

花 **1** 小时的家教成本，
请回 **1** 学期的家教老师！

北师大版

数学

八年级上学期

解析

◎ **重点**

◎ **难点**

◎ **疑点**



非常教

◎ 青岛出版社

《非常家教》出版说明

 **知识导航** 提纲挈领 帮你明确学习目的,了解章节基本内容,梳理清晰的线索,是你课前预习的良师。

 **要点点拨** 有的放矢 直击重点、难点与考点,点拨核心知识点,记录课堂讲评要点,是你课堂学习的益友。

 **典例详析** 举一反三 精选典型例题,通透讲解,明示诀窍,详析规律,纠正误区,是你快速提高的捷径。

 **基础自测** 知根知底 题目难度适中,涵盖章节基本内容,力求夯实基础,可用于课后及时检测,是你巩固根本的秘方。

 **能力拓展** 触类旁通 优中选精,拒绝题海。帮你有效提升创新能力,增强学习的信心,打造智慧与成功之旅。

 **学习指南** 授人以渔 帮你归纳学习方法,及时总结解题思路,增强学习效果,探求为学之道。

 **章末总结**  **温故知新** 串联知识点,梳理知识结构;明确中考定位,把握命题趋势;指点迷津,是你自主复习的“非常家教”。

 **本章测评**  **量身定做,查漏补缺** 名家精心挑选全面涵盖本章内容的各种形式的习题,帮你巩固知识,及时发现不足,从而使复习更有针对性,事半功倍。

 **挑战中考**  因为似曾相识,所以游刃有余!

 **期中测评**  行百里者半九十,一定要再接再厉!

 **期末测评**  面对优异的成绩,非常家教平常心!



1. 探索勾股定理 (1)
 2. 能得到直角三角形吗 (4)
 3. 蚂蚁怎样走最近 (6)
 章末小结 (8)
 本章测评 (11)

第一章 勾股定理	(1)
1. 探索勾股定理	(1)
2. 能得到直角三角形吗	(4)
3. 蚂蚁怎样走最近	(6)
章末小结	(8)
本章测评	(11)

第二章 实数	(13)
1. 数怎么又不够用了	(13)
2. 平方根	(15)
3. 立方根	(18)
4. 公园有多宽	(20)
5. 用计算器开方	(22)
6. 实数	(24)
章末小结	(28)
本章测评	(30)

第三章 图形的平移与旋转	(32)
1. 生活中的平移	(32)
2. 简单的平移作图	(34)
3. 生活中的旋转	(37)
4. 简单的旋转作图	(39)
5. 它们是怎样变过来的 & 6. 简单的图案设计	(41)
章末小结	(44)
本章测评	(46)

第四章 四边形性质探索	(48)
1. 平行四边形的性质	(48)
2. 平行四边形的判别	(50)
3. 菱形	(53)
4. 矩形、正方形	(55)
5. 梯形	(58)
6. 探索多边形的内角和与外角和	(61)

7. 中心对称图形·····	(63)
课题学习 平面图形的镶嵌·····	(65)
章末小结·····	(67)
本章测评·····	(70)
第五章 位置的确定 ·····	(72)
1. 确定位置·····	(72)
2. 平面直角坐标系·····	(75)
3. 变化的“鱼”·····	(78)
章末小结·····	(81)
本章测评·····	(84)
第六章 一次函数 ·····	(86)
1. 函数·····	(86)
2. 一次函数·····	(88)
3. 一次函数的图象·····	(91)
4. 确定一次函数表达式·····	(93)
5. 一次函数图象的应用·····	(95)
章末小结·····	(98)
本章测评·····	(101)
第七章 二元一次方程组 ·····	(103)
1. 谁的包裹多·····	(103)
2. 解二元一次方程组·····	(105)
3. 鸡兔同笼·····	(108)
4. 增收节支·····	(110)
5. 里程碑上的数·····	(112)
6. 二元一次方程与一次函数·····	(114)
章末小结·····	(117)
本章测评·····	(119)
第八章 数据的代表 ·····	(121)
1. 平均数·····	(121)
2. 中位数与众数·····	(123)
3. 利用计算器求平均数·····	(126)
章末小结·····	(128)
本章测评·····	(131)
期中检测 ·····	(133)
期末检测 ·····	(136)
参考答案 ·····	(139)

第一章 勾股定理

1. 探索勾股定理

知识导航

勇于开始，才能找到成功的路

学完这节课后，小明说：“勾股定理很简单，就是如果直角三角形的三边分别为 a, b, c ，那么 a, b, c 的长度就满足 $a^2 + b^2 = c^2$ 。”你同意小明的说法吗？

要点点拨

读书不知要领，苦而无功

知识点 1 数格子法探索勾股定理

如图 1-1-1 所示，正方形 A、B、C 的面积分别为 4、16、20，A、B、C 面积之间的关系为：C 的面积 = A 的面积 + B 的面积。

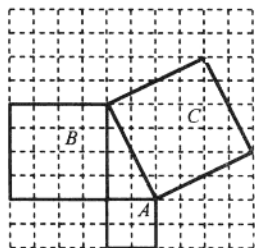


图 1-1-1

知识点 2 勾股定理

1. 勾、股、弦的定义。

我国古代把直角三角形中较短的直角边称为勾，较长的直角边称为股，斜边称为弦。如图 1-1-2 所示。

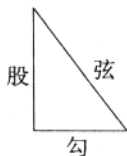


图 1-1-2

2. 勾股定理的内容。

直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方。如果直角三角形两直角边长分别为 a, b ，斜边为 c ，那么 $a^2 + b^2 = c^2$ 。

【注意】 勾股定理只对直角三角形适用，而不适用于锐角三角形和钝角三角形。

知识点 3 运用拼图验证勾股定理

勾股定理的验证方法多达上百种，而且很多巧妙的验证方法令人赞叹不已，但大多数都是采用拼图的方法。善于变换角度看问题，是这种方法验证勾股定理的技巧。用拼图的方法验证勾股定理的思路是：(1) 图形经过割补拼接后，只要没有重叠，没有空隙，面积不会改变。(2) 根据同一种图形面积的不同表示方法列出等式，推导出勾股定理。

典例详析

读书之法，莫贵于循序而致精

例题 1

如图 1-1-3 所示，已知勾为 2，股为 3，则以弦为边长的正方形的面积是 ()

