河海大学本科数学系列教材之二

高等数学

GAODENG SHUXUE

郁大刚
王海鹰　胡庆云※编著

下册

河　海　大　学　出　版　社

河海大学本科数学系列教材之一

高等数学

GAODENG SHUXUE

郁大刚
王海鹰　胡庆云※编著

下册

河　海　大　学　出　版　社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册 / 郁大刚,王海鹰,胡庆云编著. —南京：河海大学出版社,2005.1

(河海大学本科数学系列教材之二)

ISBN 7-5630-2071-3

Ⅰ.高... Ⅱ.①郁...②王...③胡... Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 008880 号

书　　名 / 高等数学(下册)
书　　号 / ISBN 7-5630-2071-3/O·119
责任编辑 / 周　勤
封面设计 / 步江华
出　　版 / 河海大学出版社
地　　址 / 南京市西康路 1 号(邮编:210098)
电　　话 / (025)83737852(行政部)　(025)83722833(发行部)
经　　销 / 江苏省新华书店
印　　刷 / 南京工大印务有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16　16.75 印张　390 千字
版　　次 / 2005 年 1 月第 1 版　2005 年 1 月第 1 次印刷
下册定价 / 26.00 元

前　言

本教材根据工科本科高等数学教学基本要求结合河海大学近年来高等数学教学改革的实践编写而成。力求在加强基础的前提下，结合相应内容拓广知识面，重视培养学生的分析问题和解决问题的能力、自学能力、逻辑推理能力以及建立数学模型的能力。此外本教材还注意了与其他后续数学课程的联系与衔接，便于教学。

本教材分上、下两册。上册内容为一元函数微积分、常微分方程，下册内容为多元函数微积分、无穷级数，每章配有总习题。此外，本教材末还附有微积分在经济问题中的应用简介、差分方程简介、几种常用的曲线、积分表、空间解析几何及习题答案与提示，供读者参考使用。

参加本教材上册编写的有河海大学大学数学部丁莲珍、钮群、郑苏娟老师，全书最后的修改和定稿由丁莲珍老师完成。参加下册编写的有河海大学大学数学部郁大刚、王海鹰、胡庆云老师，全书最后的修改和定稿由郁大刚老师完成。本教材在编写过程中河海大学数学部的老师给予了大力支持和帮助，提出了不少宝贵意见，在此深表谢意！

由于编者水平有限，本教材的缺点和错误在所难免，恳请专家与广大读者批评指正。

编　者

2004 年 8 月

目 录

前言

第 8 章

多元函数的微分学

在前面各章中,我们所讨论的函数都只限于一个自变量的函数,简称一元函数. 但是在自然科学与工程技术等许多实际问题中所遇到的往往是依赖于两个或更多个自变量的函数,这种函数称为多元函数.

本章我们把一元函数微分学的概念和方法推广到多元函数上,建立多元函数的微分学. 首先着重讨论二元函数,在掌握了二元函数的有关理论与方法之后,不难把它推广到更多元的函数中去.

第一节　多元函数的基本概念

在上册中我们研究了只有一个自变量的函数,即一元函数的情形. 但在自然科学和工程技术的很多实际问题中,事物往往受到多种因素的影响,反映到数学上,有时就可以归结为一个变量依赖于两个或更多个变量的情形,这种函数称为多元函数. 从一元函数到二元函数,在内容和方法上都会出现一些新的实质性的差异,而从二元函数到三元或三元以上的函数,仅会产生一些技术性的困难. 因此研究多元函数,首先以二元函数为主. 在研究过程中,一方面要注意二元函数与一元函数的相异之处;另一方面还要利用一元函数已有的结果来研究二元函数. 事实上,一元函数可以看作是二元函数的一种特殊情形.

一元函数的定义域是数轴上的点集. 二元函数的定义域将是坐标平面上点的集合. 因此,在具体研究二元函数之前,必须熟悉有关平面点集的一些概念.

