

数学问题的解决

数学问题

于琛 / 著

东北师范大学出版社



数学问题的解决

SHUXUE WENTI DE JIEJUE

手探著

■东北师范大学出版社

长 春

图书在版编目 (CIP) 数据

数学问题的解决/于琛著. —长春: 东北师范大学出版社, 2002. 4

ISBN 7 - 5602 - 2581 - 0

I. 教… II. 于… III. 数学问题 - 中小学 - 课外读物
IV. 01—0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 21891 号

☐ 出版人: 贾国祥

☐ 责任编辑: 杨述春 ☐ 封面设计: 魏国强

☐ 责任校对: 孙 群 ☐ 责任印制: 张允豪

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街 138 号 (130024)

销售热线: 0431—5687213

传真: 0431—5691969

网址: <http://www.nnup.com>

电子函件: sdcbbs@mail.jl.cn

东北师范大学出版社激光照排中心制版

吉林工学院印刷厂印刷

2000 年 4 月第 1 版 2002 年 7 月第 2 次印刷

开本: 850mm×1168mm 1/32 印张: 14.625 字数: 310 千

印数: 3 001 — 6 000 册

定价: 20.00 元

如发现印装质量问题, 影响阅读, 可直接与承印厂联系调换

前 言

用问题解决系统研究开发中小学数学思考题在中国乃至世界上还是一种新的探索. 本书就是这项研究的第一部成果. 本项研究的宗旨是本着“面向现代化, 面向世界, 面向未来”的精神, 从加强对学生的素质教育出发, 从研究、开发数学思考题入手, 探索加快数学教育中教学模式、教学内容、教学过程、教学手段、教学方法改革的新路. (为什么要研究问题解决数学? 请参阅本书 4.)

本书用问题解决系统开发中小学数学思考题的目标在于企图收到五个方面的效益: 一能激发学生学习数学的兴趣; 二能树立学好数学的信心; 三能养成独立思考、刻苦钻研、主动参与的态度; 四能加快学生的智力开发; 五能全面地培养与提高学生的学习能力、思考能力、创造能力. (何谓问题解决系统? 请参阅本书 9.)

现行中小学数学课本中的思考题, 是仅供学有余力的学生选作的. 本书采用问题解决系统研究开发的思考题(其中许多是课本的思考题或它的变形)不仅对学有余力的学生提出了怎样分析、思考、研究、解决思考题的具体要求, 而且对所有学生如何学习思考题, 怎样研究思考题提供了可行的实施意见.

本书还将古今中外的一些数学名题和趣味数学中某些典型的题目开发成问题解决数学中的问题,并且在开发过程中尽量渗透了现代数学思想、方法和语言.这样做不仅有利于提高学生的科学文化与思想品德的素质,而且为了使本书能面向广大的读者,并为各种不同程度的读者,提供了多种选择阅读、参考的可能性.

本书的部分问题在国内不同年级的中小學生以及美国华人子弟中作过种种实验,无论采取什么形式,如课内的选教与选学,或课外活动的集体研讨与个人自学,都收到了良好效果,常常是同一问题不同年级的学生都可以参与研究解决,特别是学生主动参与越多,收效就越好.

本书的主要阅读对象是中小学学生和数学教师.也可供广大的数学研究人员、数学教育工作者以及大专院校各科教师、学生和数学爱好者参考.

本书在研究、开发与编写过程中参阅了许多文献资料,除书中指出的资料来源外,恕未一一列出,在此一并致谢!

由于这项研究是新的工作,加上作者水平的限制,考虑不周甚至错误之处在所难免,敬请专家和读者批评指正.

于琛

1998年5月

目 录

小学数学

一、引 论

第一章	数学与数学教育 / 2
	1. 数学概况及其发展 / 2
	2. 坚持“三个面向”的精神,改革中学数学教学内容 / 21
	3. 高中数学教学内容改革的回顾与研讨 / 35
第二章	问题解决及其系统 / 55
	4. 为什么要研究问题解决数学? / 55
	5. 研究问题解决数学的一点感受 / 60
	6. 谈谈小学数学一道思考题 / 64
	7. 关于问题解决 CAI 理论与实践的思考 / 77
	8. 问题解决与复习 / 86
	9. 关于问题解决系统的理论与实践的思考 / 90

二、小学数学

第三章	数与形 /97
一	九数与形 /97
	10. 九数两线 /97
	11. 九数三线 /99
	12. 九数三分 /104
	13. 九数六方 /108
	14. 九数八线 /110
	15. 九数选取 /120
	16. 四个三角 /123
	17. 七个三角(爱因斯坦问题) /126
	18. 和百问题 /131
	19. 方程巧解 /134
二	大于九的数与形 /135
	20. 十数四边 /135
	21. 十数五线(五角星) /137
	22. 十一数六线(三个十字) /139
	23. 十二数四线 /146
	24. 十二数六线(六角星) /150
	25. 十四数七线(七角星) /158
	26. 十五数五环(五环问题) /161
	27. 十六数十线(四阶幻方) /164
	28. 十六数五方(五方问题) /177

