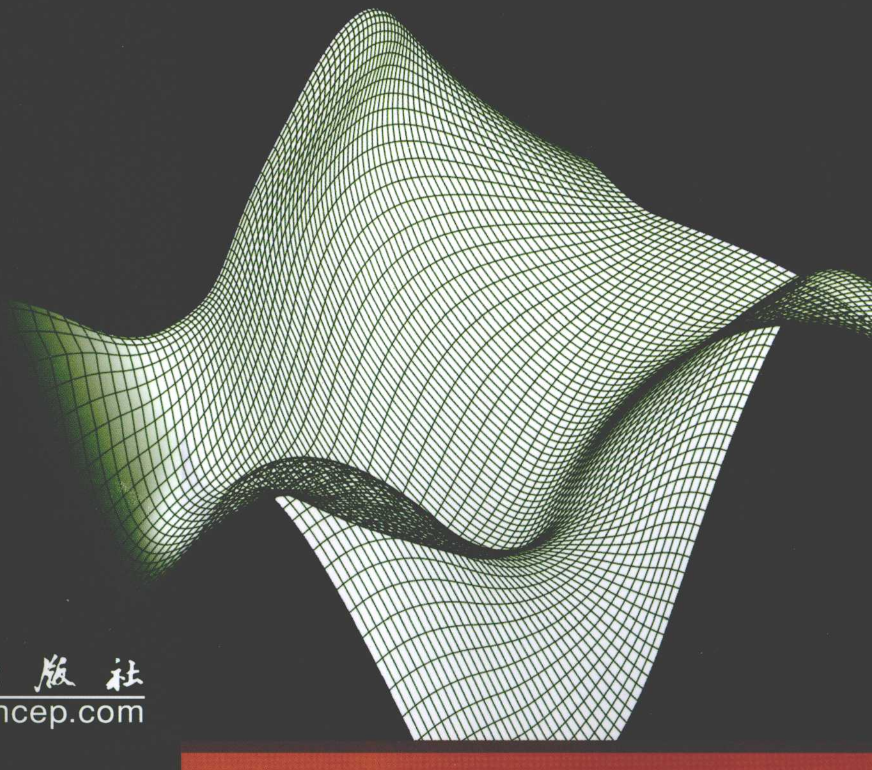
普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套教辅

《统计热力学》（第二版）学习辅导

梁希侠 班士良 宫箭 崔鑫 编著



科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套教辅

《统计热力学》(第二版)
学习辅导

梁希侠　班士良
宫　箭　崔　鑫　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材《统计热力学》(第二版)(梁希侠、班士良编著)的配套教辅书。除第10章外,其余各章都有“内容括要”、“例题详解”、“基本题解”和“选做题目”四个模块。“内容括要”与传统的知识点总结不同,它汇集了作者多年的教学和科研经验,形成了独有的主线总结,不仅便于学生把离散的知识点有机地连接在一起,方便记忆,而且很容易使学生形成系统的思想,了解热力学与统计物理的内涵;“例题详解”和“基本题解”能够满足学生的基本学习;“选做题目”可以为考研或有兴趣进一步学习统计热力学的学生提供帮助。

本书适合普通高等院校物理专业及应用物理专业的学生学习热力学与统计物理课程时参考使用,也可作为教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

《统计热力学》(第二版)学习辅导/梁希侠等编著.—北京:科学出版社,2010

(普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套教辅)

ISBN 978-7-03-026610-1

Ⅰ.①统… Ⅱ.①梁… Ⅲ.①统计热力学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O414.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第017458号

责任编辑:胡云志 杨 然 / 责任校对:李奕萱

责任印制:张克忠 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

明辉印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010年2月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2010年2月第一次印刷 印张:15

印数:1—4 000 字数:302 000

定价:24.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前　　言

本书是为普通高等教育“十一五”国家级规划教材《统计热力学》(第二版)(梁希侠、班士良编著,科学出版社出版)配套的教学辅导书. 作为本科物理专业“热力学和统计物理学”(简称“热统”)课程的教材,该书的体系与国内多数教材不同. 作者尝试突破“热力学”、“统计物理学”独立分授的传统模式,在微观理论“统计物理”框架下,以“系综理论”为主线,系统、完整地构建了微观与宏观理论交融的“统计热力学”教学体系. 相应的课程于2004年成为首门“热统”国家级精品课程. 作为配套辅导书,本书采用相同体系. 全书共有十章,与配套教材一一对应.