一、平面点集

在平面上我们确定一个坐标系(今后如不特别指出,都假定是在直角坐标系下讨论的),所有有序实数对(x,y)与平面上所有的点之间建立了一一对应关系(通常称有序实数对(x,y)为与之对应的平面上的点的坐标). 因此,在今后叙述中,常把"数对"与"平面上的点"看作含义相同而不加以区别. 平面上点的集合(简称平面点集)E 就是满足某种条件 P 的有序实数对(x,y)的集合,记作

$$E=\{(x,y)\mid (x,y)\text{ 满足条件 } P\}\quad \text{简记为 } E=\{(x,y)\mid P(x,y)\}.$$

例如集合

$$R^2=\{(x,y)\mid -\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty\}$$

表示全平面点所成的集合,称为 xOy 平面. 而集合 E_1

$$E_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2<a^2\}$$

是平面上以原点为圆心,半径为 a 的圆内所有的点.

1. 邻域

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点，δ 是某一正数；与点 $P_0(x_0,y_0)$ 的距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体，称为点 P_0 的 δ **邻域**，记为 $U(P_0,\delta)$，即是平面点集

$$U(P_0,\delta)=\{P \mid |PP_0|<\delta\}$$

也就是
$$U(P_0,\delta)=\{(x,y) \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\},$$
它表示以 $P_0(x_0,y_0)$ 为圆心，半径为 δ 的圆内点 $P(x,y)$ 的全体.

2. 内点、外点、边界点

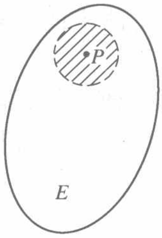

图 8-1

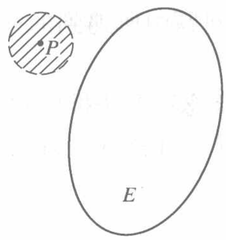

图 8-2

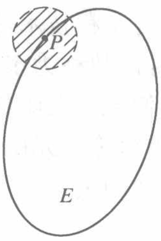

图 8-3

设 E 是一个平面点集，若点 $P\in E$，并且存在 P 点的一个邻域 $U(P,\varepsilon)$，使 $U(P,\varepsilon)\subset E$，则称点 P 为 E 的**内点**(图 8-1). 若点 $P\overline{\in}E$，并且存在 P 点的一个邻域 $U(P,\varepsilon)$，使 $U(P,\varepsilon)\cap E=\varnothing$，则称点 P 为 E 的**外点**(图 8-2). 若点 P 的任意的邻域内既有属于 E 的点，也有不属于 E 的点，则称点 P 是 E 的**边界点**(图 8-3). E 的边界点的全体称为 E 的**边界**. 例如上面的平面点集 E_1 的边界是圆周 $x^2+y^2=a^2$.

3. 聚点、孤立点

设 E 是一个平面点集，若点 P 的任意邻域都含有 E 的无穷多个点，则称点 P 为 E 的**聚点**(或称极限点)；若点 P 的某一个邻域内除了点 P 外其余各点都不属于 E，则称点 P 为 E 的**孤立点**.

显然，E 的内点一定是 E 的聚点，外点一定不是 E 的聚点，而 E 的边界点可能是 E 的聚点，也可能是 E 的孤立点. 由聚点与孤立点的定义可知，若 E 是只有有限个点的平面点集，则 E 的每一个点都是 E 的孤立点，决不会有聚点. 只有无限点集才有可能有聚点.

4. 开集、连通集、区域

设 E 是一个平面点集，若 E 中任一点都是 E 的内点，则称点集 E 为**开集**. 若平面点集 E 内的任何两点都可以用一条完全在 E 内的连续曲线将它们连接起来，则称 E 是**连通集**. 连通的开集称为**开区域**(简称**区域**). 区域 E 连同它的边界组成的点集，称为**闭区域**. 例如，$E=\{(x,y) \mid 1<x^2+y^2<4\}$ 是区域，而 $E_1=\{(x,y) \mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 是闭区域.