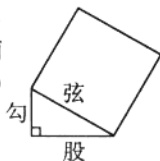


图 1-1-3

A. 4

B. 16

C. 5

D. 13



指点迷津

已知勾为 2，股为 3，则弦为 $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ 。所以正方形的面积为 $(\sqrt{13})^2 = 13$ 。

【答案】 D

例题 2

如图 1-1-4 所示，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=13$ ， $BC=14$ ， $AC=15$ ，求 BC 边上的高 AD 。

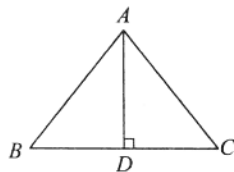


图 1-1-4



指点迷津

欲求 AD ，由于 AB, BC 均已知，只要求出 BD 或 DC 的长即可，若设 $BD=x$ ，则 $CD=14-x$ ，利用 $AD^2 = AB^2 - BD^2$ 和 $AD^2 = AC^2 - DC^2$ 得到 $AB^2 - BD^2 = AC^2 - DC^2$ ，即 $13^2 - x^2 = 15^2 - (14-x)^2$ ，从而求出 x ，问题则迎刃而解。

【解】 设 $BD=x$, 则 $CD=14-x$,

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 和 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $AD^2=13^2-x^2$, $AD^2=15^2-(14-x)^2$,

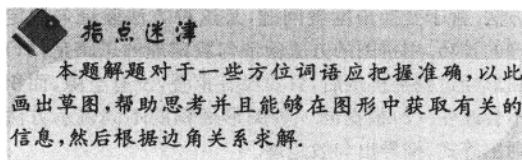
$$\therefore 13^2-x^2=15^2-(14-x)^2,$$

解之得: $x=5$.

$$\therefore AD=\sqrt{13^2-x^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12.$$

例题 3

一艘轮船以 16 海里/时的速度离开港口向东南方向航行,另一艘轮船在同时同地以 12 海里/时的速度向西南方向航行,它们离开港口 1.5 小时相距多远?



【解】 根据题意画出图形,如图 1-1-5 所示.

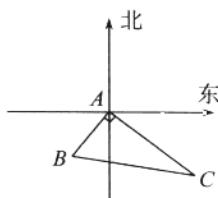


图 1-1-5

设港口所在地为 A,一轮船向东南方向行 1.5 小时到 C,另外一轮船向西南方向行 1.5 小时到 B,要求的是 BC 间的距离.显然 AC 与 AB 的夹角为 90° ,由题意知, $AC=24$ 海里, $AB=18$ 海里.

由勾股定理,得 $BC^2=AB^2+AC^2=18^2+24^2=900$,
所以 $BC=30$ 海里.

例题 4

如图 1-1-6 所示,图①是用硬纸板做成的两个全等的直角三角形,两直角边长分别为 a, b ,斜边长为 c ;图②是腰长为 c 的等腰直角三角形.请你开动脑筋,(1)将它们拼成一个能验证勾股定理的图形,画出拼成的图形的示意图并用其验证勾股定理;(2)假设图①中的直角三角形有若干个,你能运用图①中所给的直角三角形拼出另外一种能验证勾股定理的图形吗?请你画出拼成的示意图.

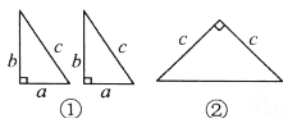
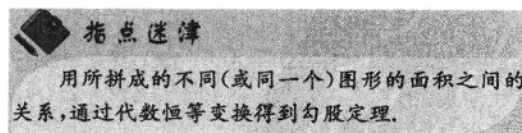


图 1-1-6



用所拼成的不同(或同一个)图形的面积之间的关系,通过代数恒等变换得到勾股定理.

【解】 (1)如图 1-1-7 所示,用三个直角三角形拼成了一个直角梯形,依据整体面积等于部分面积之和,可得 $S_{\text{梯形}}=\frac{1}{2}(a+b)(a+b)$,又 $S_{\text{梯形}}=\frac{1}{2}ab \times 2 + \frac{1}{2}c^2$,因此有 $\frac{1}{2}(a+b)(a+b)=\frac{1}{2}ab \times 2 + \frac{1}{2}c^2$,化简,得 $a^2+b^2=c^2$.

(2)能够拼出验证勾股定理的图形,如图 1-1-8 所示.在图 1-1-8 中,根据大正方形的面积-四个直角三角形的面积=空白小正方形的面积,可验证勾股定理.

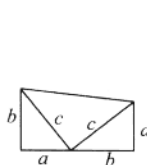


图 1-1-7

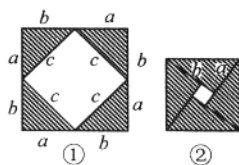


图 1-1-8

基础自测

做的技艺,来自做的过程

一、选择题

1. 下列说法中正确的为 ()

- A. 直角三角形中,两边平方和等于第三边平方
- B. 直角三角形中,两直角边和的平方等于斜边平方
- C. 直角三角形中,两直角边平方和等于斜边的平方
- D. 以上答案都不对

2. 已知直角三角形的两边分别为 3 和 4,则第三边为 ()

- A. 5
- B. $\sqrt{7}$
- C. 5 或 $\sqrt{7}$
- D. $\sqrt{5}$

3. 为了迎接新年的到来,同学们做了许多拉花布置教室,准备开新年晚会.小杰搬来一架高为 2.5 m 的木梯,准备把花拉到 2.4 m 的墙上,则梯脚与墙角的距离应为 ()

- A. 0.7
- B. 0.8
- C. 0.9
- D. 1.0

4. 我国古代数学家赵爽的《勾股圆方图》,是由四个全等的直角三角形与中间的小正方形拼成的一个大正方形(如图 1-1-9 所示).如果大正方形的面积为 13,小正方形的面积为 1,直角三角形的较短直角边为 a ,较长的直角边为 b ,则 $(a+b)^2$ 的值为 ()

- A. 13
- B. 19
- C. 25
- D. 169

二、填空题

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $a=10$, $b=24$,则 $c=$ _____.

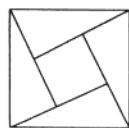


图 1-1-9

6. 如图 1-1-10 所示, 分别以直角三角形的三边为边作正方形, 图中未知正方形的面积分别为(1) _____; (2) _____; (3) _____.

