

超跨音速压气机文集

(第三辑)



国外航空编辑部

1977.3.

超跨音速压气机文集

(第 三 辑)

国外航空技术专题资料
超跨音速压气机文集
(第三辑)

•
国外航空编辑部
(北京市 1652 号信箱)

•
内部发行

1977 年 3 月 书号: (外) 076

目 录

叶栅可压缩流理论的评论	(1)
计及冲波和粘性影响的跨音速流绕叶栅的半经验算法	(20)
在跨音速范围内的叶栅流动	(38)
跨音速增压叶栅的性能	(69)
钝后缘叶型的跨音速二元叶栅实验	(86)
超音速叶型在叶栅上和压气机转子上性能的比较	(122)
二元超音速减速叶栅流的试验研究	(133)
超音速平面叶栅预备性试验风洞	(203)

叶栅可压缩流理论的评论

摘 要

首先评论了叶栅亚音速流计算的正问题解。现有的方法可分为：级数、叠代、矩阵及流线曲率等几类解。在最大速度为亚音速时，大多数的方法是成功的。然后又评论了设计问题的若干解，但其结果尚需进一步验证。纯超音速的叶栅流动，为数很少，处理也并不特别困难，但是目前最大的研究领域是涉及跨音速或混合状态流动。在亚音速与超音速同时存在的区域内，各种新的方法都是很有希望的。

前 言

压气机和涡轮叶片排的进口马赫数通常是处于高亚音速，因此，有关流经叶栅的高亚音速可压缩流的理论处理就事关紧要了。本文的相当一部分篇幅将着重于亚音速的正问题与设计问题方面。

随着风扇和压气机上广泛使用高转速，超音速进气马赫数也就成常事了。涡轮叶片排的出口气流也经常是超音速的，尤其是现代实际应用的蒸气涡轮，情况更是如此。因此，本文后一部分的内容是牵涉到叶栅内超音速和跨音速的流动分析。

亚音速气流计算的正问题

二元可压缩流的位流方程是

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = -\frac{1}{C^2} \left[\Phi_x^2 \Phi_{xx} + \Phi_y^2 \Phi_{yy} + 2\Phi_x \Phi_y \Phi_{xy} \right] \quad (1)$$

式中

$$C^2 = C_0^2 - \frac{1}{2}(\gamma - 1)(\Phi_x^2 + \Phi_y^2) \quad (2)$$

解此方程，目前还没有普遍有效的方法，为了求解上述方程，就需将不同叶栅按其结构分为三类：

- (a) 大稠度叶栅(例如：涡轮轮毂部分以及某些导向叶片叶栅)。
- (b) 避免出现局部高速的小稠度叶栅(例如某些风扇叶片)。
- (c) 介于两种极端情况之间的一般叶栅，包括大多数的压气机、风扇及涡轮叶栅。

小间距叶栅。这类叶栅的流动可以采用槽道流方法作近似分析。只要稠度不小于1.5，采用有限差分法或松弛法是简单可行的，尤其当备有高速数字计算机时。

早期，有关这类问题的解是由 Stanitz 和 Prian⁽¹⁾ (一种快速近似答案)，Huppert 和

¹ 括号里的数字指本文后面参考文献的顺序。

McGregor^[2] (是一种流管法, 其中假定流线曲率按线性变化), 以及由吴仲华和 Brown^[3] 作出来的。

吴仲华和 Brown 把方程 (1) 的右边项作为 x, y 的已知函数来处理, 这样就使方程线化。

按槽道流方法所得的一切解都有个共同的局限性, 也就是在临近前、后缘的地方不可能取得精确解, 并且, 对于轴流式压气机所用的叶片间距而言, 解的精确度是差的。

大间距叶栅。对于这类叶片, 无论在物理面或速度面上都适宜用线化法求解。

在物理面上的线化是通过对方程 (1) 作了一定的限制性假设后取得的。假设的主要内容是: 所有边界层梯度以及对进气速度矢量的扰动都是小的。随之在大弯度叶栅以及任意那一种叶栅靠近前、后缘的解中都将体现出误差来。尽管有这一方面的局限性以及由此会进一步得出某些近似值, 但是, 简易的第二 Prandtl-Glauert 法则还是出现了, 并且已被广泛地应用,

$$C_{pe} = C_{pinc} \sqrt{1 - M^2} \quad (3)$$

在德国 (指西德——译者) 更是如此。此外, Lakomy^[5] 最近提出, 如在 Prandtl-Glauert 法则上, 引进一项经验修正因子 (攻角的函数), 这样, 该法则就可应用于大多数常用叶栅。

由于在物理面上的线化会造成不精确, 以致限制了它的使用, 因此, 将考虑在速度面上采用更通用的线化法。为了使方程 (1) 线化, 又不忽略任何那一项, 就必需引进新的变量并把方程式变换到速度面。