设 E 是一个平面点集，若存在原点的某一邻域，使得 E 被包含在这个邻域内，即存在一个圆域 $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2<M^2\}$，使得 $E\subset D$，则称 E 为**有界点集**，否则就称为**无界点集**. 例如，$E=\{(x,y) \mid 1<x^2+y^2<4\}$ 是有界区域；而 $E_1=\{(x,y) \mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 是有界闭区域；$E_2=\{(x,y) \mid x+y>1\}$ 是无界区域.

5. n 维空间 R^n

我们知道二维数组(x,y)表示平面上的一个点，相应地三维数组(x,y,z)可以表示空间的一个点，但四维以上的数组就没有相应的几何说明了. 为了把许多几何概念和方法运用于讨论 n 元函数，我们把所有 n 元有序实数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的全体构成的集合称为 **n 维空间**，记为 R^n，其中每一个 n 元有序实数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为 n 维空间的点，数 x_i 称为该点的**第 i 个坐标**$(i=1,2,\cdots,n)$.

n 维空间中两点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和 $Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$间的距离定义为

$$\rho(P,Q)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}.$$

例如，R^n 的点集$\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<a^2\}$表示以原点$(0,0,\cdots,0)$为中心，半径为 a 的 n 维开超球体.

显然，数轴就是一维空间 R^1，平面就是二维空间 R^2. 因此，在 n 维空间中，由于定义了距离等概念，读者可以毫无困难地把平面点集中有关邻域、内点、聚点、开集、区域等一系列概念推广到 n 维空间中去，这里就不一一叙述了.

二、多元函数概念

下面我们将给出多元函数的概念，首先看几个实际例子.

例 1 直圆柱体的侧面积 S，底半径 r，高 h 之间有关系式

$$S=2\pi rh$$

其中，当 r,h 在集合$\{(r,h)\mid r>0,h>0\}$内取一数对(r,h)时，S 的对应值就惟一确定.

例 2 长方体的体积 V 与它的长 x，宽 y 和高 z 之间的关系是

$$V=xyz,$$

其中，x,y,z 是三个独立的自变量，当它们在集合$\{(x,y,z)\mid x>0,y>0,z>0\}$内取一有序数组$(x,y,z)$时，$V$ 的值就随之确定.

定义 1 给定一个平面点集 $D\subset R^2$ 和一个实数集 $M\subset \mathbf{R}$，若按照某一确定的对应法则 f，D 内每一数对(x,y)都有惟一的一个实数 $z\in M$ 与它相对应，则称 f 是定义在 D 上的二元函数或称为点 $P(x,y)$的函数，记为

$$\boldsymbol{z=f(x,y),\quad (x,y)\in D;\qquad 或 \qquad z=f(P),\quad P\in D.} \tag{1}$$

平面点集 D 称为函数 f 的定义域，x,y 称为自变量；D 中任一点(x,y)根据法则 f 所对应的实数 z，称为 f 在点(x,y)处的函数值，z 也称为因变量. 函数 f 的全体函数值集合

$$\boldsymbol{f(D)=\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}\subset M}$$

称为函数 f 的值域.

与一元函数一样，定义域 D 和对应法则 f 是确定函数的两个要素. 按习惯称 z 是 x,y 的函数，也可记为 $z=z(x,y)$，$z=\varphi(x,y)$等等. 如果函数 f 的对应法则由算式 $f(x,y)$表示，那么所有使这个算式有意义的点(x,y)的集合，称为函数 f 的**存在域**. 若 f 以存在域为定义域，则(1)中 D 可以省略不写，只简单地写作 $z=f(x,y)$.

由二元函数的定义还可看到，二元函数 f 给出了二维平面点集 $D\subset R^2$ 到一维数集 M 之间的单值对应，当把(x,y)和其所对应的 $f(x,y)$一起组成三维数组时，二元函数 f 可看成三维空间的一个点集$\Sigma\subset R^3$，

$$\sum = \{(x,y,z) \mid z = f(x,y),(x,y) \in D\},$$

借助在空间解析几何中所讨论的，这个点集在三维空间所描绘出的图形是二元函数 f 的图像. 通常二元函数 $z=f(x,y)$ 的图像是空间的曲面. 二元函数 f 的定义域就是这空间曲面在 xOy 平面上的投影区域(图 8-4).

