

中等职业教育课程改革国家规划新教材教师用书

# 数学

SHUXUE

下册  
基础模块

# 教学参考书

JIAOXUECANKAOSHU

张景斌 主编

 语文出版社

中等职业教育课程改革国家规划新教材教师用书

# 数学

SHUXUE

下册  
基础模块

# 教学参考书

张景斌 主编



语文出版社

中等职业教育课程改革国家规划新教材教师用书

**数学教学参考书**

(基础模块·下册)

张景斌 主编

\*

**语文出版社出版**

100010 北京朝阳门南小街51号

E-mail: ywp@ywcb.com

新华书店经销 北京通州皇家印刷厂印刷

\*

787毫米×1092毫米 16开本 10.25印张

2009年12月第1版 2009年12月第1次印刷

定价:21.00元

ISBN 978-7-80241-227-9

---

本书如有缺页、倒页、脱页,请寄本社发行部调换。

## 使用 说 明

《数学教学参考书》是与我社出版的中等职业教育课程改革国家规划新教材《数学》基础模块教材配套的教师用书，分上、下两册，目的是帮助教师明确教学目标，理解教材作者的编写意图，掌握教学重点、难点，为教师备课提供丰富的教学研究资料。

教学参考书的每单元内容与教材内容相匹配，各单元均包括教学要求、教材分析和教学建议、教学设计共享、教学拓展、习题答案或解题提示五部分内容，并附有各单元的测试卷。其中教学要求体现了新大纲中对各知识点的认知要求；教材分析和教学建议比较详细地介绍了各单元的编写思路、提供了课时分配的建议，并对每节内容提供了教学分析，针对教学重点、难点提出教学建议，对教学中应注意的问题均作了较为详细的叙述并给出复习建议；教学设计共享为本单元教学内容提供了若干个教学设计案例，且做一说明。这些教学设计，仅是提供给教师们一个基本的教学设计思路，教师应针对不同水平的学生，对这些设计有选择地吸收采纳，切勿照抄照搬；教学拓展为教师深度理解教学内容提供了丰富的材料，教师可据此进一步进行教学研究，开阔视野。习题答案或解题提示涉及教材各单元的练习、习题、综合练习及学生学习指导用书中的练习中的答案。

教学参考书的主编是张景斌，参加本册编写的作者有：李励信、张秋立、韩强、周丽萍、许红、杨清洲、王霞、吴奇琰、吴智敏。

由于编写时间仓促，对书中不妥之出，欢迎从事职教教育的专家、教师和读者批评指正。

语文出版社  
2009年12月

# 目 录

## 第六单元 数列

- 一 教学要求 ..... ( 1 )
- 二 教材分析和教学建议 ..... ( 1 )
- 三 教学设计共享 ..... ( 9 )
- 四 教学拓展 ..... (17)
- 五 习题答案与解题提示 ..... (25)

## 第七单元 平面向量

- 一 教学要求 ..... (31)
- 二 教材分析和教学建议 ..... (31)
- 三 教学设计共享 ..... (35)
- 四 教学拓展 ..... (42)
- 五 习题答案与解题提示 ..... (46)

## 第八单元 直线与圆的方程

- 一 教学要求 ..... (51)
- 二 教材分析和教学建议 ..... (51)
- 三 教学设计共享 ..... (64)
- 四 教学拓展 ..... (71)
- 五 习题答案与解题提示 ..... (73)

## 第九单元 立体几何

- 一 教学要求 ..... (82)
- 二 教材分析和教学建议 ..... (82)
- 三 教学设计共享 ..... (95)
- 四 教学拓展 ..... (101)
- 五 习题答案与解题提示 ..... (105)

## 第十单元 概率与统计初步

- 一 教学要求 ..... (114)
- 二 教材分析和教学建议 ..... (114)
- 三 教学设计共享 ..... (124)
- 四 教学拓展 ..... (129)
- 五 习题答案与解题提示 ..... (132)

- 附 第六单元测试题 ..... (141)

第七单元测试题 .....	(144)
第八单元测试题 .....	(146)
第九单元测试题 .....	(148)
第十单元测试题 .....	(151)
单元测试题答案 .....	(154)

# 第六单元 数列

## 一 教学要求

1. 了解数列及其相关概念, 理解数列的通项公式的意义, 会求常见数列的通项公式.
2. 理解等差数列的概念, 掌握等差数列的通项公式与前  $n$  项和公式, 并能运用这些公式解决简单的问题.
3. 理解等比数列的概念, 掌握等比数列的通项公式与前  $n$  项和公式, 并能运用这些公式解决简单的问题.

