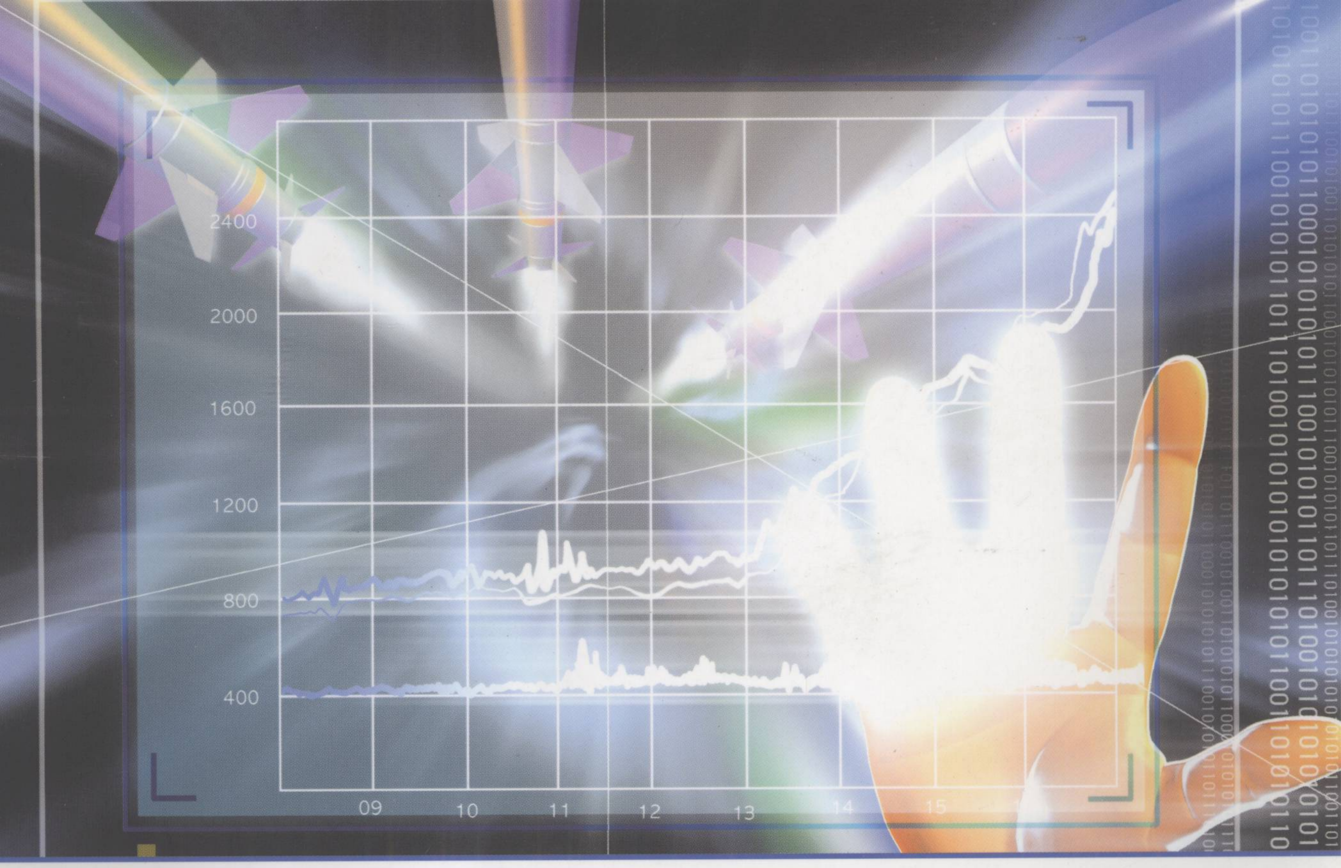

概率论与数理统计

GAILVLUNYUSHULITONGJI

高职高专公共课教材

师义民 主 编
许勇周 丙 常 副主编

清华大学出版社

高职高专公共课教材

概率论与数理统计

师义民　主　编
许勇周　丙　常　副主编

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书共分 8 章，前 4 章介绍了概率论的基本概念、随机事件及其概率、一维和多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征以及大数定律与中心极限定理的内容。第 5～8 章介绍了数理统计学的有关知识，主要包括数理统计的基本概念、参数估计、假设检验和回归分析等。为了便于阐释和理解概率统计的基本知识，本书选编了适当难度的例题，各章均配有习题，并在书后给出了习题答案。

本书可作为高等职业学校、高等专科学校、成教学院和民办高校学生的使用教材，也可供工程技术人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/师义民主编；许勇周，丙常副主编. —北京：清华大学出版社，2008.7