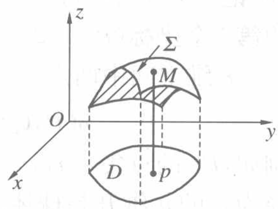

图 8-4

例 3 指出下列函数所表示的图形：

(1) $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$； (2) $z=1-2x^2-3y^2$；

(3) $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

解 (1) 函数表示的图形是以原点为球心，半径为 a 的上半球面，其定义域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2\}$，如图 8-5 所示.

(2) 所给函数的定义域是整个 xOy 平面. 它的图像是顶点在 $(0,0,1)$，开口向下的抛物面，如图 8-6 所示.

(3) 所给函数的定义域是整个 xOy 平面，它的图像是顶点在原点的在 xOy 平面上方的圆锥面，如图 8-7 所示.

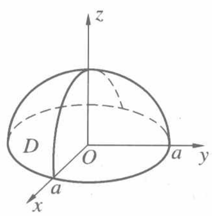

图 8-5

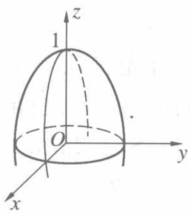

图 8-6

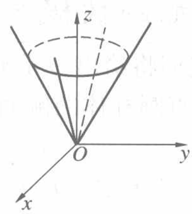

图 8-7

类似地可以定义三元函数以及三元以上的函数.

定义 2 **设 E 是 n 维空间的点集，R 为实数集. 若按某一确定的对应法则 f，E 内每一点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 都有惟一的一个实数 $u\in$ R 与它相对应，则称 f 是定义在 E 上的 n 元函数，记作**

$$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),\qquad (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in E \tag{2}$$

或写成点函数的形式

$$u=f(P),\qquad P\in E\subset R^n. \tag{3}$$

其中 E 称为函数 f 的定义域，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为 f 的自变量，u 称为 f 的因变量.

用式(3)表示 n 元函数时就可看到 n 元函数与一元函数在形式上的一致.

当 $n\geqslant 2$ 时，n 元函数也称为**多元函数**，它给出了 n 维空间点集 $E\subset R^n$ 到实数空间点集 **R** 之间的对应，由点 P 与其所对应的数值 $f(P)$ 组成 $n+1$ 维数组，n 元函数 f 可看成 $n+1$ 维空间的一个点集

$$\{(P,f(P))\mid P\in E\}\subset R^{n+1},$$

从几何意义来看，我们可以设想此点集描绘了 R^{n+1} 空间的一个**超曲面**.

例 4 求下列函数的定义域并作出定义域的草图：

(1) $z=\ln(2x+y-1)$； (2) $z=\sqrt{2x-y}\cdot\arcsin(x+y-1)$； (3) $u=\dfrac{\sqrt{1-x^2-y^2+z^2}}{\sqrt{4-(x^2+y^2+z^2)}}$.

解 (1) $D=\{(x,y)\mid 2x+y-1>0\}$，如图 8-8 所示；

(2) $D=\{(x,y)\mid 2x-y\geqslant 0,0\leqslant x+y\leqslant 2\}$，见图 8-9；

(3) $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2-z^2\leqslant 1,x^2+y^2+z^2<4\}$，见图 8-10.

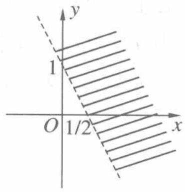

图 8-8

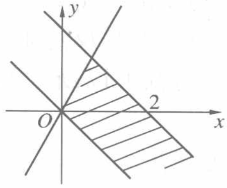

图 8-9

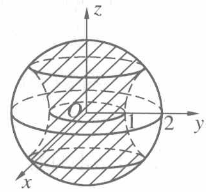

图 8-10

三、多元函数的重极限

多元函数的重极限概念，和一元函数相类似，下面我们只就二元函数来讨论，对二元以上的情形，也有类似的结果.