本书各章(除第10章外)均在复习总结的基础上,安排了习题解答. 为便于任课教师和学生选择,并适应学生继续深造和工作的需要,本书习题在配套教材的基础上做了较多补充,比教材增加题量一倍多. 为帮助学生循序渐进地掌握解题方法和技巧,提高运用所学知识分析和解决问题的能力,根据习题难易和基本程度分为“例题详解”、“基本题解”、“选做题目”三个层次安排解答. 原书第10章未安排习题,本辅导书则提供了少量选做题目.

“例题详解”部分的题目比较典型,其内容涵盖对基本概念的应用和对基本方法的演练,有较普遍的代表性,本书对这部分题目,从解题思路到具体步骤,均作了比较详细的阐述. “基本题解”部分的题目,其知识范围涉及目前国内本科教学要求的基本内容,其难度符合对本科物理专业学位和攻读后续学位的要求,是提供学生练习的主要部分,书中按照通常的解题要求给出解答. “选做题目”或相对较难,或不属于基本要求,书中只给出答案或部分证明提示,以供参考.

本书提供了一定数量的习题及解题指导,但不是一本单纯的习题集. 为辅助教学,帮助学生复习总结,各章均系统地列出本章学习目的、要求和知识要点. 同时,还通过“复习提示”指出学习重点、各知识点的地位及其相应关系,并对教与学中应该注意的问题给以说明. 在总结全章内容的基础上,还给出了知识联系框图. 为使教师和学生更好地理解和掌握“统计热力学”体系,书中对体系的构建思路、特点,以及教学中可能出现的问题和解决办法予以说明,并给出热物理和本体系的结构框图.

本书虽然采用了与其他教材不同的新体系,但涵盖了目前本科“热统”课程要求的全部内容,可供采用不同教材讲授和学习“热统”的师生参考. 同时,也希望对备考硕士研究生“统计物理学”课程的考生和从事相关教学、科研工作的人员有所帮助.

在本书的习题选择和解答编写过程中,参考了有关教材和著作,例如:久保亮五著,徐振环等译,高等教育出版社出版的《统计力学》;汪志诚著,高等教育出版社出版的《热力学·统计物理(第三版)学习辅导书》;郑久仁、周子舫著,科学出版社出版的《热学热力学统计物理(物理学大题典⑤/张永德主编)》;沈惠川、郑久仁著,科学出版社出版的《热物理习题精解(下册)》等.专此致谢,文中不拟逐一详引.

在本书编写过程中,得到了国内同行的鼓励和帮助;科学出版社的编辑为本书的出版精心策划,并付出辛勤的劳动.对此,作者不胜感激.

限于作者水平,再兼体系新创,从内容总结到习题选解,疏漏与错误定不鲜见,敬请读者批评指正.

作　者

2009 年 10 月

目　　录

第 1 章　预 备 知 识

1.1　内 容 括 要

1. 目的要求

本章目的是复习与本课程学习有关的普通物理和数学知识. 主要要求：

(1) 熟悉热学课程中关于热力学基本定律,即第零、第一、第二定律的相关知识;

(2) 掌握单粒子量子态的基本概念和描述方法,理解粒子全同性的概念,熟悉量子多粒子系的经典极限及其描述方法;

(3) 熟练运用热物理中最常用的数学概念和工具.

2. 学习要点

1) 热学知识回顾

热力学平衡态——在没有外界影响的情况下,系统各部分性质长时间不变.

热平衡定律(热力学第零定律)——无外界影响时,两系统分别与第三系统热接触而性质不发生变化,则这两个系统必处于热平衡.

温度——相互热平衡的系统具有相同的温度. 将上述"第三个系统"的物理特征量适当标定,即可用作"温度计"来测量温度.

物态方程——描述系统平衡态时各状态参量之间函数关系的方程. 例如,

$$T = T(p,V). \tag{1-1}$$

热力学第一定律——能量守恒定律,常表述为:第一类永动机是不可能造成的. 其数学表述为

$$\Delta E = Q + W, \tag{1-2}$$

式中,E 为系统的内能,Q 和 W 分别为系统从外界吸收的热量和外界对系统所做的功.

热力学第二定律——宏观过程不可逆性定律,常表述为:第二类永动机是不可能造成的.

热力学第二定律引入热力学函数熵 S:经历任意微小的可逆过程,系统熵的增量为

$$dS=\frac{dQ}{T},\tag{1-3}$$

式中,dQ 为物体系从外界吸收的热量,T 为外界温度.