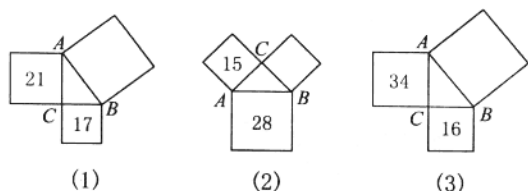


图 1-1-10

7. 如图 1-1-11, 木工做一个宽 60 cm, 高 80 cm 的长方形木框, 制作中需在对角的顶点加一个加固木板, 则木板长为 _____.

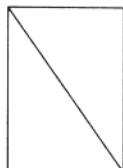
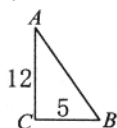


图 1-1-11

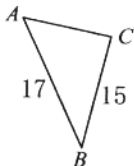
三、解答题

8. 根据下列图示, 求直角三角形未知的边.

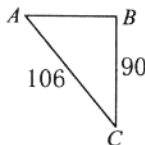
(1)



(2)



(3)



9. 如图 1-1-12 所示, 学校有一块长方形花圃, 有极少数人为了避开拐角走“捷径”, 在花圃内走出了一条“路”. 他们仅仅少走了多少步(假设 2 步为 1 m), 却踩伤了花草?

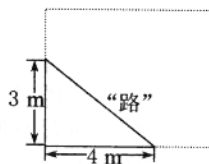


图 1-1-12

能力拓展

有志者自有千计万计, 无志者只感千难万难

10. 如图 1-1-13 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是高, 且 $AD=CD$, 若 $AB=5$, $BD=4$, 求: $S_{\triangle ABC}$.

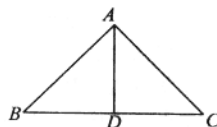


图 1-1-13

11. 一棵高 24 m 的大树被狂风折断后, 树梢着地处距树根部 12 m, 求大树的断裂处到地面的距离.

12. 根据图①②③, 用拼图的方法验证勾股定理.

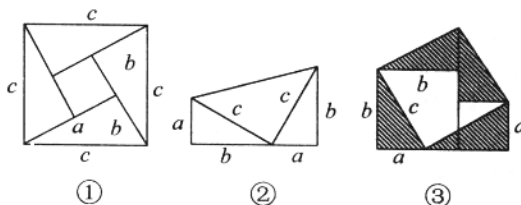


图 1-1-14

学习指南

学习最大的敌人是遗忘

1. 勾股定理是直角三角形特有的性质, 因此在利用勾股定理时, 首先要指明三角形是直角三角形, 这是同学们容易忘记的一点.

2. 拼图法验证勾股定理的核心是: 用所拼成的不同(或同一个)图形的面积之间的关系, 通过代数恒等变换得到勾股定理.

能得到直角三角形吗

知识导航

勇于开始，才能找到成功的路

小华的爸爸买了一个如图 1-2-1 所示的方桌，可小华认为 $\angle C$ 看上去不是直角，于是想检测一下。现小华身边只有一条几米长的细绳，请你帮助小华想一个办法来说明 $\angle C$ 是不是直角，并说明理由。

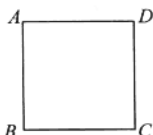


图 1-2-1

要点点拨

读书不知要领，苦而无功

知识点 1 直角三角形的判定条件

如果三角形三边长 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 = c^2$ ，那么这个三角形是直角三角形。

【注意】 依据上面的叙述我们应注意，并不是只要三个数满足其中两个数的平方和等于第三个数的平方，便可构成直角三角形，前提条件是这三个数首先应满足构成三角形的条件。

知识点 2 勾股数

能够满足 $a^2 + b^2 = c^2$ 的三个正整数，称为勾股数，例如 5, 12, 13 就是勾股数，利用勾股数可以构造直角三角形。

【注意】 1. 对于勾股数，我们需要牢记两个条件：(1) 必须满足 $a^2 + b^2 = c^2$ ；(2) 必须为正整数，两者缺一不可。

2. 同一组勾股数中各数的相同正整数倍得到一组数仍为勾股数，如 3, 4, 5 是勾股数，9, 12, 15 也是勾股数。

典例详析

读书之法，莫贵于循序而致精

例题 1

下列几组数能否作为直角三角形的三边长？说说你的理由。

- (1) 15, 36, 39; (2) 6, 8, 11; (3) 10, 24, 26.

指点迷津

首先求出两条较小边的平方和，再与最大边的平方比较，若相等，则说明这组数能作为直角三角形的三边长，而且最大数为斜边长。

【解】 (1) 因为 $15^2 + 36^2 = 39^2$ ，所以能作为直角三角形的三边长；(2) 因为 $6^2 + 8^2 = 100$ ， $11^2 = 121$ ，所以 $6^2 + 8^2 \neq 11^2$ ，所以不能作为直角三角形的三边长；

(3) 因为 $10^2 + 24^2 = 26^2$ ，所以能作为直角三角形的三边长。

例题 2

下列几组数中，为勾股数的是 ()

- A. 4, 5, 6 B. 12, 16, 20
C. -10, 24, 26 D. 2, 4, 4, 5, 5, 1

指点迷津

A 虽然 4, 5, 6 均为正整数，但 $4^2 + 5^2 \neq 6^2$ ；C 虽然 $(-10)^2 + 24^2 = 26^2$ ，但 $-10 < 0$ ；D 虽然满足 $2 \cdot 4^2 + 4 \cdot 5^2 = 5 \cdot 1^2$ ，但不是整数。

【答案】 B

例题 3

在 B 港有甲、乙两艘渔船，若甲船沿北偏东 60° 方向以每小时 8 海里的速度前进，乙船沿南偏东某方向以每小时 15 海里的速度前进，2 小时后，甲船到 M 岛，乙船到 P 岛，两岛相距 34 海里，你能知道乙船沿哪个方向航行吗？

指点迷津

解本题的关键是依题意画出图形，运用直角三角形的判定条件，得到直角三角形，再计算角度便可使问题得到解决。

【解】 如图 1-2-2 所示， $BM = 8 \times 2 = 16$ (海里)， $BP = 15 \times 2 = 30$ (海里)，已知 $MP = 34$ 海里，因为 $16^2 + 30^2 = 34^2$ ，即 $BM^2 + BP^2 = MP^2$ ，所以 $\angle MBP = 90^\circ$ 。又因为甲船沿北偏东 60° 方向航行可知， $\angle PBC = 30^\circ$ ，即乙船沿南偏东 30° 方向航行。

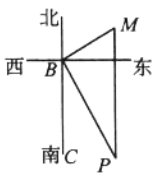


图 1-2-2

基础自测

做的技艺，来自做的过程

一、选择题

1. 分别以下列各组数为边长，能构成直角三角形的是 ()

- A. 8, 15, 17 B. 4, 5, 6
C. 5, 8, 10 D. 8, 39, 40

2. 一个三角形的三边的长分别是 15 cm, 20 cm, 25 cm，这个三角形的面积是 ()

- A. 250 cm^2 B. 150 cm^2
C. 200 cm^2 D. 不能确定

3. 下列命题中，正确命题的个数为 ()

(1) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，已知两边长为 3 和 4，则第三边为 5。

(2) 有一个内角等于其他两内角的三角形是直角三角形。

(3) 三角形的三边分别为 a, b, c , 若 $a^2 + c^2 = b^2$, 则 $\angle C = 90^\circ$.

