空间为

$$\Omega_2=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

它是由6个基本事件所组成。

对于随机试验E_3，其样本空间为

$$\Omega_3=\{(\text{正、正}),(\text{反、正}),(\text{正、反}),(\text{反、反})\}$$

它是由4个基本事件所组成

对于随机试验E_4，其样本空间为

$$\Omega_4=\{(a、b_1), (a、b_2),(a、b_3), (a、b_4), (b_1,b_2), (b_1, b_3),(b_1, b_4),(b_2, b_3), (b_2, b_4), (b_3, b_4)\}$$

它是由10个基本事件所组成。

至于随机试验E_5，其样本空间为

$$\Omega_5=\{0, 1, \cdots, n, \cdots\}$$

每一个非负整数都是一个基本事件。

二、随机事件

在随机试验中可能出现也可能不出现的事件，称为**随机事件**。

例如在例1中"出现正面"、"出现反面"都是随机事件，例3中（正、正），（正、反），（反，正），（正、正）也都是随机事件，而通常提到的随机事件是由若干个基本事件所组成，因而从集合论的观点可以把随机事件看成为样本空间的某个子集。

例 6 对于随机试验 E_4，设A表示"抽到次品"的事件，这是一个随机事件，它可能出现，也可能不出现，在一次试验中A出现，当且仅当基本事件(a, b_1), (a, b_2), (a, b_3), (a, b_4)在这次试验中出现一个，于是我们可以认为A是由基本事件$(a、b_1)$, (a, b_2),(a, b_3),(a, b_4)所组成，而随机事件A是由它们为元素所组成的集合。

$$A=\{a、b_1), (a、b_2), (a、b_3), (a、b_4)\}$$

此集合显然是样本空间Ω_4的子集。

从例6可以看出，由于随机事件是由基本事件所组成的，引入样本空间后，随机事件看成是样本空间的子集，而且随机事件出现，当且仅当这个子集所包含的一个基本事件出现。

例7 在随机试验E_2中，样本空间 $\Omega_2=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，

若A表示随机事件“出现偶数号球”则A由“出现2号球”，“出现4号球”，“出现6号球”这三个基本事件所组成：

$$A=\{2, 4, 6\}$$

而当A出现时，必是“出现2号球”，“出现4号球”或“出现6号球”这三个基本事件必有一个出现，而当这三个基本事件之一出现时，A必出现，且$A=\{2, 4, 6\}$，$\Omega_2=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，即随机事件$A$是样本空间的一个子集。

我们把每次试验都必然出现的事件称为**必然事件**，用Ω表示，而把每次试验都不可能出现的事件称为**不可能事件**，记为ϕ，例如在随机试验E_2中，随机事件A_1“取出球的号码大于零且小于8”是必然事件，而A_2“取出一球其号码大于10”是不可能事件。

必然事件与不可能事件本质上没有不确定性，也就是说它们并不是随机事件，但是为了讨论方便起见，把它们当做一种特殊的随机事件。

今后我们把随机事件简称为事件，而将随机试验，简称为试验。

三、事件的关系及运算

和现实世界其它事物一样，事件也是相互联系的，我们不能孤立地研究一个事件的本身，而需要研究在同样的条件下的几个事件以及它们之间的关系，使我们能够通过对一些较简单事件的了解，去研究与它有关的较复杂的事件。在下面的讨论中假定样本空间Ω已经给定，而且 A、B、C 及 $A_i(i=1, 2, \cdots)$ 是Ω中的一些事件。

1. 事件的包含与相等

如果事件A出现必然导致事件B出现，则称事件B 包含事件A，或称A是B的子事件，记为

$$A\subset B \text{或} B\supset A$$

例 8 设试验是让点随机地落在矩形内，事件A表示“点落在小圆里”，B表示“点落在大圆里”则当点落在小圆里时，该点必落在大圆里（见图1.1.1)也就是说，若A出现则B必出现，因此有B包含A。

如果事件A包含事件B，同时事件B也包含事件A，即 $B\subset A$，$A\subset B$ 同时成立，则称事件A与B相等（或称等价）记为 $A=B$

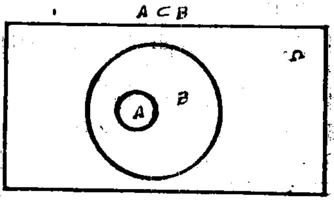

图 1.1.1

又例如在例 2 中若A表表示“取出一球号码是5”，B 表示“取出一球号码是奇数”，则 $A\subset B$。如果 A 表示“取出一球其号码能被 3 整除”以B表示“取出一球其号码是 3 或 6 ”，则$A=B$。

例 9 在检查某圆柱形产品时，要求它的长度和直径都符合规格才算合格品，若用A表示“合格品”，B表示“圆

柱形产品直径和长度都符合规格”则$A=B$。

2． 事件的和

事件A与B中至少有一个出现是一个事件，称为事件A与B的和记为$A \cup B$。

事件$A \cup B$出现等价于A出现或者B出现。

例如在例9中，检查圆柱形产品若用C表示“产品不合格”，A_1表示“产品长度不合格”，A_2表示“直径不合格”则有

$$C=A_1 \cup A_2$$

它表示事件C（即产品不合格）的出现是“直径不合格”或“长度不合格”这两个事件中至少有一个出现，而“长度不合格”或“直径不合格”中至少有一个出现时，则产品不合格，故事件“产品不合格”是事件“直径不合格”与事件“长度不合格”的和。