热力学第二定律的数学表述:对于孤立系

$$\delta S\geqslant 0,\tag{1-4}$$

式中,大于号对应不可逆过程,等号对应可逆过程.该式给出熵增加原理——孤立系经历任意微小过程,其熵不减.

综合热力学第一、二定律,在只有通过体积变化做功的情形下,可得任意可逆过程满足的热力学基本微分方程式

$$TdS=dE+pdV.\tag{1-5}$$

2) 微观状态的描述

(1) 单粒子态.微观粒子具有波粒二象性,受不确定性原理制约.例如,对坐标和动量(在 x 方向)的不确定性有以下关系:

$$\Delta p_x\Delta x\approx h.\tag{1-6}$$

能量为 ε、动量为 $\boldsymbol{p}$ 的自由粒子,对应于角频率为 ω、波矢量为 $\boldsymbol{k}$ 的平面波,并有德布罗意关系

$$\varepsilon=\hbar\omega,\quad \boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{k}.\tag{1-7}$$

力学量的可能取值往往是不连续的"分立"值.例如,三维自由粒子动量分量和能量均只能取分立值,其可能值分别为

$$p_i=\frac{2\pi\hbar}{L}n_i,\quad n_i=0,\pm1,\pm2,\cdots(i=x,y,z),\tag{1-8}$$

$$\varepsilon_n=\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m}=\frac{2\pi^2\hbar^2}{m}\frac{n_x^2+n_y^2+n_z^2}{L^2}.\tag{1-9}$$

粒子的微观态(量子态)用 n_x,n_y,n_z 三个量子数表征.

多个量子态具有相同能量的情形称为能量简并,其他力学量也可能存在简并.简并态之数目称为简并度.例如,自由粒子对应于 $n^2=n_x^2+n_y^2+n_z^2=1$ 的能级的简并度为 6.

线性谐振子的能级不简并(简并度为 1),可能值为

$$\varepsilon_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right),\quad n=0,1,2,\cdots,\tag{1-10}$$

式中,ω 为谐振子的角频率.相邻能级间隔为 $\hbar\omega$(常数).

微观粒子具有自旋,表现出内禀磁矩.例如,电子自旋为 $\hbar/2$(简称自旋 1/2),

在空间任意方向的投影取值为$\pm\hbar/2$. 在无外磁场时，电子的两个自旋态有相同的能量，能级2度简并.

单粒子态相邻能级间隔远小于值kT，即量子力学取$\hbar\to 0$的极限时，其坐标和动量可同时确定，粒子运动可用经典力学描述，称为经典极限.

自由度为r的经典粒子的运动，可用其广义坐标和动量构成的$2r$维-μ空间描述. μ空间中的一点代表其一个微观态.

若用μ空间描述量子态，每个单粒子态对应μ空间一定的体积. 自由度为r的粒子的一个量子态在$2r$维μ空间中占据体积为h^r. 这个关系称为对应关系.

态密度：三维自由粒子在六维μ空间体积元$\mathrm{d}p_x\mathrm{d}p_y\mathrm{d}p_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$内的微观状态数为$(1/h^3)\mathrm{d}p_x\mathrm{d}p_y\mathrm{d}p_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. 在体积$V$中，动量绝对值在$p\sim p+\mathrm{d}p$范围内的微观状态数为

$$g(p)\mathrm{d}p=\frac{4\pi V}{h^3}p^2\mathrm{d}p,\tag{1-11}$$

式中，$g(p)$称为动量态密度.

非相对论性自由粒子能量与动量的关系为$\varepsilon=p^2/2m$，能量在$\varepsilon\sim\varepsilon+\mathrm{d}\varepsilon$范围内的单粒子微观状态数为

$$D(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon=\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\varepsilon^{1/2}\mathrm{d}\varepsilon,\tag{1-12}$$

式中，$D(\varepsilon)$为其能量态密度.

(2) 多粒子态. 性质相同的微观粒子不可分辨，有全同性. 多粒子态通过给出粒子在各可能的单粒子态的分布来描述. 不同类型的粒子遵从不同分布原则，有不同的统计法.

玻色统计法——允许多个粒子处于同一单粒子态的统计法. 相应粒子为玻色子，其自旋为整数或零.