(4) 若 $\triangle ABC$ 中, $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 5 : 6$, 则 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

二、填空题

4. 请你写出和为 30 的一组勾股数, 这三个数分别为 _____.

5. 如图 1-2-3 所示, 在 $\triangle ABD$ 中, $\angle A$ 是直角, $AB=4, AD=3, BC=12, DC=13$, $\triangle DBC$ _____ 直角三角形. (填“是”或“不是”.)

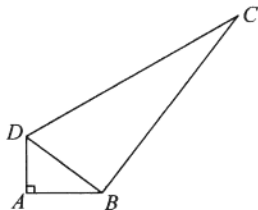


图 1-2-3

6. 一木工师傅做了一个长方形桌面, 量得桌面的长为 60 cm, 宽为 32 cm, 对角线长为 68 cm, 这个桌面 _____ (填“合格”或“不合格”).

三、解答题

7. 判断以线段 $a=0.6, b=1, c=0.8$ 为边组成的三角形是否为直角三角形.

8. 如图 1-2-4 所示, 在某市地图上三个景点 A、B、C, 已知景点 A、B 之间的距离为 0.4 cm, 景点 B、C 之间的距离为 0.3 cm, 景点 A、C 之间的距离为 0.5 cm, 问由这三个景点为顶点构成的三角形一定是直角三角形吗? 为什么?

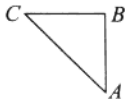


图 1-2-4

能力拓展

有志者自有千方百计, 无志者只能千难万难

9. 如图 1-2-5, 这是某农民建房时挖的地基的平面图, 按标准应为长方形, 他挖完后测量了一下, 发现 $AB=DC=8\text{ m}, AD=BC=6\text{ m}, AC=9\text{ m}$, 请你帮他看一下挖的是否合格.

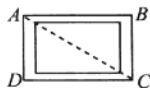


图 1-2-5

10. 如图 1-2-6 所示的一块草地, 已知 $AD=4\text{ m}, CD=3\text{ m}, AB=12\text{ m}, BC=13\text{ m}$, 且 $\angle CDA=90^\circ$, 求这块草地的面积.

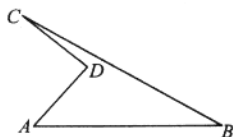


图 1-2-6

学习指南

学习最大的敌人是遗忘

1. 本节重点即为直角三角形的判定条件, 它是利用三角形三边的数量关系来判断一个三角形是否为直角三角形的重要依据, 是应用直角三角形各种性质的先决条件, 在现实生活中的应用更加广泛, 如说明垂直关系、求角的度数、方向角等方面.

2. 每组勾股数扩大相同倍数后仍为勾股数.

	2 倍	3 倍	4 倍	10 倍
3, 4, 5	6, 8, 10	9, 12, 15	12, 16, 20	30, 40, 50
5, 12, 13	10, 24, 26	15, 36, 39	20, 48, 52	50, 120, 130
8, 15, 17	16, 30, 34	24, 45, 51	32, 60, 68	80, 150, 170
7, 24, 25	14, 48, 50	21, 72, 75	28, 96, 100	70, 240, 250

3. 蚂蚁怎样走最近

知识导航

勇于开始，才能找到成功的路

李老师让同学们讨论这样一个问题：如图 1-3-1 所示，有一个长方体盒子，底面正方形的边长为 2 cm，高为 3 cm，在长方体盒子下底面的 A 点有一只蚂蚁，它想吃到上底面的 F 点处的食物，则怎样爬行路程最短？最短路程是多少？

过了一会儿，李老师问同学们答案，甲生说：“先由 A 点到 B 点，再走对角线 BF。”乙生说：“我认为应由 A 先走对角线 AC，再由 C 到 F 点。”丙生说：“将长方形 ABCD 与长方形 BEFC 展开成长方形 AEFD，利用勾股定理求 AF 的长。”丁生说：“将长方形 ABCD 与正方形 CFGD 展开成长方形 ABFG，利用勾股定理求 AF 的长。”你认为哪位同学的说法正确？你还有其它方法吗？若有，请叙述出来，并说明理由。（参考数据： $29 \approx 5.39^2$ ）

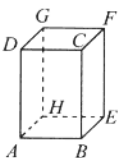


图 1-3-1

指点迷津

如图 1-3-3，蚂蚁从 A 点想吃到 B 点上的食物，它需要爬行的最短线路是 AB。

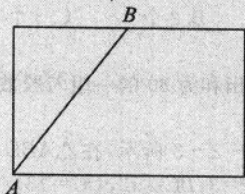


图 1-3-3

理由是两点之间，线段最短。

【解】圆柱的底面周长为： $2\pi r \approx 2 \times 3 \times 3 = 18$ (cm)。

取其一半： $\frac{1}{2} \times 18 = 9$ (cm)，圆柱的高 = 12 (cm)。

根据勾股定理 $AB^2 = 9^2 + 12^2 = 225$ 。

所以 $AB = 15$ (cm)。

答：蚂蚁走线段 AB 这条路线最近，这个最短路程约为 15 cm。

要点点拨

读书不要领，苦而尤功

知识点 几何体上两点之间最短路线问题

这里涉及的知识点是一种方法(或策略)，几何体根据组成面来分，大体分为三类：由曲面组成的(如球)；由平面和曲面组成的(如圆柱、圆锥)；由平面组成的(如正方体、长方体)。在这里，我们主要讨论两种情况：圆柱体上两点之间最短路线的求法；长方体、正方体(主要指不同面)上两点之间最短路线的求法。它们的解题思路是相同的，都是将立体的展开成平面的，然后依据两点之间线段最短确定最短路线，最后以最短路线为边构造直角三角形，利用勾股定理求解。