## 二 教材分析和教学建议

### (一) 编写思路

本单元教材的内容是数列的概念与通项公式的意义, 等差数列与等比数列的定义、通项公式、前  $n$  项和公式及其应用. 数列在实际生活中有着非常广泛的应用, 它是解决生产实际问题的有力工具, 是培养学生计算、推理、分析、综合等能力的重要题材, 因此数列的内容有助于学生数学能力的提高, 同时还是学生进一步学习数学的重要基础. 所以数列在中学数学中占有重要的地位.

#### 1. 通过活动激发学生的学习兴趣, 帮助学生理解新概念

教材首先通过用小石子摆图形这样一个小游戏以及三个具体例子引出了数列的概念以及数列的项、通项的概念, 并给出了数列的按项分类——有穷数列与无穷数列. 然后利用第一个小游戏, 引导学生发现数列的序号与项之间的关系, 从而探索出数列的通项公式等有关概念. 同样在等差、等比数列概念的学习中我们也是通过活动、举例的方法激发学生学习的兴趣, 让学生感受到数列就在我们身边.

#### 2. 减低例题难度, 强调例题的示范性

教材编写力求降低例题的难度, 比如, 通过例题、“试一试”、练习等渗透、示范了求通项公式的过程, 从而突出解决了“如何求数列的通项公式”这个令初学者感到困难的问题, 也为进一步学习等差数列与等比数列奠定了知识基础. 教材中设计的例题与练习、习题相匹配, 学生可以模仿例题求解.

#### 3. 运用类比的方法, 引导学生学习新知

对于等差数列的学习, 教材通过两个具体的数列, 引导学生观察、分析两个数列的共同点, 得到“每个数列, 从第 2 项起, 每一项与它的前一项的差都等于同一个常数.”这

一重要结论，从而很自然地给出了等差数列的概念。在此基础上，教材用归纳法归纳出了等差数列的通项公式；通过对例题的解答引出了等差中项的概念与等差中项公式；最后教材通过对两个具体问题的研究、分析与解答，发现了求等差数列的前项和的方法，并利用该方法推导出了等差数列的前项和公式。对于等比数列，教材处理采用了与等差数列类似的方式，在此教师可以引导学生运用类比的方法，指导学生学习或自学这部分内容，从而提高学生的自学能力。

#### 4. 重点与难点

本单元教学重点是数列的有关概念，等差数列与等比数列的定义、通项公式、前项和公式及其应用。

本单元教学难点是数列通项公式的探求以及等差数列与等比数列的实际应用。

### (二) 课时分配

本单元教学约需 10 课时，分配如下（仅供参考）：

6.1 数列的概念	约 1 课时
6.2 等差数列	约 3 课时
6.3 等比数列	约 3 课时
6.4 数列实际应用举例	约 1 课时
归纳与总结	约 2 课时

### (三) 内容分析与教学建议

## 6.1 数列的概念

本节教材首先通过一个小游戏以及三个具体例子引出了数列的概念以及数列的项、通项的概念，并给出了数列的按项分类——有穷数列与无穷数列。教材利用第一个小游戏，引导学生发现数列的序号与项之间的关系，从而得到数列的通项公式等有关概念，然后在此基础上学习了数列的通项公式的两个方面的运用：(1) 根据所给数列的通项公式，求数列的某一项；(2) 如何根据数列的前几项，确定数列的通项公式。

通过本节的学习，要使学生理解数列以及数列的通项公式的概念；会根据数列的通项公式求数列的各项；能根据数列的前几项，写出数列的一个通项公式。

本节的重点是数列的概念和根据数列的前几项，确定数列的通项公式。而根据数列的前几项的特点，找出这些项的共同规律确定数列的一个通项公式，是本节的难点。

1. 在讲解数列的概念时，应注意下面几个问题：

(1) 在引入数列的概念时，应让学生多举出一些实例，使学生逐渐明确要确定一个数列，必须指明是那些数按照什么顺序排列。

(2) 数列是由数组成的，并且同一个数可以重复出现，如教材中的数列 (3)。

(3) 要强调数列中数的有序性。如 1, 2, 3, 4, 5 和 5, 4, 3, 2, 1 这两个数列，虽



然组成数列的数是相同的，但是排列次序不同，所以他们是不同的数列。

2. 在讲解数列的有关概念时，应阐述以下几点：

(1) 紧紧围绕数列的概念这一核心，指出凡是数列必有开头项，有相继的下一项，等等在此基础上，很自然地引出序号、一般形式、记号、通项、通项公式等数列的有关概念。

(2) 强调记号  $\{a_n\}$  与  $a_n$  的区别：前者表示数列  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ ，而后者则表示这个数列的第  $n$  项，以引起学生的注意。