费米统计法——受泡利不相容原理制约，一个单粒子态最多只能被一个粒子占据的统计法. 相应的粒子为费米子，其自旋为半整数(1/2，3/2，…).

麦克斯韦-玻尔兹曼统计法——可分辨粒子组成的系统的统计法，与经典统计法没有本质区别. 微观态可通过给出各粒子所处单粒子态来描述. N个自由度为r的粒子组成的系统的运动，可用rN个广义坐标和动量构成的几何空间——相空间(相宇)，或称Γ空间描述. 空间中的一点代表体系的一个微观态.

对应关系：系统一个微观量子态在Γ空间占据的相体积为h^{rN}.

3) 有关数学知识

(1) 概率与统计平均. 概率：若给定条件后，N次试验中随机事件i发生的次

数为 N_i，则事件 i 出现的概率为

$$P_i = \lim_{N\to\infty}\frac{N_i}{N}. \tag{1-13}$$

概率有以下基本特征：

① 概率只能在 0 和 1 之间取值，即 $0\leqslant P_i\leqslant 1$；

② 互斥事件 i 与 j 的和事件 $i+j$ 的概率有可加性，即 $P_{i+j}=P_i+P_j$；

③ 概率的归一化条件为 $\sum\limits_i P_i=1$；

④ 相互独立的事件 i 和 j 同时出现的事件 $i\times j$ 的概率为 $P_{i\times j}=P_i\times P_j$.

随机变量：对事件赋以数值，即构成随机变量. 分立取值的变量为离散型随机变量，连续取值的变量为连续型随机变量. 例如，与三维空间坐标一一对应的事件所联系的变量为连续型随机变量. 事件在 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}(=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z)$ 体积元出现的概率写为 $\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，式中，$\rho(\boldsymbol{r})$ 为概率密度. 可有

$$0\leqslant\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}\leqslant 1 \quad 和 \quad \int\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}=1. \tag{1-14}$$

统计平均：设变量 u 为随机变量 x 的函数，对离散型随机变量，其统计平均值为

$$\bar{u}=\sum_i u_i P_i. \tag{1-15}$$

对连续型随机变量，其统计平均值为

$$\bar{u}=\int u(\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{1-16}$$

统计独立性：设事件 i 为第一组互斥事件 $1,2,\cdots,i,\cdots$ 中的一事件，事件 j 为第二组互斥事件 $1,2,\cdots,j,\cdots$ 中的一事件，两组事件相互独立. 事件 i 和第二组事件中的任一事件同时发生的概率为

$$\sum_j P_{i\times j}=P_i. \tag{1-17}$$

由式(1-17)可见，在不论第二组事件中哪一个事件发生的情况下，事件 i 发生的概率与第二组事件不存在时相同，这种性质称为统计独立性.

对连续型随机变量，统计独立性给出

$$\int\rho_{12}\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2=\rho_1(\boldsymbol{r}_1). \tag{1-18}$$

对随机变量的函数 u 和 v，相应的统计独立公式为

$$\overline{uv}=\bar{u}\bar{v}. \tag{1-19}$$

涨落：随机变量 u 的绝对涨落定义为

$$\overline{(u-\bar{u})^2}=\overline{u^2}-(\bar{u})^2. \tag{1-20}$$

相对涨落则为

$$\frac{\overline{(u-\bar{u})^2}}{(\bar{u})^2}=\frac{\overline{u^2}}{(\bar{u})^2}-1. \tag{1-21}$$

(2) 排列与组合. 乘法原理:若完成事件 A 必须依次完成事件 A_1 和 A_2,完成事件 A_1 可有 n_1 种方法,而无论用何种方法完成 A_1 后,完成 A_2 有 n_2 种方法,则有如下乘法原理:完成事件 A 的方法有 $n_1\times n_2$ 种. 此原理是推导排列与组合公式的重要依据.

排列:由 N 个元素的集合中任意取出 n 个元素的有序序列为一个排列.

用无放回抽取法抽取时,排列方式的总数为

$$\mathrm{A}_N^n=\frac{N!}{(N-n)!},\quad n\leqslant N. \tag{1-22}$$

用有放回抽取法抽取时,排列方式的总数则为 $\mathrm{A}_N^n=N^n$.