【注意】两点之间线段最短是平面上的定理，不要在圆柱的侧面等曲面上想当然地应用。

典例详析

读书之法，莫贵于循序而致精

例题

如图 1-3-2 所示，有一个圆柱，它的高等于 12 cm，底面半径等于 3 cm，在圆柱下底面的 A 点有一只蚂蚁，它想吃到上底面上与 A 点相对的 B 点处的食物，需要爬行的最短路线是多少？

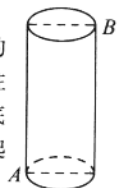


图 1-3-2

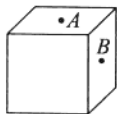
基础自测

做的技艺，来自做的过程

一、选择题

1. 如图 1-3-4 所示，点 A 和点 B 分别是棱长为 20 cm 的正方体盒子上相邻面的两个中心。一只蚂蚁在盒子表面由 A 处向 B 处爬行，所走的最短路线是 ()

- A. 40 cm
- B. $20\sqrt{2}$ cm
- C. 20 cm
- D. $10\sqrt{2}$ cm



2. 一消防员要爬上高 12 米的建筑(如图 1-3-5 所示)，进行灭火抢险，为安全起见，梯子底端距建筑物至少 5 米，若梯子顶端恰好到达建筑物顶端，则梯子的长至少为 ()

- A. 12 米
- B. 7 米
- C. 17 米
- D. 13 米

二、填空题

3. 如图 1-3-5 所示，在长方形 ABCD 中，E、F 分别是 AB、BC 上的点，且 $BE = 16$ ， $BF = 30$ ，则由 E 到 F 的最短距离为 _____。

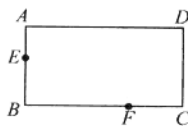


图 1-3-5

4. 如图 1-3-6 所示，校园内有两棵树相距 12 m，一棵树高 13 m，另一棵树高 8 m，一只小鸟从一棵树的顶端飞到另一棵树的顶端，小鸟至少要飞 _____ m。

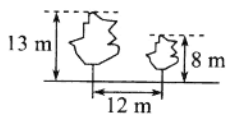


图 1-3-6

三、解答题

5. 有一圆柱形油罐，底面周长是 12 米，高是 5 米，现从油罐底部 A 点环绕油罐建梯子，正好到 A 点的正上方 B 点，则梯子最短需多少米？

6. 如图 1-3-7 所示，一只蜘蛛在一长方体木块的一个顶点 A 处，一只苍蝇在这个长方体上和蜘蛛相对的顶点 B 处，蜘蛛急于捉住苍蝇，沿着长方体的表面向上爬，它要从 A 处爬到 B 处，请你计算最短路程为多少？

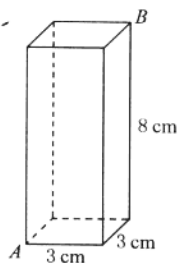


图 1-3-7

通过阅读以上信息，你能设计一种方法解决下列问题吗？

(1) 如果树的周长为 3 cm，绕一圈升高 4 cm，则它爬行的路程是多少厘米？

(2) 如果树的周长为 8 cm，每圈爬行 10 cm，则爬行一圈升高多少厘米？如果爬行 10 圈到树顶，则树干高多少厘米？

8. 李老师在与同学们进行“蚂蚁怎样爬最近”的课题研究时设计了以下两个问题，请你根据下列所给的重要条件分别求出蚂蚁需要爬行的最短路程的长。

(1) 如图①，正方体的棱长为 5 cm，一只蚂蚁欲从正方体底面上的点 A 沿着正方体表面爬到点 C_1 处；

(2) 如图②，正四棱柱的底面边长为 5 cm，侧棱长为 6 cm，一只蚂蚁从正四棱柱底面上的点 A 沿着棱柱表面爬到点 C_1 处。

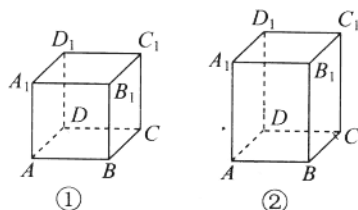


图 1-3-8

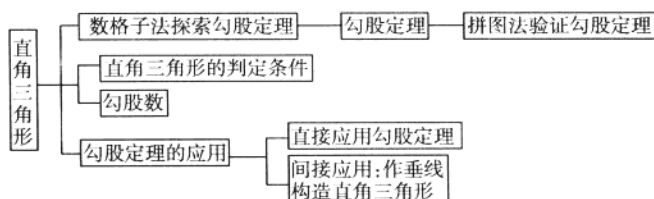


能力拓展

有志者自有千计万计，无志者只感千难万难

7. 葛藤是一种刁钻的植物，它的腰杆不硬，为了争夺雨露阳光，常常绕着树干盘旋而上，它还有一手绝招，就是它绕树盘升的路线，总是沿最短路线——螺旋式前进的，难道植物也懂得数学？

知识结构



中考定位

本章知识是中考考查重点,要求会用勾股定理的相关知识解决问题.本专题题型多以中、低档的填空题和选择题为主,也有小型综合题和应用题.近几年与方程结合的题目开始降低要求,而与航海、测量、设计等相关的应用题已成为考查的热点.

真题回放

题型一 勾股定理及其应用

例题 1

(陕西中考)如图 1-1 所示,在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $\angle ADC + \angle BCD = 90^\circ$, 且 $DC = 2AB$, 分别以 DA 、 AB 、 BC 为边向梯形外作正方形, 其面积分别为 S_1 、 S_2 、 S_3 , 则 S_1 、 S_2 、 S_3 之间的关系是_____.

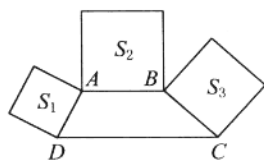


图 1-1

指点迷津

过 B 点作 $BE \parallel AD$ 交 DC 于 E 点. $\because \angle ADC + \angle BCD = 90^\circ$, $\angle ADC = \angle BEC$, $\therefore \angle CBE = 90^\circ$. 又 $\because DC = 2AB$, $AB = DE$, $\therefore CE = AB$. 在 $Rt\triangle BEC$ 中, $BE^2 + BC^2 = EC^2$, 即 $AD^2 + BC^2 = AB^2$, $\therefore S_2 = S_1 + S_3$.