3. 对于数列的通项公式，应使学生明确：

(1) 已知数列的通项公式，就可以求出这个数列的任何一项，如教材中的例 1。

(2) 并不是所有的数列都有通项公式，如全体质数由小到大排成的数列 2, 3, 5, 7, 11,  $\dots$ ，到目前为止还未找到通项公式；又如  $\sqrt{2}$  的精确到 1, 0.1, 0.01, 0.001,  $\dots$ ，的不足近似值排成的数列 1, 1.4, 1.41, 1.414,  $\dots$ ，就没有通项公式。

(3) 同一数列的通项公式可以有多种表达形式，如教材中的数列 (2) 的通项公式可以写成  $a_n = (-1)^n$ ，也可以写成  $a_n = (-1)^{n+2}$ ，或  $a_n = \cos n\pi (n \in \mathbf{N}_+)$  等形式。

(4) 如果一个数列只给出它的前面几项，并没有给出它的构成规律，那么仅由前面几项归纳出来的“通项公式”有可能是非唯一的。如由数列 2, 4, 8,  $\dots$ ，可以给出  $a_n = 2^n$ ，也可以给出  $a_n = n^2 - n + 2$ 。由于这两个通项公式本质上的不同，由此写出来的后继项也不相同，前者的  $a_4 = 16$ ，后者的  $a_4 = 14$ 。但如果知道一个数列的通项公式，这个数列就惟一确定了。

4. 数列是一种特殊函数按自变量顺序排列的函数值。它按一定次序排列，必定有开头的数，有相继的第二个数、第三个数、 $\dots$  等等。于是数列中的每一个数都对应一个序号；反过来，每个序号也都对应数列中的惟一的一个数，符合函数的定义。因此，数列就是定义在正整数集  $\mathbf{N}_+$ （或它的子集）上的函数  $f(n)$ 。当自变量  $n$  依次取 1, 2, 3,  $\dots$  时，相对应的函数值  $a_1 = f(1)$ ,  $a_2 = f(2)$ ,  $a_3 = f(3)$ ,  $\dots$ ,  $a_n = f(n)$ ,  $\dots$  按顺序就构成了数列。

值得注意的是：

数列的项与它的项的序号是不同的概念，数列的项是指数列中某一确定的数，是函数值；而项的序号是指数列的项的位置序号，是自变量的值。

5. 关于数列的分类，教材只介绍了有穷数列与无穷数列，另外，数列还可分为：递增数列与递减数列、摆动数列与常数列、有界数列与无界数列。教师可根据实际情况适当处理。

6. 本节教材安排了 2 个例题。

(1) 例 1 是已知数列的通项公式，写出数列的某些项。根据数列通项公式的意义，只要将序号代替公式中的  $n$ ，就可以求出相应的项。

(2) 例 2 是给出数列的前 4 项，要求写出使这 4 项能满足的一个通项公式。安排这一例题的目的是为了培养学生的观察、分析和归纳能力。这类问题是本节教学中的难点。教学时要引导学生观察数列中各项与它的序号之间的对应关系，从而归纳出规律，写出通项公式。实际上，这类问题的解答常常不是惟一的，要求学生得出一个使所给的各项都能满足的、最简捷的公式就可以了。

## 6.2 等差数列

本节教材首先通过对两个具体数列的特点的考查，引出了等差数列的概念，然后由等差数列的概念推导出了等差数列的通项公式，在例题的基础上引出了等差中项的概念及公式，最后通过具体例子给出了求等差数列前  $n$  项和的思路与方法，并推导出了前  $n$  项和公式。

通过本节的教学，要使学生了解等差数列的概念，掌握等差数列的通项公式与前  $n$  项和公式，并能运用这些公式解决一些简单的问题。

本节的重点是等差数列的概念，掌握等差数列的通项公式与前  $n$  项和公式及其运用。难点是等差数列前  $n$  项和公式的推导。

1. 等差数列的概念是通过归纳两个具体数列的共同点给出的。要启发学生积极思考，大胆猜想，找出本节数列①，②的共同特点，由此得出等差数列的概念以及公差  $d$  的概念。在讲解等差数列的概念时，要突出以下几点：