令

$$q = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2} \quad (4)$$

及

$$\theta = \tan^{-1} v/u = \tan^{-1} \Phi_y/\Phi_x \quad (5)$$

就很容易得到以下的线性方程,

$$\Phi_\theta = (q/\rho) \Psi_\theta \quad (6)$$

$$\Phi_q = - \left(1 - q^2/c^2 \right) \frac{1}{\rho q} \Psi_q \quad (7)$$

为了取得更恰当的积分形式, 令

$$\Phi_\theta = \Psi_\lambda \frac{q \lambda'(q)}{\rho} \quad \text{及} \quad \Phi_\lambda = - \left(1 - q^2/c^2 \right) \frac{1}{\rho q \lambda(q)} \Psi_\lambda$$

$$\therefore \lambda'(q) = \frac{1}{q} (1 - q^2/c^2)^{1/2}, \quad \lambda = \int \frac{\sqrt{1 - q^2/c^2}}{q} dq$$

$$\therefore \Phi_\theta = I(\lambda) \Psi_\lambda \quad (8)$$

$$\Phi_\lambda = -I(\lambda) \Psi_\theta \quad (9)$$

式中

$$I(\lambda) = \frac{1}{\rho} \sqrt{1 - q^2/c^2}$$

如果是亚音速流, 上述变换是真实的。方程 (8) 及 (9) 仍然完全通用, 这里, 有关 γ 值并未作任何假设。

应当注意, 如果 $I(\lambda) = 1$, 就得到包含 θ 和 λ 的 Laplace 方程。现在, 就可以来选定对应于想要研究的流动状态的马赫数。Von Kármán 和钱学森选择这个马赫数, 以及使那个气体的直线关系线与气体实际的关系线相切的点以能与自由流状态相对应。虽然, 某些工作者愿意采

用平均流动马赫数,但是,作为叶栅的恰当的基准是进气马赫数。另一种可能是对应上、下游流态同时安排相交点。

在已经选定了压力容积的线性关系后,就有可能把下列的可压流方程(10)与相当的不可压流方程(11)联系起来。

$$\Phi_\theta = \Psi_\lambda \quad (10)$$

$$\text{及} \quad \Phi_\lambda = -\Psi_\theta \quad (11)$$

并且由此决定可压流与不可压流压力系数之间的关系。

这一关系式已由 Von Kármán^[6]和钱学森^[7]给出

$$C_{pc} = \frac{C_{pinc}}{\sqrt{1-M^2} + \sqrt{1-M^2+1} \cdot \frac{C_{pinc}}{2}} \quad (12)$$

虽然,现时尚没有严格的检验,但 Kuo和Sears^[8]的论据认为对于薄叶型,这类方法会得出可靠的结果。

话题再回到方程(8)与(9),它们是和方程(1)具有同样的通用性,可以消去这些方程中的 Φ 项

$$l(\lambda)\nabla\Psi + l'(\lambda)\Psi_\lambda = 0 \quad (13)$$

式中

$$l'(\lambda) = dl/d\lambda \quad \text{及} \quad \nabla = \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \quad (14)$$

定义

$$\Psi = \sqrt{l} \psi$$

我们得到

$$\nabla\Psi = L(\lambda)\Psi_\lambda \quad (15)$$

式中

$$L(\lambda) = \frac{\nabla\sqrt{l}}{\sqrt{l}} \quad (16)$$

方程(13)*曾被 Chapygin^[9], Von Mises^[10], Bergman^[11]和 Bers^[12]用于求可压流方程的解。

一般叶栅

鉴于对叶栅间距处于极端状态的可压流可以用理论简化使方程解简单,所以不论是槽道流法,或者是线化法,对大多数叶栅都不可行。通常,有四种基本方法可采纳。根据早期研究工作的结果,解可以展开成级数形式,可以采用定点的反复迭代,并以算术来确定收敛度的计算;最近,又成功地使用了矩阵和流线曲率解等。

一般叶栅的级数解

由于线化的精确度不够,于是就不打算用级数解来变换成速度面或改变气体定律的形

* 原文为方程(24),与内容不符,应改为方程(13)——译者。

式。在Poggi^[13]以及Janzen^[14]和Rayleigh^[15]所给的方法中都是直接使用方程(1)。在这两种方法中,用以下的级数形式使方程(1),变换成可积分的形式,

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 M^2 + \Phi_2 M^4 + \dots + \Phi_n M^{2n} \quad (17)$$

马赫数可以是任意参考值,但通常是采用进气自由流的马赫数。Poggi把可压流看作是物体外部区域内布有连续点泉的不可压流。如果,在方程(17)中, Φ_0 是由 $\nabla\Phi_0 = 0$ 所得的一类已知的不可压流动,那末,依次计算 $\nabla\Phi_1 = f_1(\Phi_0, x, y)$, $\nabla\Phi_2 = f_2(\Phi_0, \Phi_1, x, y)$ 等就得到 Φ ,这里 f_1 和 f_2 是从方程(1)得到的函数。