设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，$D\subset R^2$，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点，即 P_0 点的任何邻域内都含有 D 的无穷多个点 P. 考虑当 D 中的 $P(x,y)$ 以任何方式趋向于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，P 与 P_0 间的距离趋于零，即

$$|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\longrightarrow 0$$

记为 $P\to P_0$，或 $x\to x_0$，$y\to y_0$；函数值 $f(P)=f(x,y)$ 的变化趋势.

与一元函数的极限概念相仿，如果在 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时，对应的函数值 $f(x,y)$ 无限接近于一个确定的常数 A，我们称 A 是函数 $f(x,y)$ 当 $x\to x_0$，$y\to y_0$ 时的重极限. 下面用“$\varepsilon-\delta$”语言来定义二元函数的重极限.

定义 3 **设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的一个聚点，A 为实常数；如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得 D 中适合不等式**

$$0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切点 $P(x,y)\in D$，都有 $$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立，则称实数 A 为函数 $z=f(x,y)$ 当 $P\to P_0$，即 $x\to x_0$，$y\to y_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \quad \text{或} \quad \lim_{P\to P_0} f(P)=A,$$

此极限又称为二重极限.

例 5 用定义证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3y}{x^2+y^2}=0$.

证 因为 $$\left|\frac{x^3y}{x^2+y^2}-0\right|=\frac{x^2}{x^2+y^2}|xy|\leqslant|xy|\leqslant\frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

所以，对任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\sqrt{2\varepsilon}$，则当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ 时

总有 $$\left|\frac{x^3y}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$$

成立，所以 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3y}{x^2+y^2}=0.$$

由极限的定义，必须注意二元函数在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的二重极限存在，是指点 $P(x,y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数都无限接近于一个确定的常数 A. 如果 $P(x,y)$ 沿着某

一定直线或某定曲线趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，使函数无限接近于某一确定值，我们还不能由此断定函数在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的二重极限存在. 但是反过来，如果当点 $P(x,y)$ 以不同的方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数趋于不同的值，则就可以断定函数在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的重极限不存在.

例 6 讨论下列函数的重极限是否存在.

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$；　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+3y^2}$；　(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{y}$.

解 (1) 因为 $\left|(x+y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant|x+y|$，显然 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}|x+y|=0$，由夹逼原理

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left|(x+y)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|=0,$$

故

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0,$$

所以，二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ 存在.

(2) 因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to kx}}\dfrac{xy}{x^2+3y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx^2}{x^2+3k^2x^2}=\dfrac{k}{1+3k^2}$，这样，当 k 不同即点 (x,y) 沿不同的路径 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时，极限值不同. 所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+3y^2}$ 不存在.

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{y}=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\lim\limits_{x\to 2}x=2$.

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{y}$ 存在.

以上关于二元函数的重极限概念，可以相应地推广到 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 上去.

此外可以证明，一元函数极限的运算性质对于多元函数仍然成立.

四、多元函数的连续性

有了多元函数的重极限概念，我们就可以定义多元函数在一点处的连续性.

定义 4 **设函数 $z=f(x,y)$ 定义在 $D\subset R^2$ 上，点 $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的一个聚点，$P_0\in D$，如果当 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 的极限存在，且等于 $P_0(x_0,y_0)$ 点的函数值，即**

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)\quad 或\quad \lim_{P\to P_0}f(P)=f(P_0)$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续. 否则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处间断，$P_0(x_0,y_0)$ 称为该函数的间断点（或不连续点）.

如果函数 $f(x,y)$ 在 D 的每一点都连续，则称函数 $f(x,y)$ 在 D 内连续，或称 $f(x,y)$ 是 D 上的**连续函数**.

以上关于二元函数的连续性概念，可以相应地推广到 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 上去.