(1) 强调“从第 2 项起，每一项减去它的前一项的差”，防止在求公差时，把相邻两项相减的次序颠倒。虽然等差数列的任意一项减去它的后一项的差也是一个常数，但它不是公差，而是公差的相反数。

(2) 要突出公差的性质：

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \cdots = a_n - a_{n-1} = \cdots = d, \quad \text{①}$$

$$\text{或 } a_2 = a_1 + d, a_3 = a_2 + d, \cdots, a_n = a_{n-1} + d, \cdots, \quad \text{②}$$

由此使学生明确：一个等差数列，只需给出  $a_1$  和  $d$ ，这个等差数列就被确定了。证明一个数列是等差数列，只需证明对于任意正整数  $n$ ， $a_{n+1} - a_n$  是一个常数即可。

(3) 当  $d=0$  时，等差数列就是常数列，即

$$a_1, a_1, a_1, \cdots, a_1, \cdots$$

2. (1) 本节根据等差数列的概念，利用上面公差的性质②，采用不完全归纳法得出了等差数列的通项公式，目的是培养学生的归纳、猜想和推理的能力。教学中也可以利用上面公差的性质①，给出等差数列的通项公式的证明：

$$\left. \begin{array}{l} a_2 - a_1 = d \\ a_3 - a_2 = d \\ a_4 - a_3 = d \\ \cdots \\ a_n - a_{n-1} = d \end{array} \right\} n-1 \text{ 个}$$

$n-1$  个等式两边相加得： $a_n - a_1 = (n-1)d$ ,

$$\text{即 } a_n = a_1 + (n-1)d.$$

这种方法供教师参考。

(2) 在得到等差数列的通项公式后，应引导学生分析这个公式，明确通项公式给出了

四个量  $a_1$ ,  $a_n$ ,  $d$  和  $n$  之间的关系. 如果已知其中的任意三个量, 就可以根据通项公式求出另外一个量. 这说明用方程的观点处理有关等差数列的问题是一个重要的方法. 应要求学生灵活熟练的使用这个公式.

(3) 由  $a_n = a_1 + (n-1)d$  和  $a_m = a_1 + (m-1)d$  两式相减, 就可以得到等差数列通项公式的推广形式:

$$a_n = a_m + (n-m)d$$

这个公式可以供教师命题及检验学生的运算结果是否正确时使用.

3. 教材在讲解等差中项的概念之前, 先安排了一个例题 (例 5), 这样通过具体问题去认识抽象问题, 即抽象问题具体化, 更符合学生的认知规律. 通过对等差中项的概念的学习, 可以进一步加深学生对等差数列概念的理解.

(1) 等差中项公式的推导过程就是依据了等差数列的概念. 因为  $a$ ,  $A$ ,  $b$  成等差数列, 所以  $A - a = b - A$ , 从而得到  $A = \frac{a+b}{2}$ , 其中  $A$  是  $a$  与  $b$  的等差中项.

(2) 要使学生明确  $A = \frac{a+b}{2}$ , 即  $2A = a+b$  是  $a$ ,  $A$ ,  $b$  成等差数列的充要条件.

(3) 等差中项的概念和公式在解题中应用非常广泛, 教师可配备一定数量的题目, 供学生练习.

(4) 在教材中的“想一想”的两个问题后, 教师可以引导学生再深入一步, 用等差中项公式解决一些简单问题. 如: 在等差数列  $\{a_n\}$  中, 已知  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 15$ , 求  $a_3$ .

4. 例 1 是等差数列的概念的直接运用, 即考查哪个数列满足“从第 2 项起, 每一项减去它的前一项的差都等于同一个常数”, 进而判定哪个数列是等差数列并求出它的公差. 这一例题完全可以交给学生去解决.

例 2 ~ 例 5 是对等差数列的通项公式的运用, 即已知四个量  $a_1$ ,  $a_n$ ,  $d$  和  $n$  中的任意三个量, 求另外一个量. 其中例 5 的给出, 目的是为了引出等差中项的概念.

5. 对于等差数列前  $n$  项和, 教材首先通过对两个具体问题的分析, 给出了求等差数列前  $n$  项和的思路与方法——倒序相加法, 然后采用该方法推导出了等差数列前  $n$  项和公式. 在推导出前  $n$  项和公式后, 要求学生自己推导等差数列的另一个形式的前  $n$  项和公式  $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ . 在求一个等差数列前  $n$  项和时, 根据条件的不同, 要注意灵活选择公式.