	29. 十六数八线(八角星) /182
	30. 四环四线 /186
三	小于九的数与形 /194
	31. 四数三方 /194
	32. 五数十二线 /197
	33. 六数三线 /201
	34. 六数九角 /203
	35. 三线两圆 /204
	36. 七数三线 /207
	37. 七数三圆 /209
	38. 两圆两线 /211
	39. 八数六方 /213
	40. 六面问题 /216
	41. 八数两式 /220
	42. 八数四式 /221
	43. 八数排序 /223
	44. 八数十六线 /239
第四章	思考与应用题 /242
一	思考题(四则填空) /242
	45. 加号等式 /242
	46. 加减等式 /243
	47. 减法填空(上) /244
	48. 减法填空(下) /245
	49. 乘法填空 /245
	50. 除法填空 /248

	51. 乘除填空 /249
	52. 等式填空 /250
	53. 和积相等 /251
	54. 两和相除 /252
二	序的应用 /253
	55. 百数求和 /254
	56. 年号总和 /255
	57. 开始年度 /256
	58. 日截其半 /256
	59. 算式求值 /258
	60. 五方变四 /259
	61. 十八根小棍 /263
三	应用题 /265
	62. 牛顿问题 /265
	63. 阿基米德问题 /272
	64. 卖蛋问题 /276
	65. 韩信分油 /280
	66. 欧拉分产 /283
	67. 智者分马 /286
	68. 人熊过河 /288
	69. 三物过河 /290
	70. 鸡兔同笼 /291
	71. 龟兔赛跑 /294
	72. 植树问题(上) /296
	73. 植树问题(下) /298

74. 子女分牛	/299
75. 三等分金板	/301
76. 拼正方形	/304
77. 巧拼方形	/305
78. 再拼方形	/308
79. 两方拼方	/310
80. 割瓶拼方	/313
81. 智者配房	/314
82. 百万异面	/317
83. 巧算周几	/319
84. 巧猜年龄	/321
85. 巧猜生日	/324
86. 比例妙用	/325
87. 距离问题	/328

三、中学数学

第五章	勾股定理的证明	/333
	88. 问题 1	/339
	89. 问题 2	/343
	90. 问题 3	/346
	91. 问题 4	/349
	92. 问题 5	/353
	93. 问题 6	/356

	94. 问题 7 /360
	95. 问题 8 /364
	96. 问题 9 /368
	97. 问题 10 /371
	自测题 /376
第六章	勾股定理的发展 /388
一	勾股四边形 /389
	98. 勾股矩形 /389
	99. 勾股菱形 /390
	100. 勾股平行四边形 /391
	101. 勾股梯形 /392
二	勾股三角形 /394
	102. 勾股正三角形 /394
	103. 勾股变腰三角形 /396
	104. 勾股直角三角形 /397
	105. 勾股一般三角形 /399
三	勾股圆 /400
	106. 勾股圆 /400
	107. 勾股扇 /401
	108. 勾股定腰三角形 /402
	109. 勾股弓形 /404
	110. 勾股五角星 /405
	111. 勾股混合形(一) /408
	112. 勾股混合形(二) /410
	113. 勾股混合形(三) /411

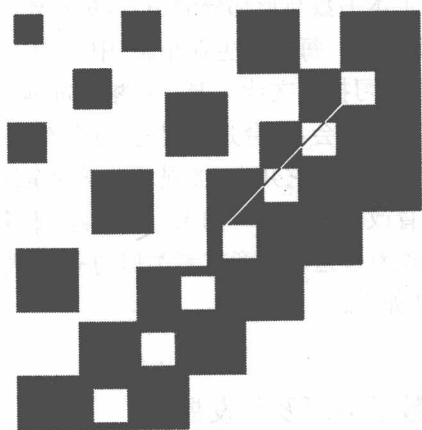
	114. 勾股混合形(四) /412
	115. 勾股混合形(五) /414
	自测题 /415
第七章	勾股定理的应用* /417
一	勾股定理在三角形中的应用 /417
	116. 问题 1 求正三角形的高和面积 /417
	117. 问题 2 求正三角形 AEF 的面积 /418
	118. 问题 3 求三角形的垂线长 /418
二	勾股定理在圆中的应用 /419
	119. 问题 4 求圆的切线长 /419
	120. 问题 5 求圆的半径 /419
	121. 问题 6 勾股容圆 /420
	122. 问题 7 求圆的半径和面积 /420
	123. 问题 8 求圆的半径 /421
三	勾股定理在立体图形中的应用 /422
	124. 问题 9 求正四面体的高与体积 /422
	125. 问题 10 求四面体的体积与高 /423
	126. 问题 11 求多面体的表面积 /424
	127. 问题 12 求最短距离 /425
	128. 问题 13 求圆锥的高与体积 /426
	129. 问题 14 求圆锥的体积 /426
	130. 问题 15 求球的半径 /427
四	勾股定理在图形计量中的应用 /428
	131. 问题 16 /428
	132. 问题 17 /429