ISBN 978-7-302-17839-2

Ⅰ. 概…　Ⅱ. ①师…　②许…　③丙…　Ⅲ. ①概率论—高等学校：技术学校—教材　②数理统计—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ. TP021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 084182 号

责任编辑：刘建龙　桑任松
封面设计：杨玉兰
版式设计：北京东方人华科技有限公司
责任印制：杨　艳
出版发行：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京国马印刷厂
经　销：全国新华书店
开　本：185×260　**印　张**：15.5　**字　数**：368 千字
版　次：2008 年 7 月第 1 版　　**印　次**：2008 年 7 月第 1 次印刷
印　数：1～4000
定　价：23.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177 转 3103　　产品编号：030036－01

前　言

随着科学技术的发展，概率论与数理统计已得到了广泛应用，它已成为高等学校大部分专业必修的一门基础课。本书根据教育部“高职高专教育概率论与数理统计课程教学基本要求”结合作者多年从事本学科教学和科研的体会编写而成，旨在培养学生掌握概率统计的基本思想和方法，提高分析问题和解决问题的能力。

本书以介绍概率论与数理统计的基本知识和方法为主，同时注意它的直观背景和实际意义，力求做到理论与实际相结合，为读者学习后续课程和实际应用，提供了必备的随机数学基础。全书从高职高专教育及工科类教学的特点出发，并考虑到随机数学的特点，力求做到深入浅出，易懂易学。为了便于读者学习，本书以适当的难度循序渐进地选编了一些教学例题，以培养学生对概率统计知识的应用能力。

本书的编写者均为从事概率论与数理统计教学多年的教师。第 1～4 章由师义民编写，第 5～7 章由许勇周编写，第 8 章和各章的习题与答案由丙常编写。李豪亮、胡俊梅和覃晓琼参加了部分工作。全书由师义民统稿、定稿。

限于水平，书中不足之处恳请读者批评指正。

编　者

目　录

第 1 章　随机事件及其概率

1.1　随 机 事 件

1.1.1　随机现象与随机试验

在自然界和人类活动中普遍存在着两类现象. 一类是在一定条件下必然发生的现象，称这类现象为必然现象或确定性现象. 譬如：

例 1.1　异性电荷相互吸引，同性电荷相互排斥.

例 1.2　向空中抛掷一个小球，必然往下落.

另一类现象则是在一定条件下可能发生也可能不发生的现象，具有不确定性. 对这种现象人们事先无法预知其结果. 譬如：

例 1.3　某篮球运动员投篮一次，其结果可能命中也可能不中.

例 1.4　上抛一枚均匀的硬币，落下后可能正面向上，也可能反面向上.

例 1.5　一批新产品投放市场，可能畅销也可能滞销.

例 1.6　在某公交车站上，某一固定的时刻候车的人数.

对于随机现象，在少数几次试验或观察中其结果无规律性，但通过长期观察或大量的重复试验可以看出，试验的结果呈现出一种规律性，这种规律性称为统计规律性，它是随机现象自身所具有的特征. 概率论是研究随机现象及其统计规律性的一门数学学科，它被广泛应用于自然科学、社会科学的许多领域.

为了深入研究随机现象，就必须在一定的条件下对它进行多次观察. 若把一次观察视为一次试验，观测到的结果就是试验结果. 概率论中把满足下列条件的试验称为随机试验.

(1)　试验可以在相同的条件下重复进行.

(2)　每次试验的可能结果不止一个，但试验的所有可能结果事先是明确的.

(3)　在试验结果揭晓前，无法预言会发生哪一个可能结果.

本书以后所指的试验若无特别声明，均指随机试验. 例如：

(1)　在一定的条件下进行射击练习，考虑中靶的环数.

(2)　掷一颗均匀的骰子，考虑出现的点数.

(3)　记录某汽车站某时段内候车的人数.

随机现象的表现，即随机试验的结果数学模型化，可用集合的概念描述. 例如，在掷硬币试验中，试验的结果有两个：“正面”和“反面”如果用 ω_1 表示结果为正面，ω_2 表示结果为反面，则可以用 $A_1=\{\omega_1\}$，$A_2=\{\omega_2\}$ 来表示试验结果. 再考虑射击练习的例子，

若以 ω_i 表示中靶的环数为 i, $i=1,2,\cdots 10$.则 $A_i=\{\omega_i\}$ 可以表示中靶的环数为 i 的结果. $A=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5,\omega_7,\omega_9\}$, $B=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6,\omega_8,\omega_{10}\}$ 分别表示中靶的环数为奇数和偶数.