等差数列前  $n$  项和公式共涉及 5 个变量  $a_1$ ,  $a_n$ ,  $d$ ,  $n$ ,  $S_n$ , 已知其中的任意 3 个量, 就可以通过解方程或方程组的方法求出另外 2 个量, 应当要求学生掌握这一点.

6. 在对学生讲解例题、习题时, 应突出数学思想和数学方法的教学, 从而提高学生分析问题和解决问题的能力.

7. 等差数列前  $n$  项和这部分, 教材中共给出了两个例题. 例 7 是对等差数列前  $n$  项的两个形式的公式的直接运用, 目的是使明确如何根据条件的不同, 灵活选择公式.

例 8 是考查对等差数列通项公式与前  $n$  项和公式的综合运用, 利用列方程组的方法去

解决. 这个例题还有另外的解法, 即将通项公式  $a_n = a_1 + (n-1)d$  与前  $n$  项和公式  $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$  结合, 或者将两个前  $n$  项和公式  $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$  与  $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$  结合列方程组这两种求解方法, 教学时教师可酌情处理.

## 6.3 等比数列

本节教材首先也是通过对两个具体数列的特点的考查, 引出了等比数列的概念, 然后由等比数列的概念推导出了等比数列的通项公式, 在例题的基础上引出了等比中项的概念及公式, 最后通过具体例子给出了求等比数列前  $n$  项和的思路与方法, 并推导出了前  $n$  项和公式.

通过本节的教学, 要使学生了解等比数列的概念, 掌握等比数列的通项公式与前  $n$  项和公式, 并能运用这些公式解决一些简单的问题.

本节的重点是等比数列的概念, 掌握等比数列的通项公式与前  $n$  项和公式及其运用. 难点是等比数列前  $n$  项和公式的推导.

1. 等比数列的概念是通过归纳两个具体数列的共同点给出的. 要启发学生积极思考, 大胆猜想, 找出本节数列①, ②的共同特点, 由此得出等比数列的概念以及公比  $q$  的概念. 在讲解等比数列的概念时, 要突出以下几点:

(1) 强调“从第 2 项起, 每一项与它的前一项的比”, 防止在求公比时, 把相邻两项比的次序颠倒.

(2) 等比数列具有如下性质:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \cdots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \cdots = q, \quad \text{①}$$

$$\text{或 } a_2 = a_1q, a_3 = a_2q, \cdots, a_n = a_{n-1}q, \cdots, \quad \text{②}$$

由此使学生明确: 一个等比数列, 只需给出  $a_1$  和  $q$ , 这个等比数列就被确定了. 证明一个数列是等比数列, 只需证明对于任意正整数  $n$ ,  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  是一个常数即可.

(3) 当  $q=1$  时, 等比数列就是常数列, 即

$$a_1, a_1, a_1, \cdots, a_1, \cdots$$

(4) 由等比数列的概念还可以知道: 等比数列的任意一项都不为 0, 因而公比  $q$  也不为 0, 而且公比  $q$  可正可负, 尤其是公比  $q$  为负值时, 数列各项的符号变化, 可结合具体例子组织学生讨论.

2. 对于等比数列的通项公式, 教学时注意突出以下几点:

(1) 发挥学生的主动性, 在教师的引导下, 让学生根据等比数列的概念以及上面的性质②, 采用不完全归纳法总结、归纳出了等比数列的通项公式. 教学中也可以利用上面的性质①, 给出等比数列的通项公式的证明:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a_2}{a_1} = q \\ \frac{a_3}{a_2} = q \\ \dots \\ \frac{a_n}{a_{n-1}} = q \end{array} \right\} n-1 \text{ 个}$$

$n-1$  个等式两边相乘得:  $\frac{a_n}{a_1} = q^{n-1}$ ,

即  $a_n = a_1 q^{n-1}$ .

这种方法供教师参考.

(2) 在得到等比数列的通项公式后, 应引导学生分析这个公式, 明确通项公式给出了四个量  $a_1$ ,  $a_n$ ,  $q$  和  $n$  之间的关系. 如果已知其中的任意三个量, 就可以根据通项公式求出另外一个量. 因此用方程的观点处理有关等比数列的问题也是一个重要的方法. 应要求学生灵活熟练地使用这个公式.

(3) 由  $a_n = a_1 q^{n-1}$  和  $a_m = a_1 q^{m-1}$  两式相除, 可得  $\frac{a_n}{a_m} = q^{n-m}$  (或  $a_n = a_m q^{n-m}$ ). 这一推广形式应要求学生理解并掌握.