【答案】 $S_2 = S_1 + S_3$

例题 2

图 1-2 是我国古代著名的“赵爽弦图”的示意图, 它是由四个全等的直角三角形围成的. 若 $AC = 6$, $BC = 5$, 将四个直角三角形中边长为 6 的直角边分别向外延长一倍, 得到图 1-3 所示的“数学风车”, 则这个风车的外围周长是_____.

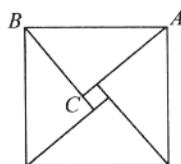


图 1-2

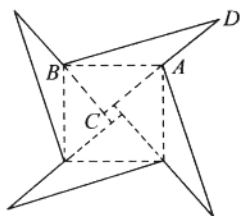


图 1-3

指点迷津

如图 1-3 所示, 由题意知 $CD = 6 \times 2 = 12$, $BC = 5$, 由勾股定理可知 $BD = 13$. $\therefore AD + BD = 6 + 13 = 19$.

$\therefore$ 这个风车的外围周长是 $19 \times 4 = 76$.

【答案】 76

例题 3

台风过后, 海上突然发来求救信号, 我海防立即派出两条搜救船前去营救, 由于无法知道出事海域的确切位置, 于是派甲船向东北方向搜寻, 派乙船向东南方向搜寻, 两船均以最高速度行驶, 甲船每小时行驶 80 海里, 乙船每小时行驶 150 海里, 半小时后甲船收到乙船的信号, 停止前进, 乙船已发现目标, 要求甲船立刻向乙船所在位置行进, 请你求一下, 甲船收到乙船信号后到达出事地点需要多长时间?

指点迷津

因为甲船是沿东北方向行驶,故 AC 与正东方向成 45° 角,乙船沿东南方向行驶,故 AB 与正东方向成 45° 角,所以 $AC \perp AB$, AC 、 AB 的长度易求,要求甲船由 C 到 B 的时间,需先求出 CB 的长度,故在 $Rt\triangle ABC$ 中,由勾股定理求解.

【解】 根据题意画出图 1-4, 乙船由 A 行驶到 B , 甲船由 A 行驶到 C 再行驶到 B . 根据题意 $AC = 80 \times \frac{1}{2} = 40$ (海里), $AB = 150 \times \frac{1}{2} = 75$ (海里). 在 $Rt\triangle ABC$ 中, 根据勾股定理, 得 $BC^2 = AC^2 + AB^2$.

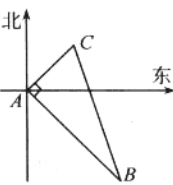


图 1-4

即 $BC^2 = 40^2 + 75^2 = 7\,225$, 则 $BC = 85$ (海里), 所以 $85 \div 80 = 1.0625$ (小时).

答: 甲船到达出事地点需要 1.0625 小时.

解题诀窍

在实际生活、生产、建筑中经常会碰到一些求距离、高度、长度、面积、周长等问题,一般地,我们可以把上述问题转化为求线段的长度,要求线段的长度,首先根据实际意义,构造直角三角形,再利用勾股定理求解.

题型二 直角三角形判定及其应用

例题 4

如图 1-5 所示,在由单位正方形组成的网格图中标有 AB 、 CD 、 EF 、 GH 四条线段,其中能构成一个直角三角形三边的线段是 ()

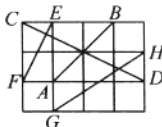


图 1-5

- A. CD 、 EF 、 GH
- B. AB 、 EF 、 GH
- C. AB 、 CD 、 GH
- D. AB 、 CD 、 EF

指点迷津

由于 $AB^2 = 2^2 + 2^2 = 8$, $EF^2 = 1^2 + 2^2 = 5$, $GH^2 = 2^2 + 3^2 = 13$, $CD^2 = 2^2 + 4^2 = 20$, 所以 $AB^2 + EF^2 = GH^2$, 所以 AB 、 EF 、 GH 可以构成直角三角形的三边, 且 GH 为斜边.

【答案】 B

例题 5

某人欲横渡一条河, 由于水流的影响, 实际上岸地点 C 偏离了欲到达点 B , 结果离欲到达点 B 240 米, 已知他在水中游了 510 米, 求该河的宽度. (如图 1-6 所示, $AC = 510$ 米, $BC = 240$ 米.)

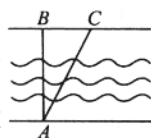


图 1-6

指点迷津

正确画出图形, 利用勾股定理求解即可.

【解】 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AB^2 = AC^2 - BC^2 = 510^2 - 240^2 = 450^2$, 所以 $AB = 450$ (米).

答: 河的宽度为 450 米.

解题诀窍

根据直角三角形的判定条件找到直角三角形, 并用它解决生活中的距离、面积、高度等问题; 以及利用垂直关系解决生活中的方向、位置的确定等问题; 同时, 本节知识作为基础知识也广泛应用于其他科技领域.

题型三 几何体表面是短距离问题

例题 6

如图 1-7 所示, 这是一个供滑板爱好者使用的 U 型池, 该 U 型池可以看成是一个长方体去掉一个“半圆柱”而成. 中间可供滑行部分的截面是半径为 4 m 的半圆, 其边缘 $AB = CD = 20$ m, 点 E 在 CD 上, $CE = 2$ m. 一滑板爱好者从 A 点滑到 E 点, 则他滑行的最短距离约为 _____ m. (边缘部分的厚度忽略不计, 结果保留整数.) (提示: $482 \approx 22^2$)

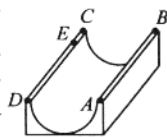


图 1-7

指点迷津

如答图 1-8 所示, 此图为 U 型池的展开图. 由图可知 AE 为所求的最短距离, 因为圆的半径为 4 m, 且此图形为“半圆柱”构成, 所以 $AD = BC = \frac{1}{2} \times 2\pi r = 4\pi$ (m). 又因为 $CE = 2$ m, 且 $\angle CDA = 90^\circ$, 所以 $AE^2 = DE^2 + AD^2 = 18^2 + 16\pi^2 \approx 482$, 所以 $AE \approx 22$ m. 所以他滑行的最短距离约为 22 m.