根据极限运算法则,可以证明多元连续函数的和、差、积均为连续函数,当分母不为零时,连续函数的商是连续函数;多元连续函数的复合函数也是连续函数.

与一元的初等函数相仿,多元初等函数是可用一个式子所表示的多元函数,即多元初等函数是由常数和多元基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成的函数.例如,$\frac{x+xy-y^2}{1+x^2+y^2}$,$(x+y+2z)\sin(x^2+y^2z)$分别是二元与三元初等函数.

由于多元连续函数的和、差、积、商的连续性以及连续函数的复合函数的连续性,可以得到结论:**一切多元初等函数在其定义区域内是连续的.**

例 7 讨论下列函数的连续性:

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+3y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$; (2) $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y-1}$.

解 (1) 由例 6 中(2)可知$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+3y^2}$不存在,所以,点$(0,0)$是该函数的一个间断点.此外,显然在平面上的其他点都是函数的连续点.

(2) 函数在曲线 $y=1-x^2$ 上无定义,所以该抛物线上的点都是函数的间断点,即 $y=1-x^2$ 是函数的间断线.显然平面上的其他点都是多元初等函数的连续点.

例 8 求$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}}\frac{x+2y}{xy-4}$.

解 函数 $f(x,y)=\frac{x+2y}{xy-4}$是初等函数,它的定义域为 $D=\{(x,y)\mid xy\neq 4\}$.因为 $P_0(2,3)\in D$,$f(x,y)$在 $P_0(2,3)$处连续,

故
$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}}\frac{x+2y}{xy-4}=f(2,3)=4.$$

在有界闭区域上连续的多元函数与有界闭区间上一元连续函数一样,具有如下一些重要性质:

定理 1(最大值和最小值定理) **在有界闭区域 D 上连续的多元函数,在 D 上必有最大值和最小值.亦即在 D 上至少有一点 P_1 和一点 P_2,使对 D 上任意点 P,恒有**

$$f(P_1)\leqslant f(P)\leqslant f(P_2),\qquad P\in D$$

定理 2(介值定理) **在有界闭区域 D 上连续的多元函数,如果在 D 上取得两个不同的函数值,则函数在 D 上取得介于这两个值之间的任何值至少一次.**

特别地,设 m,M 分别是在有界闭区域D 上连续的多元函数的最小值和最大值,$m<M$,则对任意的 $C,m<C<M$,在 D 上至少有一点 P_0,使得 $f(P_0)=C$.

定理 3*(一致连续性定理) **在有界闭区域 D 上连续的多元函数必定在 D 上一致连续.**

也就是说,若 $f(P)$在有界闭区域 D 上连续,那么对于任意给定的正数 ε,总存在正数 δ,使得对于 D 上的任意二点 P_1,P_2,只要满足不等式$|P_1P_2|<\delta$时,都有

$$|f(P_1)-f(P_2)|<\varepsilon$$

成立.

习题 8－1

1. 已知 $f(x,y)=\dfrac{x^2-2y^2}{x^2+xy+y^2}$，试求 $f\left(x,\dfrac{1}{x}\right)$，$f\left(-1,\dfrac{x}{y}\right)$.

2. 已知 $f(x,y)=\sqrt{x^4+y^4}-2xy\tan\dfrac{y}{x}$，试求 $f(tx,ty)$.

3. 若 $f\left(x+y,\dfrac{x}{y}\right)=x^2-xy+y^2$，求 $f(x,y)$.

4. 已知 $f(u,v,w)=uv^w+2u^{v+w}$，试求 $f(x+y,x-y,xy)$.

5. 设 $z=f(x,y)=x^2y-x^y+h(x+y)$，若当 $y=1$ 时，$z=x\sin(x+1)$，试求 $h(x)$，$f(x,y)$.

6. 求下列各函数的定义域并作出其草图：

(1) $z=\ln(x^2-2y+1)$；　　(2) $z=\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{y^2-1}}$；

(3) $z=\dfrac{\sqrt{4x^2+y^2-1}}{\sqrt{x-y}}$；　　(4) $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$；

(5) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2-a^2}\ln(b^2-x^2-y^2-z^2)$；　　(6) $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

7. 用定义证明：$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+2y^2}}=0$.

8. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to2}}\dfrac{x+xy^2+1}{x^2+xy+y^2}$；　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\y\to0}}\dfrac{\ln(e^x+2y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{3-\sqrt{xy+9}}{\sin xy}$；　　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)(1+e^{xy})}$；

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to3}}\dfrac{\sin(2xy)}{x}$；　　(6) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\y\to0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x+y)^2}$.

10. 下列函数在何处间断，写出不连续点集：

(1) $z=\dfrac{2x+xy+y^2}{y^2-2x+1}$；　　(2) $z=\dfrac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+y)}$.

11. 下列函数在(0,0)点是否连续？

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$；　　(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+2y^2}, & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$.

12. 函数 $z=(y+\sqrt{x})\ln(x^2+y^2-4)$ 在什么域上连续？作出其草图.

第二节　偏导数

一、偏导数

在研究一元函数时，从一元函数的变化率引入一元函数的导数概念. 对于多元函数也有类似的问题，例如烧热的铁块中每一点的温度 T 是此点的位置 (x,y,z) 和时间 t 的函数，可记作

$$T=F(x,y,z,t).$$

在实际中，常要研究铁块中某一点(x_0,y_0,z_0)上温度T关于时间t的变化率，或在某一时间t_0时，铁块中一点(x_0,y_0,z_0)关于x，关于y或关于z的温度变化率. 这都是多元函数中关于其中某一自变量（当其他自变量固定时）的变化率. 多元函数的这类对其中一个变量讨论变化率问题，实际上是把多元函数作为一元函数来对待并求其导数，这正是以下所要讨论的多元函数偏导数问题.

下面，仅对二元函数的偏导数进行讨论，对于$n>2$的n元函数的偏导数，读者可仿此自行推广.

定义 1　设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内有定义，当y固定在y_0，而x在x_0处有增量Δx时，相应的函数有增量　$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$，

如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

存在，则称此极限为函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处关于x的偏导数，记作

$$f_x(x_0,y_0),z_x(x_0,y_0)\quad\text{或}\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

类似地，函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处关于y的偏导数定义为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}, \tag{2}$$

记作

$$f_y(x_0,y_0),z_y(x_0,y_0)\quad\text{或}\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)},\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

若函数$z=f(x,y)$在区域D上每一点(x,y)处关于x的偏导数都存在，那么这个偏导数是点(x,y)的函数，它称为函数$z=f(x,y)$在区域D上**对自变量x的偏导函数**，记作

$$f_x(x,y),z_x\quad\text{或}\quad \frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial x}.$$

类似地，可以定义函数$z=f(x,y)$在区域D上**对自变量y的偏导函数**，记作

$$f_y(x,y),z_y\quad\text{或}\quad \frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial z}{\partial y}.$$

偏导函数也简称为**偏导数**.

由偏导函数的概念可知，当$(x_0,\ y_0)\in D$时，$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处关于x的偏导数$f_x(x_0,y_0)$就是偏导函数$f_x(x,y)$在点(x_0,y_0)处的函数值；同样，$f_y(x_0,y_0)$就是偏导函数$f_y(x,y)$在点(x_0,y_0)处的函数值.

读者可以类似地定义n元函数$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的偏导数$\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n}$等.

求多元函数的偏导数用不到新的运算方法，只需注意求偏导数时将多个自变量中哪一个看成变量，哪些自变量看成常量. 例如二元函数$z=f(x,y)$，求$\frac{\partial f}{\partial x}$时，只要把$y$暂时看作常量，对$x$求导数；求$\frac{\partial f}{\partial y}$时，则把$x$暂时看作常量，对$y$求导数.

例 1　求$z=x^3+2x^2y-xy^3$在点$(2,3)$处的偏导数.

解　先求z在(x,y)处的偏导数，将y看作常量，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+4xy-y^3,$$