(4) 在利用通项公式, 由已知  $a_1$ ,  $a_n$ ,  $n$  三个量求  $q$  以及已知等比数列中的两项求  $q$  时, 一定要防止丢根的现象发生, 如例 3.

3. 教材在讲解等比中项的概念之前, 同样也安排了一个例题 (例 5), 通过对等比中项的概念的学习, 可以进一步加深学生对等比数列概念的理解.

(1) 等比中项公式的推导过程也是依据了等比数列的概念. 因为  $a$ ,  $G$ ,  $b$  成等比数列, 所以  $\frac{G}{a} = \frac{b}{G}$ , 从而得到  $G^2 = ab$ , 即  $G = \pm \sqrt{ab}$  ( $ab > 0$ ), 其中  $G$  是  $a$  与  $b$  的等比中项.

(2) 要使学生明确  $G = \pm \sqrt{ab}$  ( $ab > 0$ ) 是  $a$ ,  $G$ ,  $b$  成等比数列的充要条件.

(3) 只有同号的两个数才有等比中项, 等比中项有两个, 它们互为相反数.

4. 例 1 是等比数列的概念的直接运用, 即考查哪个数列满足“从第 2 项起, 每一项与它的前一项的比都等于同一个非零常数”, 进而判定哪个数列是等比数列并求出它的公比. 这一例题也可以交给学生去解决.

例 2 ~ 例 5 是对等比数列的通项公式的运用, 即已知四个量  $a_1$ ,  $a_n$ ,  $q$  和  $n$  中的任意三个量, 求另外一个量. 其中例 5 的给出, 目的是为了引出等比中项的概念.

5. 对于等比数列前  $n$  项和, 教材通过对本单元的回顾与思考中提出的国际象棋问题的分析, 总结出了求等比数列前  $n$  项和的思路与方法——错位相减法, 然后采用该方法推导出了等比数列前  $n$  项和的一个公式. 前  $n$  项和的另一个公式可让学生自己推导, 并让学生自己分析出两个求和公式所适用的条件, 便于灵活运用这两个公式.

(1) 等比数列前  $n$  项和的两个公式都要求  $q \neq 1$ , 要使学生明确, 当时  $q = 1$ , 等比数

列的前  $n$  项和  $S_n = na_1$ .

(2) 等比数列前  $n$  项和公式共涉及 5 个变量  $a_1, a_n, q, n, S_n$ , 已知其中的任意 3 个量, 就可以通过解方程或方程组的方法求出另外 2 个量. 求解过程中要提醒学生注意, 不要丢根.

6. 等比数列前  $n$  项和这部分, 教材中共给出了 2 个例题. 例 6 是对等比数列前  $n$  项公式的直接运用, 要求学生能根据题目的已知条件, 确定出  $a_1, q$  和  $n$ , 然后选择公式求出  $S_n$ .

例 7 也是对等比数列前  $n$  项和公式的运用, 利用列方程的方法就可以解决.

## 6.4 数列实际应用举例

数列知识在实际问题中的应用非常广泛, 本节教材通过对三个实际问题的研究, 运用数列的知识进行了解答, 从而使学生掌握用数列知识解决简单应用问题的思路和方法.

通过本节的教学, 要使学生掌握等差数列、等比数列的通项公式与前  $n$  项和公式在实际问题中的具体应用.

本节的重点是等差数列、等比数列的通项公式与前  $n$  项和公式在实际问题中的具体应用. 难点是对实际问题的数学抽象与建模.

1. 用数列的有关知识解决实际问题时, 首先要弄清楚是哪些数构成了一个数列, 构成的数列是等差数列还是等比数列. 然后把实际问题中的数 (已知和未知) 看成数列中的基本量, 代入相应数列的通项公式或前  $n$  项和公式中进行求解.

2. 利用等比数列解决实际问题时, 经常要用到对数运算, 教学是教师可根据学生的实际情况灵活处理.

3. 例 1 是生活中常见的银行储蓄问题, 这个问题与我们的生活密切相关. 对于这个例题, 讲解时首先要给学生讲清楚单利的概念. 在此基础上, 对每个月存入的 100 元钱到期后的本利进行逐一分析, 进而建立起等差数列的数学模型并明确这是一个求前  $n$  项和的问题, 最后代入相关公式中进行求解.