Poggi的方法又经Kaplan改进,他引进了Milne Thompson^[17]的共轭复合符号,

$$\omega\bar{u} = (-u + iv)(-u - iv) = u^2 + v^2 \quad (18)$$

并得到

$$\nabla\Phi_0 = 0 \quad (19)$$

$$\nabla\Phi_1 = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial\Phi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\omega_0 \bar{\omega}_0}{u^2} \right) + \frac{\partial\Phi_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\omega_0 \bar{\omega}_0}{u^2} \right) \right] \quad (20)$$

$\nabla\Phi_2$, $\nabla\Phi_3$ 等均类似。

于是Kaplan就有可能把右侧项和一种泉潭分布的连续近似解相联系起来,将扰体保角变换成圆以及泉外圆内已知的映象系统的同时,Kaplan采用沿周界积分来表示所有的速度。如果积分采取解析的形式,则可压流的预测精确度仅仅为所取项的数目所限制。

Prince^[18]最近已经采用了Janzen-Rayleigh方法,只是用流函数取代了^[17]的位函数,以简化边界条件的满足问题。

Prince仅仅考虑了第一项

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 M^2 \quad (21)$$

但允许 Ψ_1 是马赫数的函数。利用三个流函数分量就可以确定流场:

(a) 不可压流解, Ψ_0

(b) 一项低马赫数可压缩性的干扰, Ψ_1 以及

(c) 一项迭代解 Ψ_2 ,是在某一高亚音速参考马赫数 M_{REF} 下可压缩性的干扰。把(b)、(c)分量间的差值作为Janzen-Rayleigh理论的 M^4 项分量来处理,就得到对另一个参数马赫数采用的组合解,即:

$$\Psi = \Psi_0 + M_\infty^2 \left\{ \Psi_1 + \frac{M_\infty^2}{M_{REF}^2} (\Psi_2 - \Psi_1) \right\} \quad (22)$$

只要控制压力分布的决定性因素是流线曲率所造成的横向压力梯度而不是一元的面积变化,那么在当地马赫数高达1.1时,看来,上述的方法是可以得出合理的近似值的。

在上游参考马赫数为0.6时,利用可压缩性干扰的计算可以很方便地处置叶栅的可压缩性效应。

图1指的是在使用了如Prince这类方法后的一个典型的可能改进的实例。原始的NACA65系叶片由于冲波存在,损失就严重。经修改后的叶片是略微加大了弦长,并使喉部区具有较小的曲率。分析结果表明,在这种新叶片上任何地方均未达到音速。

一般叶栅的叠代解

方程(1)右侧可以叶型周围的用不可压流场内布上点——潭来模拟。这种方法的基本概念与Poggi方法的区别在于：Poggi、Janzen 和 Rayleigh 理论是将方程(1)右侧展开成为一个马赫数的幂级数；而这种方法是保持方程右侧原封不动，对基本流动采用叠代步骤来运算。

此刻

$$\Phi_x^2 \Phi_{xx} + \Phi_y^2 \Phi_{yy} + 2\Phi_x \Phi_y \Phi_{xy} = -\frac{C^2}{\rho_0} \left(\Phi_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \Phi_y \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \quad (23)$$

可以从下式求得密度梯度

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{-\frac{1}{\gamma-1}} \quad (24)$$

如果每单位面积点泉的分布是S，并且 $\gamma=1.4$ ，那末

$$S = -\frac{M_1^2}{2} \left[1 + \frac{M_1^2}{5} \left(\frac{u^2 + v^2}{U_1^2} \right) \right]^{-\frac{7}{2}} \left[\left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \times \left(\frac{u^2 + v^2}{U_1^2} \right) \right] \quad (25)$$

处理程序是这样的，就是首先从不可压流的解取得对应于方程(1)右侧的点泉分布。然后就以此得出以下方程形式

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = f(x, y) \quad (26)$$

此刻，由于点泉S在(x, y)处占据了面积($\delta x \times \delta y$)，如图2所示，任意点(x, y)沿x方向的速度分量由下式给定

$$u'_i = \frac{S \delta x \delta y (x_i - x)}{2\pi((x_i - x)^2 + (y_i - y)^2)} \quad (27)$$

并且，也由同样方法取得 v'_i 。

由于所有这类点泉的影响， (x_i, y_i) 点的合速是

$$u'_i = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(x_i - x) dx dy}{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} \quad (28)$$

对待 v'_i 也同样如此。

但是，这种附加的速度是不完整的，因为采取这种形式，最后的解不会向原始边界的绕流收敛。通常，纯粹的诱导速度在物体表面的法向会有一个分量。安排在物体周围的点泉线必须能做到抵消法向分量。点泉线应当能精确地去充分消除所有的法向速度，并以类似于处