组合:从 N 个元素的集中任意取出 n 个不记顺序的元素称为一个组合. 组合总数由下式给出:

$$\mathrm{C}_N^n=\frac{N!}{n!(N-n)!}. \tag{1-23}$$

(3) 偏导数和完整微分. 隐函数的偏导数:方程 $F(x,y,z)=0$ 定义了变量 x, y, z 之间的隐函数关系 $x=x(y,z)$, $y=y(x,z)$, $z=z(x,y)$,则有如下偏导数关系:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y=1\Big/\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y,\quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y=-1. \tag{1-24}$$

复合函数的偏导数:设变量 z 是变量 u, v 的函数,而 u, v 均为独立变数 x, y 的函数,则有复合函数 $z(x,y)=z[u(x,y),v(x,y)]$,可得如下偏导数关系:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y, \tag{1-25}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_v\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_u\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x. \tag{1-26}$$

一个特例:当 $z(x,y)=z[x,v(x,y)]$时,有

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_v+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_x\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y, \tag{1-27}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x=\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_x\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x. \tag{1-28}$$

完整微分条件:$\mathrm{d}z=u\mathrm{d}x+v\mathrm{d}y$ 为完整微分(恰当微分)的充要条件是

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1-29}$$

(4) 高斯型积分.

① $$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}; \tag{1-30}$$

② $$\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}\,dx=\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2^{n+1}}\frac{\sqrt{\pi}}{a^{n+1/2}}, \tag{1-31}$$

$$\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-ax^2}\,dx=\frac{n!}{2a^{n+1}}. \tag{1-32}$$

(5) Γ 积分. Γ 函数的定义为 $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$. 它有以下基本性质:

① $$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)\quad(\alpha>0); \tag{1-33}$$

② $$\Gamma(1)=1,\qquad \Gamma(n+1)=n!; \tag{1-34}$$

③ $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},\quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}. \tag{1-35}$$

(6) 斯特林公式. 对大数 N 有下面近似计算 $N!$ 的对数的斯特林公式:

$$\ln N!=N(\ln N-1)+\frac{1}{2}\ln(2\pi N).$$

当 $N\gg 1$ 时,上式进一步简化为

$$\ln N!=N(\ln N-1). \tag{1-36}$$

3. 复习提示

(1) 通过普通物理的学习,我们对经典的热学和分子物理学知识已有基本了解,熟悉了由实验观测归纳总结热力学基本定律(第一、第二定律)的认识过程. 这些知识是学习统计热力学必备的基础,在本课的学习中将不再重复. 因此,认真参考热学教材,对相关知识系统地加以回顾,是十分必要的.

(2) 本课的体系建立在量子论基础之上. 本章给出用量子理论描述微观粒子和体系力学运动状态的基本知识,旨在帮助未系统学习量子力学的读者站在量子论的高度理解热运动的统计规律性. 读者可结合复习普通物理中原子物理或量子物理学的相关知识来学习这部分内容.

(3) 概率的基本理论是统计物理的数学基础. 本章给出的数学概念和公式,是热物理学中频繁用到的工具,需要熟练地掌握. 对于偏导数的公式,还要特别注意其在热力学中应用时的特殊形式和含义.

(4) 热物理学包括"宏观"和"微观"两种理论,即"热力学"和"统计物理学". 目前流行的教学体系是将这两种理论分别讲授. 与传统体系不同,本书采用了贯通微

观与宏观理论的"统计热力学"体系. 在学习全书之前,初步了解这种体系的结构是有益的. 为帮助学习者理解这一体系,图 1-1 和图 1-2 分别给出热物理宏观与微观理论框架图和"统计热力学"体系框图.