例 2 是搭乘出租车计费的问题, 也是一个生活中我们经常遇到的问题. 这个例题的处理方法与例 1 类似, 只是这个例题涉及的是等差数列的通项问题, 因此应该利用等差数列的通项公式进行求解.

例 3 涉及的问题是我们的社会问题, 即绿化造林、改善环境问题. 教学时应引导学生积极思考、分析, 确定这是一个等比数列问题. 但需要注意的是, 这个实际问题对应的等比数列的公比  $q = 1 + 10\%$ , 而不是  $q = 10\%$ , 这一点一定要引起学生的重视. 这个例题的解答过程要用到对数运算, 需要借助计算器进行相关的运算.

### (四) 复习建议

数列是中学数学知识的重要组成部分, 它内容知识丰富、思想方法灵活、题型综合多变. 数列不仅在生产生活中存在广泛的实际应用, 而且是培养学生运算能力、逻辑思维能力及分析问题和解决问题的能力的重要题材, 是进一步学习高等数学的基础知识.

1. 认真梳理数列部分的基本概念、公式、性质和重要结论, 形成知识网络. 对基础知识要落实到位, 主要是等差(比)数列的定义、通项公式、等差(比)中项及公式、前  $n$  项和公式.

2. 等差数列与等比数列是学生最熟悉的两个基本数列, 它们是一切数列问题的出发点与归宿, 其产生、演变与深化的过程中蕴藏着丰富的数学思想方法, 复习中应充分体现过程胜于结果的原则.

3. 等差数列与等比数列有许多相似的性质, 掌握类比的方法, 可由等差(比)数列中某一类的数列的性质, 类比发现另一类数列的相似性质.

4. 因等差(比)数列是由首项与公差(比)确定的, 故称首项与公差(比)为等差(比)数列的基本量; 因此, 大凡涉及等差(比)数列的数学问题, 我们总希望通过等差(比)数列的基础知识并结合条件去求出首项与公差(比)、或它们之间的关系, 从而达到解决问题的目的, 这种方法就是等差(比)数列特有的基本量方法; 简言之, 就是用基本量去统一条件与结论而达到解决等差(比)数列相关问题的方法.

5. 正确运用方程思想求解数列基本量, 等差(比)数列涉及  $a_1, d(q), a_n, n, S_n$  这 5 个基本量, 知道其中任意 3 个量, 即可用通项公式和求和公式解出其余 2 个量. 这是求数列通项以及前  $n$  项和的通用方法.

6. 注意等差(比)数列性质的灵活运用.

要全面深刻地理解等差(比)数列的许多重要性质. 如: 在等比数列  $\{a_n\}$  中, 若  $m+n=p+q$ , 则  $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$ , 学会对已知数列进行重构, 如: 在等差数列  $\{a_n\}$  中, 数列  $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1$  也成等差数列、下标成等差数列的对应项组成等差数列、相等项数的和组成的数列仍为等差数列.

7. 注意数列知识在实际问题中的应用, 对于教育储蓄、零存整取、分期付款等实际问题, 能够透过条件发现其中隐含的等差(比)关系, 将实际问题转变成等差(比)数列问题进行解决. 通过对数列的应用问题及探索性问题的学习提高学生的运算能力、逻辑思维能力以及分析问题和解决问题的能力.

### 三 教学设计共享

#### 课题 1 数 列

##### 【教学目标】

1. 理解数列的概念.
2. 掌握通项公式的求法以及由通项公式求项.

##### 【教学重点】

数列的概念.

##### 【教学难点】

求数列的通项公式.

## 【教学过程】

### (一) 引言

有关数列的研究有文字记载的已有五千年的历史了. 在我国宋代数列研究的发展水平就很高了. 那么, 到底什么叫数列呢? 下面我们来学习.

### (二) 数列的定义

首先大家来看以下实例:

(1) 在沙滩上用小石子摆成正方形的形状, 所用的石子数分别是 1, 4, 9, 16.

(2) 正整数 1, 2, 3, 4, 5 的倒数排成一列数:  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ .

(3)  $-1$  的 1 次方, 2 次方, 3 次方, 4 次方,  $\dots$  排成一列数:

$$-1, 1, -1, 1, \dots$$

(4) 无穷多个 5 排成一列数:  $5, 5, 5, 5, \dots$ .

定义: 按一定次序排列的一列数叫做数列. 数列中的每一个数叫做这个数列的项. 其中, 项数有限的数列叫有穷数列, 如 (1), (2). 项数无限的数列叫无穷数列, 如 (3), (4).

### (三) 数列的表示方法

项: 1, 4, 9, 16.