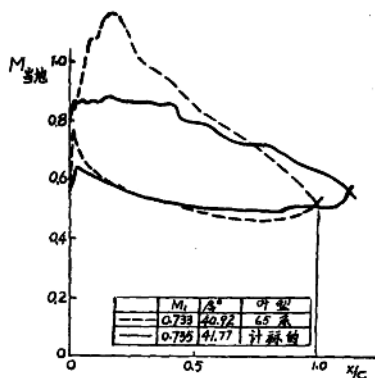


图1 经可压流计算后改善的叶片压力分布

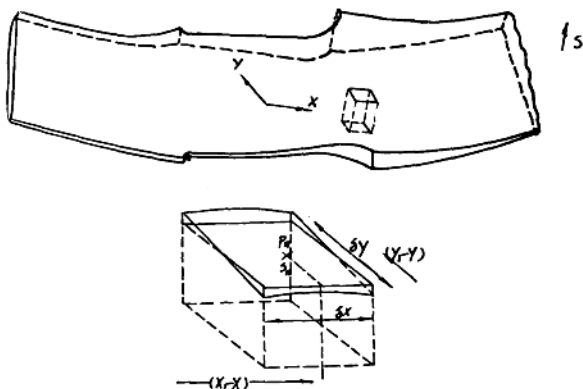


图2 点泉强度沿叶片槽道的变化

理相当于密度变化的点泉方式而归入流动方程。

然后,就把 u' 和 v' 当作对原始速度的干扰来处理,因此就建立了新的流动。以后,又以同样基础来处理这个新的流动。反复进行这一步骤,直到收敛为止。

上面所述是基于Martensen^[19]位流理论的简化形式,是由Imbach^[20]和Price^[21]提出的,他们建议采取一串点泉来抵消法向速度分量。Imbach采用涡和点泉的边界条件,导出两个积分方程,该方程可用逐次近似法来求解。

值得注意的是:如果采用二项定理的方法展开(25)式,则其所得的级数与Poggi方法所得的相同。此外,如果引用Kaplan所采用的复合符号,说明就可以简化。这项工作已由Payne^[22]应用同一个Martensen理论作为基础后予以完成了。

遗憾的是,当接近音速时,迭代法收敛缓慢。这是因为由方程(25)提供的点泉分布并非一个小的扰动。在逼近过程中,主要的压缩性项会作尾项的一环给舍掉了。

矩 阵 解

矩阵解是由Smith^[23]发展的,他还派生一个Poisson型的微分方程。然后用十点的有限差分法就可以解。选择一组矩阵解是因为在数值上比松弛法更为有效、更为稳定,松弛法过份依赖于使用者输入“超松弛”因子。假定选定一种弛张法,那么,当马赫数接近音速时,那里应取得较强的低松弛。

当采用逼近步骤时,采取逐级增加进气马赫数以达所要求值的做法是好的。

Smith^[23]提议密度的计算应当允许在经一次逼近的流函数计算之后,这样能增加可压流计算的稳定。这一推荐是与Silvester和Fitch的推理相矛盾的,他们俩人把密度梯度表示为应变变量,并且按这样一种方式将这些变量集中在一起,这种方法不需要先验或猜测地来规定密度的导数。Smith方法无疑是可靠的,而且如图3所证实,表面马赫数直至0.85,这方法确实是充分的。局部的音速状态已经不难处理了。

一般叶栅的流线曲率解

在这一领域内，最近出现了强有力的Katsanis^[25]、Wilkinson^[26]及Stuart^[27]等方法。这些方法所要解决的似乎是工作效率问题，以及考虑临界速度以上的问题。这些方法首创使用流线及“拟正交线”，所谓“拟正交线”是指沿任意方向（通常是栅距方向）的自槽道某一壁到另一壁的简单连线。有些人愿意对跨音速叶栅全部换成使用正交网格，看来也是适当的。

文献^[25]对最新的Katsanis方法作了说明，也给出了全套的Fortran计算表，程序是通用的，适用于拟三元流、损失、旋转和混合流动。解是以有限差分法为基础，并保持在跨音速时流线曲率不变。Wilkinson程序可算是通用化且较为有效的了。在一台370—165计算机上，估计相当的运算时间是10秒。与精确解相比之后，了解到在叶片边缘附近，所得的结果是值得怀疑的。

罗耳斯·罗伊斯公司采用了由Stuart所提出的新方法。这种程序可以达到与Wilkinson程序同样程度的快速，并且已被归入包括附面层计算的完整的正/反设计体系，在最新的体系中程序采用完全的正交网格。Bindon和Carmichael方法^[28]同样也采用一个正交网格，但是，这种程序要比Wilkinson及Stuart程序的速度慢十倍。

在一个典型的流线曲率程序中，输入数据经两次微分，并且将所得的数值用到速度梯度方程中。开始是利用前一次逼近所得的沿中间流线的速度近似值。然后，在两个方向上用数字积分求出叶片表面速度。速度的大小再进行调整以满足连续性。