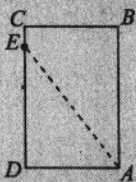


图 1-8

【答案】 22

1. (山西中考) 如图 1-9 所示, 分别以 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的三边 AB 、 BC 、 CA 为直径向外作半圆, 设斜边 AB 左边阴影部分的面积为 S_1 , 右边阴影部分的面积和为 S_2 , 则 ()

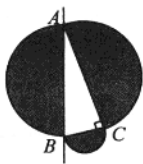


图 1-9

- A. $S_1 = S_2$
- B. $S_1 < S_2$
- C. $S_1 > S_2$
- D. 无法确定

2. (宁波中考) 如图 1-10 所示, 矩形纸片 $ABCD$ 中, $AD = 4 \text{ cm}$, $AB = 10 \text{ cm}$, 按如图方式折叠, 使点 B 与点 D 重合, 折痕为 EF , 则 $DE =$ _____ cm .

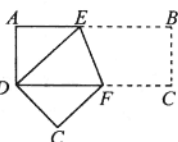


图 1-10

3. (湖州中考) 利用图 1-11 或图 1-12 两个图形中的有关面积的等量关系都能证明数学中一个十分著名的定理, 这个定理称为 _____, 该定理的结论其数学表达式是 _____.

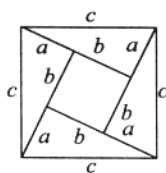


图 1-11

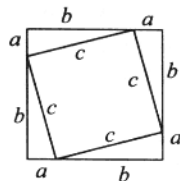


图 1-12

4. (茂名中考) 如图 1-13 所示, 点 A 、 B 分别是棱长为 2 的正方体左、右两侧面的中心, 一蚂蚁从点 A 沿其表面爬到点 B 的最短路程是 _____.

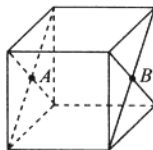


图 1-13



本章测评



一、选择题(每小题3分,共24分)

1. 以下列各组线段长为边,能构成直角三角形的是 ()

- A. 4 cm, 5 cm, 6 cm
B. 2 cm, 3 cm, 5 cm
C. 4 cm, 4 cm, 9 cm
D. 9 cm, 12 cm, 15 cm

2. 直角三角形的周长为 12 cm,斜边为 5 cm,则面积为 ()

- A. 12 cm^2 B. 6 cm^2
C. 8 cm^2 D. 10 cm^2

3. 一直角三角形的斜边长比一直角边的长大 2,另一条直角边的长为 6,则斜边长为 ()

- A. 4 B. 8 C. 10 D. 12

4. 有一个木工师傅,测量了一个等腰三角形的腰、底边和高的长,但他把这三个数据与其他数据弄混了,请你帮他找出来,是数据 ()

- A. 13, 12, 12 B. 12, 12, 8
C. 13, 10, 12 D. 5, 8, 4

5. $\triangle ABC$ 的三边分别为 $a=1.2 \text{ cm}$, $b=1.6 \text{ cm}$, $c=2 \text{ cm}$,则 $\angle C$ 是 ()

- A. 锐角 B. 直角
C. 钝角 D. 以上三种都有可能

6. 如图 1 所示,现有一长方形公园,如果游人要从 A 景点走到 C 景点,则至少走 _____ m. ()

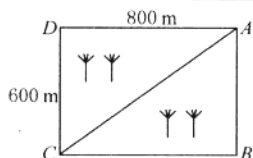


图 1

- A. 900 B. 1 000
C. 1 200 D. 1 400

7. 放学后,小莹和小路从学校分手,分别沿东南方向和西南方向回家,若小莹和小路行走的速度都是 50 米/分钟,小莹用 15 分钟到家,小路用 20 分钟到家,那么小莹与小路家的距离为 ()

- A. 1 250 米 B. 1 000 米
C. 800 米 D. 不能确定

8. 如图 2 所示,一只蚂蚁从 A 沿圆柱表面爬到 B 处,如果圆柱的高为 8 cm,圆柱的底面半径为 $\frac{6}{\pi} \text{ cm}$,那么,最短路径 AB 长为 ()

- A. 8 cm

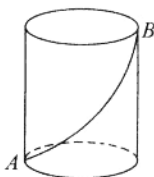


图 2

B. 6 cm

C. 平方后为 208 的数

D. 10 cm

二、填空题(每小题4分,共24分)

9. 在直角三角形 ABC 中, $\angle C=90^\circ$, $c=10$, $a:b=3:4$, 则 $a=$ _____, $b=$ _____.

10. 已知三角形的三边长 $a=6$, $b=10$, $c=8$, 则这个三角形是 _____.

11. 如图 3 所示,正方形的面积是 _____.

12. 如图 4 所示,要从电线杆高 4 m 的点 C 处向地面斜拉一根长 5 m 的缆绳,固定点 A 到电线杆底部 B 的距离 $AB=$ _____ m.

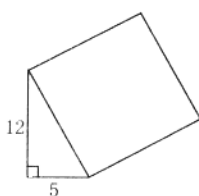


图 3

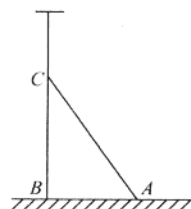


图 4

13. 如图 5 所示,某工程队修建高速公路,需打通一条东西走向的隧道 AB ,为了测得 AB 的长,工程队在 A 处正南方向 800 m 的 C 处测得 $BC=1\ 000 \text{ m}$,则隧道 AB 的长为 _____.

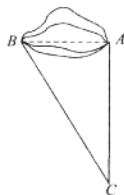


图 5

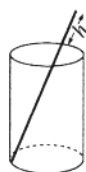


图 6

14. 将一根长 26 cm 的筷子,置于底面直径为 $\frac{10}{\pi} \text{ cm}$,高 12 cm 的圆柱形水杯. (如图 6) 设筷子露在杯子外面的长为 $h \text{ cm}$,则 h 的取值范围是 _____.

三、解答题(共52分)

15. 已知 $\triangle ABC$ 的三边为 a, b, c , 由下列各组条件判定 $\triangle ABC$ 的形状. (10 分)

(1) $a=41$, $b=40$, $c=9$;

(2) $a=m^2-n^2$, $b=m^2+n^2$, $c=2mn$ ($m>n>0$).

16. 分别求下列图形中阴影部分的面积(单位: cm). (10 分)

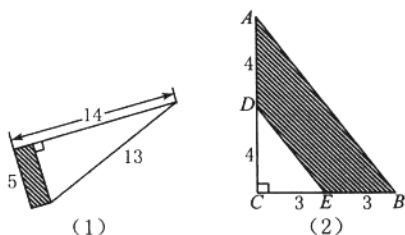


图 7

17. 下面是一种验证勾股定理的方法:(8 分)

把直角边分别为 a, b , 斜边为 c 的两个全等的直角三角形像右图那样放置, 连接 AE .