序号: 1, 2, 3, 4.

在数列相应序号位置上的项依次叫做这个数列的第 1 项 (或首项), 第 2 项,  $\dots$ , 第  $n$  项,  $\dots$ , 并依次用  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  来表示. 数列简记为  $\{a_n\}$ . 其中  $a_n$  叫数列的通项.

如:  $2, 3, 4, 5, \dots, n+1, \dots$  简记为数列  $\{n+1\}$ . (5)

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$  简记为数列  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ . (6)

定义: 如果数列  $\{a_n\}$  的第  $n$  项  $a_n$  与序号  $n$  之间的关系可以用一个公式来表示, 那么这个公式就叫做这个数列的通项公式.

如: (5)  $a_n = n+1$ , (6)  $a_n = \frac{1}{n}$ .

### (四) 数列概念的应用

例 1 已知下面数列  $\{a_n\}$  的通项公式, 分别写出它们的前 5 项和第 10 项:

$$(1) a_n = \frac{2n}{2n+1}; \quad (2) a_n = (-1)^n \cdot (2n-1).$$

解: (1) 在通项公式中依次取  $n=1, 2, 3, 4, 5, 10$ , 可得到  $a_1 = \frac{2}{3}, a_2 = \frac{4}{5}, a_3 = \frac{6}{7}, a_4 = \frac{8}{9}, a_5 = \frac{10}{11}, a_{10} = \frac{20}{21}$ .

(2) 在通项公式中依次取  $n=1, 2, 3, 4, 5, 10$ , 可得到  $a_1 = -1, a_2 = 3, a_3 = -5, a_4 = 7, a_5 = -9, a_{10} = 19$ .

例 2 写出下面数列的一个通项公式, 使它的前 4 项分别是下列各数:



(1) 3, 5, 7, 9;

(2)  $\frac{2^2-1}{2}, \frac{3^2-1}{3}, \frac{4^2-1}{4}, \frac{5^2-1}{5}$ ;

(3)  $\frac{1}{1 \times 2}, -\frac{1}{2 \times 3}, \frac{1}{3 \times 4}, -\frac{1}{4 \times 5}$ .

解: (1) 这个数列的前4项都是序号的2倍加上1, 所以它的一个通项公式是  $a_n = 2n + 1$ ;

(2) 这个数列的前4项的分母都是序号加上1, 分子是分母的平方减去1, 所以它的一个通项公式是  $a_n = \frac{(n+1)^2-1}{n+1}$ ;

(3) 这个数列的前4项的绝对值都等于序号与序号加上1的积的倒数且奇数项为正, 偶数项为负, 所以它的一个通项公式是  $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$ .

### (五) 练习

1. 根据下面数列  $\{a_n\}$  的通项公式, 说出它们的前5项:

(1)  $a_n = \frac{1}{n^2}$ ;

(2)  $a_n = 10n$ ;

(3)  $a_n = 5(-1)^{n+1}$ ;

(4)  $a_n = 1 + (-1)^n$ .

2. 观察下面数列的特点, 用适当的数填空, 并对每一数列各写出一个通项公式:

(1) 2, 4, ( ), 8, 10, ( ), 14, ...;  $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ ;

(2) ( ), 4, 9, 16, 25, ( ), 49, ...;  $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ ;

(3) 1,  $\sqrt[3]{2}$ , ( ),  $\sqrt[3]{4}$ ,  $\sqrt[3]{5}$ ,  $\sqrt[3]{6}$ ,  $\sqrt[3]{7}$ , ...;  $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ .

3. 根据数列的通项公式填表:

$n$	1	2	...	6	...		...	$n$
$a_n$			...		...	29	...	$3n-1$

4. 已知数列的前4项, 写出它的一个通项公式:

(1) -1, -2, -3, -4; (2) 1, -2, 3, -4; (3) -1, 2, -3, 4.

### (六) 小结

1. 数列及其分类: 数列  $\begin{cases} \text{有穷数列,} \\ \text{无穷数列.} \end{cases}$

2. 数列的通项公式:  $a_n = f(n)$ .

### (七) 作业

1. 求下列数列的第2项和第10项:

(1)  $a_n = 5n$ ; (2)  $a_n = 1 + (-1)^n$ .

2. 求下列数列的一个通项公式:

(1)  $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \dots$ ; (2) 1, 3, 6, 10, ...;

(3) -2,  $\frac{5}{3}, -\frac{10}{5}, \frac{17}{7}, \dots$ .