为了保证快速收敛，必需选用适当的衰减因子。速度梯度的变化看来是一个敏感的收敛准则，并且在逼近过程中乘以小于1的因子以防止发散。

流线曲率法不够理想的地方是在临近叶片边缘处不能给出精确的位流解。在叶片端部滞止流线有个不能恰当地表示的直角形拐结，因此，在速度分布上就一定出现误差。

为了估计由三种流线曲率法程序所产生的这一类误差数值的大小，会同Smith矩阵法所得的结果，一起在图3上作了比较。

理想上是希望针对流动性能已确切了解的某一类叶栅来做这种比较。就不可压流解方面，本文作者已进行过这一步骤（参考29）。遗憾的是，对于高速叶栅，这类解并不存在。但是，这四种算法已被Whitney等人用于推测气冷涡轮试验中静子平均截面周围的速度分布^[30]，并且是有可能做一下有益的比较的。

总的印象是这四种方法都给出了满意的精度。在叶盆上大部分是相当吻合的；对于高马赫数的叶背面虽然Katsanis法多处表现出不如意的倾向，但情况也是很好的。看来，Stuart法可以做到处处都具有良好的精度。其他三种方法在叶片边缘区都碰到困难，不是加一个无用的速度最大值（Katsanis和Smith），就是不能预测出真正的速度最大值（Wilkinson）。应当指出，确定叶片边缘方面所存在的问题并非仅仅是流线曲率法才有；采用有限差分法也能遇到这类困难。

除了所采用的四种方法可以确保顺利外，如果只是就中等速度且具有合理的大稠度而言，那么，所选定的试验情况也就不是属于特别困难的，对于这类情况，可以设想，如以往还有其他方法的话，预料其吻合状况也会是合理的。因此，评论者认为，除了对叶片边缘区应当继续做工作以求其良好的精确度外，亚音速流动的正问题基本上算是解决了。

亚音速流动反问题的计算

作为解决设计问题最受欢迎的两种方法都需要变换到势平面 ($\omega = \phi + i\psi$) 或速度面上。虽然 Murugesan 及 Raily^[31] 的不可压流方法应当能够概括可压流的问题, 但是, 反问题所提出的可压流解没有一个是单纯地在物理面 ($z = x + iy$) 工作的。

势平面的解

势平面 ($\omega = \phi + i\psi$) 上的解通常利用在 (8), (9) 式中选择 $l(\lambda) = 1$ 所获得的线化方程。Costello^[32] 已经给出一种在可压位流中具有规定速度分布的叶栅叶片设计方法。速度分布是用以选定一种绕单位圆的, 恰当的不可压位流。然后, 用 Lin^[33] 变换法将此不可压流变换成绕叶栅的线性可压流。遗憾的是这规定的速度分布的条件是相当严格的。

广泛应用的近似设计方法是 Stanitz^[34] 法。因为速度分布是规定的, 控制方程组可用位函数及流函数来表示。物理面上 ($z = x + iy$) 的叶片表面是流线, 因此也是势平面上的等 ψ 线。在参考文献^[30] 中, 连续和无旋条件被写成

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \log \rho}{\partial \phi} + \frac{\partial \log q}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial \theta}{\partial \psi} = 0 \quad (29)$$

$$-\frac{\rho \log q}{\partial \psi} - \frac{\partial \theta}{\partial \phi} = 0 \quad (30)$$

将 (29) 和 (30) 式分别对 ϕ 和 ψ 微分联立解, 消去 $\partial^2 \theta / \partial \phi \partial \psi$ 项, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log \rho}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \log q}{\partial \phi^2} - \frac{\partial \log \rho}{\partial \phi} \left(\frac{\partial \log \rho}{\partial \phi} + \frac{\partial \log q}{\partial \phi} \right) \\ + \rho^2 \frac{\partial \log q}{\partial \psi} - \frac{\partial \log \rho}{\partial \psi} + \rho^2 \frac{\partial^2 \log q}{\partial \psi^2} = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

方程 (24) 和 (31) 可以充分决定势平面上 $\log q$ 的分布。方程 (31) 可用松弛法、矩阵法、或 Green 函数法来解。在求得沿叶片槽道的 $\log q$ 后, 保持 ψ 不变, 通过积分方程 (30), 就可以得到沿流线 (也就是叶片表面) 的气流角的分布 $\theta(\phi, \psi)$ 。同样, 保持 ϕ 不变, 通过积分方程 (29), 沿每一条位线的气流角也可以找到。

下面就是很简单的问题了, 利用几何关系

$$dx = ds \cos \theta \quad (32)$$

$$dy = ds \sin \theta \quad (33)$$

并根据流函数与位函数的定义

$$d\psi = \rho q dn \quad (34)$$

$$d\phi = q ds \quad (35)$$

通过自前缘的积分, 就得到物理面的叶片形状

$$x = \int_r \frac{\cos \theta}{q} d\phi \quad (36)$$

$$y = \int_r \frac{\sin \theta}{q} d\phi \quad (37)$$

这一方法主要被 Stanitz 应用于槽道流, 或者是假定等熵的线性的压力——密度关系, 或者没有这个简化假定。参考文献^[35]的例题证明, 对应于 γ 值为 1.4 及 -1, 计算所得的几何差值极小 (图 4)。Stanitz 法的 Green 函数解已经由 Payne^[22] 作了进一步发展, 并且被广泛地应用于英国工业界。