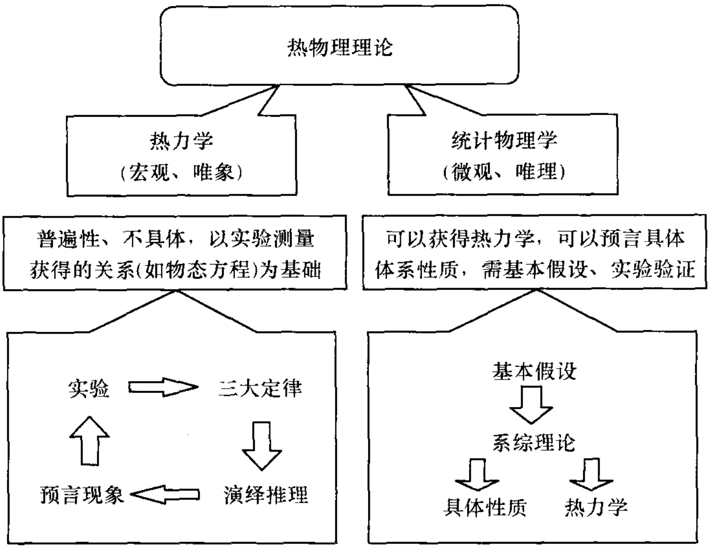


图 1-1 热物理理论框架

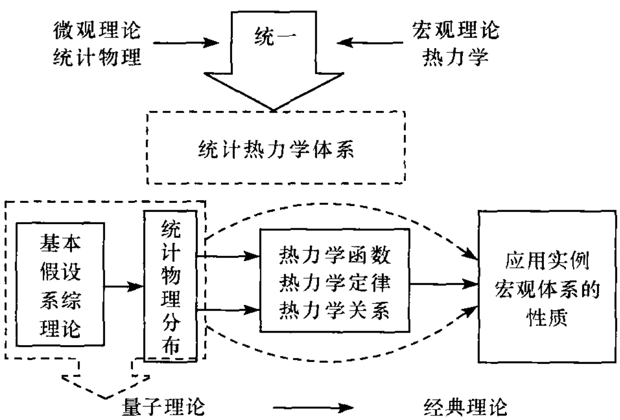


图 1-2 统计热力学体系

1.2 例 题 详 解

例 1-1(原题 1.1) 试证明:在体积 V 内、在 $\varepsilon\sim\varepsilon+d\varepsilon$ 的能量范围内,三维非相

对论性自由电子的量子态数为

$$D(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon=\frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\varepsilon^{1/2}\mathrm{d}\varepsilon,$$

式中,$D(\varepsilon)$为态密度.

证　已知若用广义坐标和广义动量来描述微观态,则在 μ 空间中 h^r 的体积范围内的微观态是不可区分的.

根据对应关系:每个可能的微观状态在 $2r$ 维 μ 空间中所占体积为 h^r.

一个三维自由粒子在动量由 p_i 到 $p_i+\mathrm{d}p_i$,坐标由 i 到 $i+\mathrm{d}i(i=x,y,z)$的范围内,或者说在六维 μ 空间体积元 $\mathrm{d}p_x\mathrm{d}p_y\,\mathrm{d}p_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 中可能的微观状态数应为

$$\frac{1}{h^3}\mathrm{d}p_x\mathrm{d}p_y\,\mathrm{d}p_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{1}$$

若将体积求和(积分),可得出在体积 V 中、动量范围为 $\boldsymbol{p}\sim\boldsymbol{p}+\mathrm{d}\boldsymbol{p}$(即在 $\mathrm{d}p_x\mathrm{d}p_y\,\mathrm{d}p_z$ 内)的微观状态数为

$$\frac{1}{h^3}\mathrm{d}p_x\mathrm{d}p_y\,\mathrm{d}p_z\int_0^L\int_0^L\int_0^L\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{V}{h^3}\mathrm{d}p_x\mathrm{d}p_y\,\mathrm{d}p_z. \tag{2}$$

那么,在体积 V 中,动量的绝对值在 $p\sim p+\mathrm{d}p$ 范围(动量壳层)内的微观状态数为

$$\frac{V}{h^3}p^2\mathrm{d}p\int_0^\pi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi=\frac{4\pi V}{h^3}p^2\mathrm{d}p. \tag{3}$$

则动量值在 p 附近,单位动量间隔内的微观状态数为

$$g(p)=\frac{4\pi V}{h^3}p^2, \tag{4}$$

式中,$g(p)$为动量态密度.

对于三维非相对论性自由电子,自旋简并度为 2,能量与动量关系满足

$$\varepsilon=p^2/2m, \tag{5}$$

易得

$$\mathrm{d}\varepsilon=p\mathrm{d}p/m, \tag{6}$$

则

$$\mathrm{d}p=m/p\mathrm{d}\varepsilon=m^{1/2}/(2\varepsilon)^{1/2}\mathrm{d}\varepsilon. \tag{7}$$

在 $\varepsilon\sim\varepsilon+\mathrm{d}\varepsilon$ 的能量范围内,三维非相对论性自由电子的量子态数

$$D(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon=g(p)\mathrm{d}p=\frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\varepsilon^{1/2}\mathrm{d}\varepsilon. \tag{8}$$

例 1-2(原题 1.4)　已知一维线性谐振子的能量为

$$\varepsilon=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2,$$

试求在 $\varepsilon\sim\varepsilon+d\varepsilon$ 的能量范围内，一维线性谐振子的量子态数.