	133. 问题 18 /429
	134. 问题 19 /430
五	等积变形的应用题 /431
	135. 问题 20 /431
	136. 问题 21 /432
	137. 问题 22 /433
	138. 问题 23 /434
	139. 问题 24 /435
	140. 问题 25 /435
第八章	1995 与 1997 /437
	141. 95 分房问题 /437
	142. 97 喜迎回归 /451

• 数学问题的解决 • 数学问题的解决 • 数学问题的解决 • 数学问题的解决 •

引 论

YINLUN YINLUN YINLUN



第一章 数学与数学教育

1 数学概况及其发展

经作者同意,我们把吴文俊的《数学概况及其发展》(选自《吴文俊文集》,山东教育出版社)这篇论文作为本书的引论.我们这样做,绝不只是为了本书数与形部分的引言,更重要是向所有读者全面推荐这篇文章.每个学生在小学、中学、大学各个阶段都应当结合数学学习把此文读几遍.我相信每读一遍,对它的内容的理解、掌握、体会,都会是不同的.每个教师,特别是数学教师,一生中应反复读它几次,加强对数学的全面理解,加强对当前数学教育改革的认识.如果一个教师(不论是否数学教师)一生中都没看过这篇文章或者类似的书籍,那肯定是个遗憾.它的全文如下:

□□□ 数学概况及其发展

数学,这门基础学科,已经越来越渗透到各个领域,成为各种科学技术、生产建设以至日常生活所不可缺少的有力武器.在现代的科学技术中,如果不借助数学,不与数学发生关系,就不可能达到应有的精确度与可靠性.就科学来说,数学

又是通向一切科学大门的钥匙,不仅所谓精确科学,如物理学、化学等已越来越需要较深较多的数学,甚至过去认为以描述为主,与数学关系不大的生物学、经济学等,也处于日益“数学化”的过程之中.这正像马克思早就指出过的那样:“一种科学只是在成功地运用数学时,才算达到了真正完善的地步。”

数学研究的对象是现实世界中的数量关系与空间形式.数与形,这两个基本概念是整个数学的两大柱石.整个数学就是围绕着这两个概念的提炼、演变和发展而发展着的.数学在各个领域中千变万化的应用也是通过这两个概念而进行的.社会的不断发展,生产的不断提高,为数学提供了无穷源泉与新颖课题,促使数与形的概念不断深化,由此推动了数学的不断前进,在数学中形成了形形色色、多种多样的分支学科.这不仅使数学这一学科日益壮大,蔚为大成,而且使数学的应用也越来越广泛与深入了.

我们将以数与形这两个概念为中心对数学的概貌先作一简单描述.

(一)数学是研究数与形的科学

大体说来,数学中研究数量关系或数的部分属于代数学的范畴.研究空间形式或形的部分,属于几何学的范畴.此外,数与形是有机联系而不是相互割裂的.远古时代,关于长度、面积、体积的量度,我国宋元时代出现的几何代数化,以及17世纪的解析几何,把形与数这两个概念沟通了起来(因而也把几何与代数这两者沟通了起来).近代函数概念与微积分方法的出现,在数学中形成了系统研究形、数关系的分析学,成为近代数学中发展最迅速的部分.几何、代数、分析三大类数学,

构成了整个数学的本体与核心。在这一核心周围,由于数学通过数与形这两个概念与其他领域的互相渗透而出现了许多边缘学科与交叉学科。这是整个数学王国的一个总的轮廓。

先从数说起

最简单最基本的也是从远古时起人类就不得不与之打交道的数,乃是正整数或自然数:

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

在正整数之间有两种最简单的运算:加法与乘法。研究整数之间的联系与规律的学问叫做数论。从乘法产生了素数*的概念,例如 $6(=2 \times 3)$ 是非素数,而 7 由于不能分解成两个比 7 更小的正整数的乘积而是素数(1 不算素数)。正整数的一个基本性质是,它总可以表示成若干个素数的乘积,例如 $12=2^2 \times 3$, $18=2 \times 3^2$, $45=3^2 \times 5$ 等,而且这种表示方法只有一种。素数 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... 在整个正整数序列中的分布是极不规则的,这个素数分布规律的探求产生了许多迄今没有解决的著名难题。哥德巴赫(Coldbach)问题**就是其中之一。这些难题反映了加法与乘法之间的矛盾,用初等方法对这些问题是无能为力的。微积分发明以后,数学家们开始用所谓解析方法来研究数论,开了解析数论这一学科。我国在哥德巴赫问题上的第一流成果,就是了解析方法而获得的。

* 对于大于 1 的整数来说,若除它本身与 1 之外再没有其他因子,则称此数为素数。

** 哥德巴赫提出一个论断:“任何一个大于 4 的偶数均可表示为两个素数之和”,即“ $1+1$ ”。我国年青数学家陈景润已证明了:“大偶数均可表示为一个素数加不超过两个素数的乘积”,即“ $1+2$ ”,把这个论断的证明向前大大推进了一步。