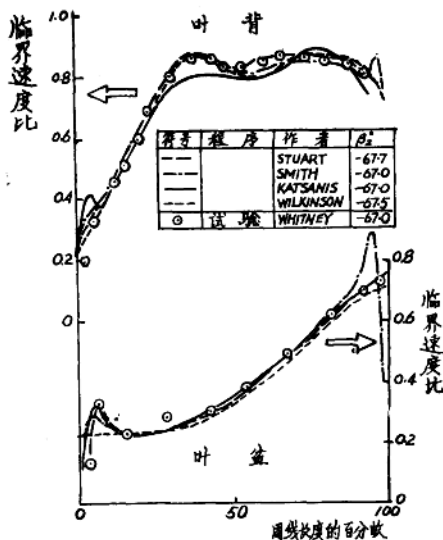


图 3 可压流理论与试验的比较

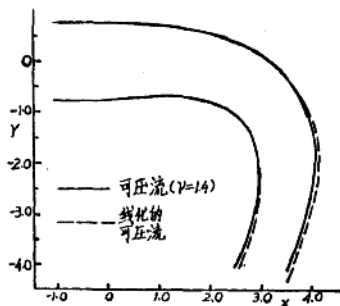


图 4 γ 的变化对 Stanitz 结果的影响

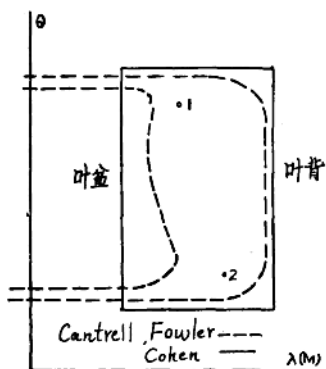


图 5 Cohen、Cantrell 和 Fowler 流动的速度图示意

速度面上的解

冲击式涡轮叶片的不可压绕流的速度面表示已由 Cantrell 和 Fowler^[38] 给出。并在图 5 上示意说明。

Uenishi^[37] 将此解推广到可压流, 并且, 对于在中等亚音速的冲击式和反力式涡轮的多种叶片的理论和试验之间取得了相当吻合的结果。Uenishi 确证图 4 的结论, 并且得到最大的闭合误差为弦长的 0.6%。

法国在速度面方面的进展已由 Legendre^[38] 作了介绍。

对于可压流, 采用速度面有很多优点。尤其是与流函数与位函数有联系的方程 (8, 9), 在速度面上变成了线性。

记住 $\theta = \tan^{-1} v/u$ 以及 $d\lambda = \sqrt{1-M^2} \frac{dq}{q}$, 就可引入对数——速度面 $F = \lambda + i\theta$ 。

Cohen(39) 就是在这种面上, 用矩形表示一个叶片槽道, 求得了有意义的设计解。这种闭合图形不允许有通常的前、后缘奇点。图 5 中实线表示带有尖头叶片的 Cohen 流线。

如果 $F = \lambda + i\theta$ 经保角变换成为改型的对数——速度面 $F_m = \lambda_m + i\theta_m$, 那末, 方程(8)和(9)的形式不变, 但它们所表示的流场是属于保角变换了的, 即:

$$\phi_{\theta m} = I(\lambda_m, \theta_m) \psi_{\lambda m} \quad (38)$$

$$\phi_{\lambda m} = -I(\lambda_m, \theta_m) \psi_{\theta m} \quad (39)$$

采用复合的共轭符号后, Cohen 证明方程(8)和(9)可以改写成以下形式

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial F \partial \bar{F}} = -1/2 \frac{\partial \ln I}{\partial F} \cdot \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{F}} \quad (40)$$

在解第 $(n+1)$ 次近似值 ω_n 时, Cohen 对方程(40)采用逼近步骤, 微分方程就写成

$$\frac{\partial^2 \omega_n}{\partial F \partial \bar{F}} = -1/2 \frac{\partial \ln I}{\partial F} \cdot \frac{\partial \bar{\omega}_{n-1}}{\partial \bar{F}} \quad (41)$$

Cohen 取不可压流的解作为他的第一次近似值 ω_0 。对于第二次近似值, 他作了以下处理: 因为 $\omega_0(F)$ 是可解析的(按现有的不可压流理论结果)

$$\frac{\partial \bar{\omega}_0}{\partial \lambda} = \frac{\partial \bar{\omega}_0}{\partial \bar{F}} \quad (42)$$

现取 $n=1$ 方程(41), 沿等 θ 线先对于 F 积分, 再对 $\bar{F}$ 积分, 则得:

$$\omega_1 = f_2(F) + \int f_1(\bar{F}) d\bar{F} + 1/2 \int \ln I \frac{d\bar{\omega}_0}{d\bar{F}} \quad (43)$$