解　此题的能量动量关系中含有坐标，若采用上题方法不易求解. 因为涉及耦合变量的积分，可以从另一角度处理. 先计算在 $\varepsilon\sim\varepsilon+d\varepsilon$ 的能量范围内，谐振子占据二维 μ 空间面积元的面积.

根据一维线性谐振子的能量动量关系

$$\varepsilon=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2,\tag{1}$$

将其整理后，得

$$\frac{p^2}{2m\varepsilon}+\frac{x^2}{\frac{2\varepsilon}{m\omega^2}}=1.\tag{2}$$

容易看到谐振子在二维 μ 空间的运动方程为椭圆. 根据椭圆面积公式，可以得到 μ 空间能量小于等于 ε 的面积为

$$S=\pi\sqrt{2m\varepsilon}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m\omega^2}}=\frac{2\pi\varepsilon}{\omega}.\tag{3}$$

因此，可通过对上式求微分得到在 $\varepsilon\sim\varepsilon+d\varepsilon$ 的能量范围内面积元的面积为

$$dS=\frac{2\pi}{\omega}d\varepsilon.\tag{4}$$

根据对应关系，每个可能的微观状态在 $2r$ 维 μ 空间中所占体积为 h^r，则二维谐振子一个量子态占据 μ 空间的面积为 h. 可得在 $\varepsilon\sim\varepsilon+d\varepsilon$ 的能量范围内，一维线性谐振子的量子态数为

$$\Gamma=\frac{dS}{h}=\frac{2\pi}{h\omega}.\tag{5}$$

例 1-3（原题 1.5）　考虑由两个粒子组成的系统，每个粒子有三个可能的单粒子微观状态，分别给出玻色系统、费米系统和玻尔兹曼系统的可能分布方式.

解　为了研究分布方式，首先应该了解玻色系统、费米系统和玻尔兹曼系统的基本特性.

统计物理研究的系统多为性质完全相同的微观粒子所组成，这类系统称为全同粒子系. 自旋是微观粒子的一种基本属性，由于自旋的不同，导致全同粒子系统在微观状态上的不同分布，致使其宏观的统计性质也会有较大的区别. 全同粒子系统分为三类：

（1）玻色系统. 自旋为整数和零的微观粒子不受泡利不相容原理限制（占据同

一微观态的粒子数不受限制),还满足全同性原理:交换任意两个粒子不构成系统新的微观状态.

(2) 费米系统. 自旋为半整数(1/2,3/2,…)的微观粒子受泡利不相容原理限制(任意一微观态最多被一个粒子占据). 费米系统也遵循全同性原理.

(3) 玻尔兹曼系统. 在某些特殊情形下,可通过粒子的空间位置来区分它们(如固体中格点上的原子或离子),这样的系统也称之为定域子系统. 也就是说,定域子可以编号,即交换任意两个粒子可构成系统新的微观状态.

根据三种系统的统计性质,通过表 1-1 可以给出玻色系统、费米系统和玻尔兹曼系统的可能分布方式.

表 1-1 三个单粒子态的二粒子系统之微观状态分布

	单粒子态 1	单粒子态 2	单粒子态 3
玻色系统	A A		
		A A	
			A A
	A	A	
		A	A
	A		A
费米系统	A	A	
		A	A
	A		A
玻尔兹曼系统	A B		
		A B	
			A B
	A	B	
	B	A	
		A	B
		B	A
	A		B
	B		A

由表可见,具有 3 个单粒子态的二粒子玻色系统可能的微观状态数是 6;费米系统可能的微观状态数是 3;玻尔兹曼系统可能的微观状态数是 9.

例 1-4(原题 1.7) 一质点按照

$$x = \sin(\omega t + \varphi)$$

的规律振动,若偶然测量其位置,试求在 $x \sim x+\mathrm{d}x$ 这一间隔内发现质点的概率 $\mathrm{d}W$.

解 从质点的运动方程可以看到,质点做周期性运动,运动周期为 T. 假设质点通过距离 $\mathrm{d}x$ 所需时间为 $\mathrm{d}t$,单位间隔内质点出现的概率为 $\rho(x)$,则可将在 $x \sim x+\mathrm{d}x$ 间隔内发现质点的概率 $\mathrm{d}W$ 表示成

$$\mathrm{d}W = \rho(x)\mathrm{d}x. \tag{1}$$