例10 设点随机地落在矩形区域内。用A表示“点落在左边小圆内”，B表示“点落在右边大圆内，”如图1.1.2所示，考虑事件“点落在阴影部分内”，记为C，可以看出，当且仅当点落在至少一个圆里时，点落在阴影部分内，也就是说，当且仅当事件A、B中至少有一个出现时（即点或者落在左边小圆内，或者点落在右边大圆内）事件“点落在阴影部分内”出现，因此，事件C是事件A与B的和。

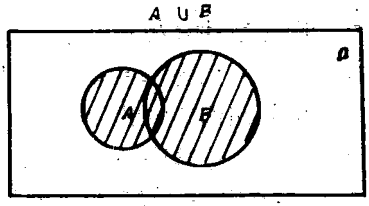

图 1.1.2

3． 事件的积

事件A与事件B同时出现是一个事件，称为事件A与B的积，记有$A\cap B$或AB。

例如在例9中检查圆柱形产品，“产品合格”是“直径合格”与“长度合格”这两个事件的积。

例11 设点随机地落在矩形区域内，事件A、B的定义与例10中的相同如图1.1.3所示，则事件“点落在两圆公共部分里”就是事件A、B的积，此时点既落在左边的圆内，又落右边的圆内，故A、B同时都出现。

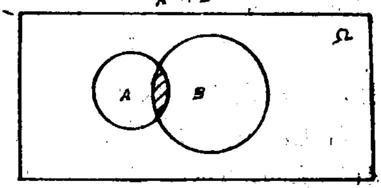

图 1.1.3

事件的和与事件的积可以推广到有限个甚至无限多个事件的情形。

事件“n个事件A_1，A_2，…，A_n中至少有一个出现”称为事件A_1，A_2，…，A_n的和，记为$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$缩写为$\bigcup_{i=1}^{n}A_i$，事件“$A_1$，…，$A_n$，…中至少有一个出现”称为可数多个事件$A_1$，…，$A_n$，…的和记为$A_1\cup A_2\cdots\cup A_n\cdots$，缩写为$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$。

事件“A_1，…，A_n”都同时出现”称为事件A_1，…，A_n的积，记为$A_1\cap A_2\cdots\cap A_n$或$A_1A_2\cdots A_n$，缩写为$\bigcap_{i=1}^{n}A_i$，事件“$A_1$，$A_2$，…，$A_n$，…都同时出现”称为可数多个事件$A_1$，…，$A_n$，…的积，记为$A_1\cap A_2\cdots\cap A_n\cdots$或$A_1A_2\cdots A_n\cdots$，缩写为$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$。

例如在例5中，事件“呼叫次数是奇数”是事件“呼叫次数是1”，“呼叫次数是3”，“呼叫次数是5”，…等的和，而“呼叫次数是偶数”，“呼叫次数大于3”，“呼叫次数不超过8的积是事件“呼叫次数为4或6或8”。

4. 互不相容（互斥）事件与对立事件

如果两个事件A、B不能同时出现，即A、B同时出现是不可能事件

$$A\cap B=\phi \tag{1.1}$$

则称A、B互不相容或互斥。

若A_1，…A_n诸事件中，任何两个互不相容，即$A_i\cap A_j=\phi(i\neq j,\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots n)$则称$A_1$，…$A_n$互不相容或称$A_1$，…，$A_n$两两互不相容。

如果事件A、B满足

$$A\cup B=\Omega,\quad A\cap B=\phi \tag{1.2}$$

则称B为A的对立事件，记为$B=\overline{A}$，即A、B至少有一个出现是必然事件，而A、B同时出现是不可能事件，它说明在一次试验中A与B必定出现一个，且只能出现一个，A出现B必不出现，A不出现B必出现。

例如在例5中，以A表示“呼叫次数为偶数”则A的对立事件$\overline{A}$为“呼叫次数为奇数”，同样“呼叫次数是奇数”的对立事件是“呼叫次数为偶数”，这说明A是B的对立事件，则B也是A的对立事件，即A、B互为对立事件，必然事件与不可能事件互为对立事件。

我们注意到，随机试验的所有基本事件都是两两互不相容的，因为每次试验只能出现一个结果（基本事件），任何两个不同结果都不能同时出现，但基本事件彼此未必互为对立事件，例如在例2中基本事件“出现号码2”与“出现号

码3”是互不相容的，它们不是对立事件，因为号码2不出现时“号码3”也可能不出现，而可能是事件“出现号码4”发生，总之对立事件一定互不相容，而互不相容事件未必是对立事件。

例12 设点随机地落在矩形区域内，用A表示“点落在圆内”的事件，事件“点落在圆外”就是A的对立事件，点不落圆内就落在圆外，故事件“点落在圆外”是A的对立事件，记为$\overline{A}$，（如图1.1.4所示）。

5. 事件的差

事件A出现而B不出现是一个事件，称为事件A与事件B的差，记为$A-B$。

例如在例2中设A为事件“出现偶数号”B为“出现的号数超过3”则事件$A-B$为既要号数为偶数又不能超过3，于是

$A-B$为事件“号数为2”。又如事件“直径合格但长度不合格”就是事件“直径合格”与“长度合格”的差。

例13 设事件A、B与例10的规定相同，“点落在图1.1.5中阴影部分里”表示事件A与B的差即点落在小圆内而不落在大圆内。

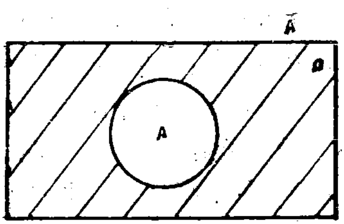

图 1.1.4

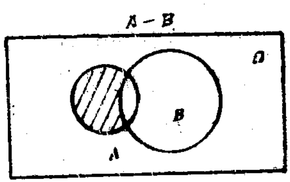

图 1.1.5