任意函数 $f_1(\bar{F})$ 和 $f_2(F)$ 是从以下考虑来决定的:

如果 $l \rightarrow 1$, 即在较低的亚音速范围, $\omega_1 \rightarrow \omega_0$ 且 $\ln I \rightarrow 0$, 因此, 在(43)中

$$f_2(F) = \omega_0 \quad \text{和} \quad \int f_1(\bar{F}) d\bar{F} = 0$$

这样第二次近似值 ω_1 由下式得出

$$\omega = \omega_0 + 1/2 \int \ln I \frac{\partial \bar{\omega}_0}{\partial \bar{F}} d\bar{F} \quad (44)$$

因为方程(42)仅用于 $n=1$, 所以上述的过程不能用来给出解析的结果。但是, Cohen 毕竟是着手给出了有用的较高的近似值。正如大多数的设计过程一样, 此论据是属于启发式的。后缘闭合条件的满足是判别逼近过程成败的最好标志。

Cohen 指出, 对于高亚音速叶栅叶型达到了良好的闭合。但是, Payne⁽²³⁾ 发现应当十分谨慎地去解释这些结果。通过对 Cohen 级数更全面的推导, Payne 已经指出, 使 Cohen 的较高的近似值有望得到可压流的精确解的唯一的解析函数 $\omega_0(F)$, 由泉一润的组合式给出

$$\frac{d\omega_0}{dF} = A + iB \quad (45)$$

这里 A 和 B 是任意常数。

正因为 Cohen 是选择有等速表面的叶型作为考查对象——这是有争论的观点即“优秀的叶型设计应将出现反压梯度的位置沿叶弦方向推到愈往后愈好”, 这一点是有重要意义的。

Cohen 提到, 以如此方式选定速度, 并不失掉普遍原则。但是, Payne 已经指出, 在等速壁面的同心半径间的自由涡流精确结果会自然给出。

因此, Cohen 的考查对象所以会有良好的闭合是毫不奇怪的。事情很清楚, 需要对此方法作更全面的验证。如果 Cohen 理论经受更严格的考验, 这是很有用的。

超音速气流计算

纯超音速的场合就采用特征线法。“特征”的词意就是指任何双曲线方程的真实解而言。这种解是采用图线形式, 沿着这类线查照就可得到数据。就垂直于这些曲线导出的应变变量而言, 是得不到数据的。

原始数据(或边界条件)将沿着一条通常不是特征线的曲线给出。这一曲线可由一系列直线来近似替代。“三角形”的特征线网以及它们的特征关系是用一种由给定曲线向外做工作的切实方法建立起来的。

在 Shapiro^[40]、Courant 和 Friedrichs^[41] 的权威性著作中已经完美地阐述了这一方法。以下篇幅, 准备就它在压气机叶栅、冲击式和反力式涡轮叶栅中的实用问题作一简短研究。

压气机叶栅

在叶片周围出现相当范围的纯超音速流之前, 压气机叶排的进口马赫数是要十分高的(通常, 至少在 1.5)。现在的某些风扇转子叶尖部分的整个叶背表面和大部分叶盆都呈现超音速。这种场合就需采用特征线法分析以求得最佳设计。

这种方法不算特别新颖。1951 年, Costilow^[42] 用手算就已经能够利用此法设计超音速导风轮的叶尖部分。

有意义的新用途还包括高性能的离心式压气机的径向扩压器叶栅的分析。Kenny^[43] 指明了一种相当复杂的结构, 他假定: 一对尖前缘的叶片排前有一束均匀的周期的泉/涡流。在进口喉部处出现一道槽道强正冲波。

冲击式叶栅

纯超音速冲击叶栅的用途是相当广泛的, 应用已很自然地盛行起来。对于装在船只后部的海上动力装置以及火箭泵上的设计师们的高负荷涡轮级, 暂时还采用高压比的。旧的利用亚音速环形叶栅数据的外推法, 显然会造成设计不好, 在恰当地确定槽道几何形状方面, 是需要做工作的。

这类叶栅在槽道的主要部位采取超音速自由涡流动, 同时应用了由 Busemann^[44] 导出的涡网格。由于这类流动的流线是同心圆, 故问题是设计一个合适的进气和排气过渡区。如果叶片边缘是尖的, 超音速流的图形将如图 6 所示。I 区的气流与远前方的气流一样。II 区内, 气流经由凸形转接弧所生成的波而膨胀; 在 III 区内, 气流经过凹形转接弧所生成的压缩波而压缩了。在 IV 区内, 就建立了理想的超音速自由涡流图形。所以问题是采用特征线法来设计恰当的转接弧。这方面的说明已在参考文献



图 6 超音速有旋流动的冲击式槽道设计

献^[45]发表。

对于上述的过程, Stratford 和 Sansome^[46] 给出过一个非常简单的早期的例子, Coldman 和 Scullin^[47] 针对图6所示的实例已经发表一个计算机程序, 它包括了附面层位移厚度的影响。