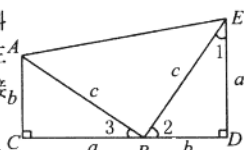


图 8

$\because \triangle ACB$ 和 $\triangle BDE$ 全等,

$\therefore \angle 1 = \angle 3$, 且 $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$.

$\therefore \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ, \therefore \angle ABE = 90^\circ$.

$\therefore S_{\triangle ABE} = \underline{\hspace{2cm}}, S_{\triangle ACB} = \underline{\hspace{2cm}}, S_{\triangle BDE} = \underline{\hspace{2cm}}, S_{\text{梯形} ACDE} = \underline{\hspace{2cm}}.$

由上图可以看出 $S_{\text{梯形} ACDE} = S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ACB} + S_{\triangle BDE}$.

$\therefore a^2 + b^2 = c^2$.

18. 一块长方形地 $ABCD$, 长 8 m, 宽 6 m, 小明站在长方形的一个顶点 A 上, 他要走到对面的另一个顶点 C 上拣一只羽毛球, 他至少要走多远? (10 分)

19. 如图 9 所示, 南北方向 MN 为我国领海线, 即 MN 以西是我国领海, 以东为公海. 上午 9 时 50 分, 我国反走私艇 A 发现正东方向有一走私船 C 以 12 海里/时的速度偷偷向我领海开来, 便立即通知正在 MN 线上巡逻的我国反走私艇 B 密切注意. 反走私艇 A 和走私船 C 的距离是 13 海里, A, B 两艇的距离为 5 海里, 反走私艇 B 测得距离 C 船 12 海里. 若走私船 C 的速度不变, 最早会在什么时间进入我国领海? (14 分)

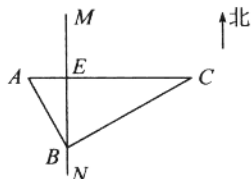


图 9

第二章 实数

1. 数怎么又不够用了

知识导航

勇于开始，才能找到成功的路

想一想下列各数哪些为有理数？不是有理数的数与有理数相比有什么不同？

- ①0；② $-\pi$ ；③ $-\frac{11}{3}$ ；④平方得10的数；⑤ $0.9\dot{7}$ ；
⑥2.010 010 001…(相邻两个1之间依次多一个0)。

要点点拨

读书不知要领，苦而无功

知识点1 无理数是客观存在的

人类对数的认识是在生活中不断加深和发展的，当我们在生产生活中发现有理数不能再满足要求时，便要进行数系的扩张，引入了无理数。它和以前由自然数扩充到整数，由整数扩充到有理数一样，是认识范围的一次大的跨越。

知识点2 无理数近似值的估算方法

掌握估算方法，发展估算能力是初中数学一个重要的目标。要估算带平方根无理数的近似值，第一步先确定被估算无理数的整数范围；第二步以较小整数开始逐步加0.1(或以较大整数开始逐步减0.1)，并求其平方确定被估算数的十分位；…；如此继续下去，可按要求估算带平方根无理数的近似值。

知识点3 无理数

无限不循环的小数叫做无理数，判断一个数是不是无理数，一是看它是不是无限小数，再是看它是不是不循环小数，只有满足“无限”和“不循环”这两个条件，才是无理数。

【注意】(1)开方开不尽的数是无理数，如 $\sqrt{2}$ ， $-\sqrt{2}$ ， $\sqrt[3]{9}$ ， $\sqrt{7}$ ；(2)几个常数，在初中主要是 π 这个常数是无理数；(3)无理数与有理数的和、差，一定是无理数；(4)无理数乘以或除以一个不为0的有理数一定

是无理数。另外，带根号的数不一定是无理数，如 $\sqrt{0}$ ， $\sqrt{9}$ ；无理数也不一定带根号，如 π 。

典例详析

读书之法，莫贵于循序而致精

例题1

一个面积为4的正方形其边长为2，面积为16的正方形其边长是4，面积为15的正方形边长可能是有理数吗？

【解】设面积为15的正方形边长为 x ，则有 $x^2=15$ 。因为 $5^2=25$ ， $6^2=36$ ，…，越来越大，所以不存在平方等于15的整数；又因为最简分数的平方仍为分数，所以边长不可能为分数，综上所述边长不是无理数，但面积为15的正方形其边长是客观存在的。

例题2

若一个正方形花坛的面积为 8 m^2 ，其边长为 $x\text{ m}$ 。

(1)如若精确到0.01 m，求 x 的值；(2)如若精确到0.001 m，求 x 的值。

指点迷津

首先大体确定 x 的整数范围，因为 $1^2=1$ ， $2^2=4$ ， $3^2=9$ ，而 $x^2=8$ ，故 $4<x^2<9$ ，所以 $2<x<3$ ；从2.1开始探索： $2.1^2=4.41$ ， $2.2^2=4.84$ ， $2.3^2=5.29$ ， $2.4^2=5.76$ ， $2.5^2=6.25$ ， $2.6^2=6.76$ ， $2.7^2=7.29$ ， $2.8^2=7.84$ ， $2.9^2=8.41$ 。因为 $x^2=8$ ，故 $7.84<x^2<8.41$ ，相应地有 $2.8<x<2.9$ ；…；逐步探索 x 的取值范围，体会这种无限逼近的思想。

【解】利用计算器估算 x 的值的过程如下表：

x	x^2
$2<x<3$	$4<x^2<9$
$2.8<x<2.9$	$7.84<x^2<8.41$
$2.82<x<2.83$	$7.9524<x^2<8.0089$
$2.828<x<2.829$	$7.997584<x^2<8.003241$
$2.8284<x<2.8285$	$7.99984656<x^2<8.00041225$

如此进行下去， x 不可能是有限小数，而且也不是一个循环小数。(1)若精确到0.01 m，由上表易知： $2.828<x<2.829$ ，所以 $x\approx 2.83$ 。(2)若精确到0.001 m，由上表易知 $2.8284<x<2.8285$ ，故 $x\approx 2.828$ 。

例题3

下列各数中： 3.14 ， π ， 0 ， $\frac{10}{3}$ ， $3.\dot{1}\dot{4}$ ， $\sqrt{11}$ ， $-\sqrt{3}$ ， $3.141\ 441\ 444\ 1\cdots$ (相邻两个1之间4的个数逐次加)，(1)有理数有：_____，(2)无理数有_____。