涡轮叶栅

通常, 对于超音速混合流场, 将流场划分成几个明显的区域, 这种做法是合理的。如果是超临界涡轮导向器或亚音速进气的其他叶片, 那么都会存在着一确定的音速线, 因而新的超音速计算就可以从这里开始。参考文献^[48,49] 记载了这一过程的完美应用。

尤其是对于蒸气涡轮转子的叶尖部分, 由于它的进、出口均属超音速, 这种情况就显得有重要意义。Lawaczeck^[50] 对这类流动划分成各种类型的流动图画。这主要取决于流动是否出现阻塞现象。以超音速轴向出口速度的这类叶栅, 它的解的型式已由 Lichtfuss 和 Starcken^[51] 在最近发表。在进口区, 流动是无旋和等熵的。在进口区的气流中(图7)具有来自上游的一组简单的马赫波。波是直线的, 而且沿波的流动状态不变。

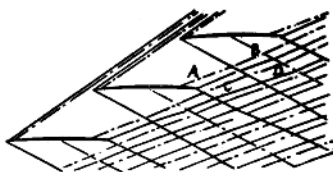


图7 小转角的涡轮叶栅, $M_1 = 2.1$ 及 $M_2 = 2.43$ (参考文献^[51])

在超音速流动中, 扰动是沿马赫波传播的。这类波分为 I、II 两组, 分别与气流方向成 $\pm\mu$, 如图8所示。

以 II 组为例, 跨过马赫线后, 其速度矢量 q 的大小改变 δq , 其方向改变 $\delta\theta$, 此刻, 跨过马赫波后的切向动量是不变的。

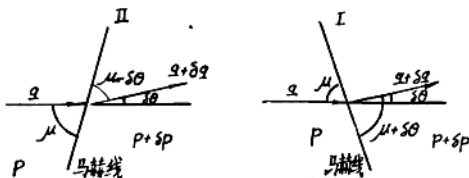


图8 沿马赫波扰动的传播

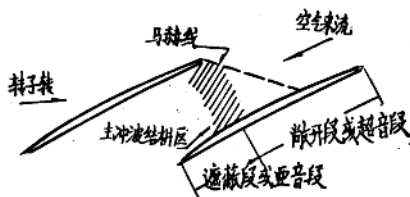


图9 典型的跨音速压气机转子槽道

$$q \cos \mu = (q + \delta q) \cos(\mu - \delta \theta) \quad (46)$$

和

$$\frac{1}{q} \frac{dq}{d\theta} = -\tan \mu = -\frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad (47)$$

因为, 从绝热关系

$$\frac{q}{\sqrt{T}} = \frac{M \sqrt{\gamma R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right) M^2}} \quad (48)$$

其中 T 是常数, 人们就得:

$$\frac{dq}{q} = \frac{dM^2}{2M^2 \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right) M^2 \right]} \quad (49)$$

因此

$$d\theta = \frac{-\sqrt{M^2 - 1} dM}{M \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right) \frac{M^2}{2} \right]} \quad (50)$$

将此沿流线积分就得出

$$\theta + \omega(M) = \text{常} \quad (51)$$

式中

$$\omega(M) = -\sqrt{\left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\right)} \tan^{-1} \sqrt{\left[\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right)(M^2 - 1)\right]} + \tan^{-1} \sqrt{M^2 - 1} \quad (52)$$

即为 Prandtl-Meyer 膨胀角。

ω 具有这样的意义, 它表示从音速条件加速到所需的马赫数气流所需的转角。

只要这一区(图 7 上以 A 表示)流动确定, 就可计算下一个 B 区。这一区域不是简单波的流动, 就应当采用特征线法。在整个 B 遮蔽区, 后缘两边的气流角与马赫数是已知的。从这些数据着手, 运用冲波关系就可以确定排气边发出的两道冲波的斜度(在参考文献(50)中, 假设后缘是尖的)。在求得冲波的数据后, 这两冲波之间的 C 区, 就可着手处理了。因为这一束波是上游直接生成的, 故该区就属于简单波流动。但是, 对于 D 区, 就不是这种情况了, 这里就必需再次采用特征线法。

由于整个下游区都被由叶片发出的波组所笼罩, 所以反压是固定的, 并且任凭下游的气门位置改变仍不可能变化。

跨音速流动计算

二元叶栅的跨音速流动是指这样一种流动, 它的流动图是超音速(或者是交替出现, 或正好是音速)与亚音速区两者都存在。

跨音速无冲波流动

与前面所述的 Busemann 解相类似的情况是存在的, 从而就有可能去设计具有超音速区的叶型, 这种超音速区不是以冲波封底的。

这类解已由 Nieuwland^[62]提出, 他使自己的工作全部基于可压流方程, 并且演变出一种方法, 借此就可推导出叶型来。在这种叶型上, 波是在音速线处反射, 而不发展成冲波。