1.1.2 随机事件与样本空间

在概率论中，随机事件的数学描述由以下定义给出.

定义 1.1 对于随机试验，把每一个可能出现的结果称为样本点，把某些样本点构成的集合称为随机事件，简称事件. 把单个样本点构成的集合称为基本事件. 把所有样本点构成的集合称为必然事件或样本空间，记为 Ω .

通常用 $A,B,C,\cdots$ 或 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 等大写字母表示随机事件. 为了以后运算封闭，规定不含任何元素的空集也为事件，称为不可能事件，用 $\varnothing$ 表示.

例 1.7 已知一批产品共 30 件，其中有正品 26 件、次品 4 件，从中随机取出 5 件. 则

A_i=“被取出的 5 件产品中恰好有 i 件次品”，i=0,1,2,3,4;

B=“被取出的 5 件产品中最多有 3 件次品”；

C=“被取出的 5 件产品中正品不超过 2 件”.

这些都是随机事件.

例 1.8 写出掷骰子试验的样本点、样本空间、基本事件、事件 A——出现偶数、事件 B——出现奇数.

解：用 ω_i 表示出现的点数为 i, $i=1,2,\cdots,6$；则 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$；基本事件 $A_i=\{\omega_i\}$；事件 $A=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}$, $B=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$.

例 1.9 从一批灯泡中任意抽取一个，测试其寿命(用 t 表示，$0\leqslant t<+\infty$)，其样本点有无穷多个(且不可数)，样本空间可简记为 $\Omega=\{t\mid 0\leqslant t<+\infty\}=[0,+\infty)$.

1.2 事件间的关系与运算

在概率论中，人们往往不仅要研究随机试验的一个事件，还要研究多个事件，而这些事件之间又有一定的联系. 为了表述事件间的联系，下面定义事件间的关系和运算.

1. 包含与相等

若事件 A 发生必导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

这里事件 A“发生”一词是指事件 A 所含的任一样本点出现. 例如掷骰子，称事件 A——出现偶数点发生，指在一次观察(一次投掷)中出现的点数为 2 或 4 或 6.

若事件 B 包含事件 A，同时事件 A 也包含事件 B，即 $A\subset B$ 和 $A\supset B$ 同时成立，则称

事件 A 与 B 相等，记为 $A=B$.

例如，从一副 52 张的扑克牌中任取 4 张，令事件 A 表示"取到至少有 3 张红桃"的事件；B 表示"取到至多有 1 张不是红桃"的事件. 显然 $A=B$. 两事件相等意味着它们由相同的样本点构成，在试验中必将同时发生. 对于任一事件 A，有 $\varnothing \subset A \subset \Omega$. 其中 $\varnothing \subset A$ 作为规定而引入.

2. 事件的和（或并）

"事件 A 与 B 至少发生一个"也是一个事件，称为 A 与 B 的和(或并)，记为 $A \cup B$.

和事件的概念可推广到有限个或可列多个事件的情形.一般地"$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少发生一个"也是一个事件，称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和(或并)事件，记作 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$，或简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$；而"可列多个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 至少发生一个"也是事件，称为可列多个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的和(或并)事件，记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. 因此，两事件 A 与 B 的和是指"事件 A 发生，或 B 发生，或 A 与 B 都发生".

在随机事件的讨论中，应特别注意一些关键词语，如"或者"、"同时"、"至少"，"至多"等，它们表述了不同的运算. 在随机事件的讨论中，应特别注意一些关键词语，如"或者"、"同时"、"至少"、"至多"等，它们表述了不同的运算.

3. 事件的积(或交)

"两事件 A 与 B 同时发生"是一个事件、称为事件 A 与 B 的积(或交)事件，记为 $A \cap B$ 或 AB. 类似事件的和、积事件的概念可推广到有限个或可列多个事件的情形，即若 n 个事件"$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生"，称为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积(或交)事件，记作 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$，简记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$；可列多个事件"$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时发生"也是一个事件，称为可列多个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的积(或交)事件，简记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

4. 事件的互斥(互不相容)

若两事件 A 与 B 不能同时发生，即满足 $A \cap B = \varnothing$，则称 A 与 B 是互斥(或互不相容)事件. 若两事件不互斥，则称为相容. 事件 A 与 B 互斥意味着它们没有公共的样本点. 当事件 A 与 B 互不相容时，可将它们的和 $A \cup B$ 记为"直和" $A+B$.

对于 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，若其中任意两个事件不能同时发生，即有

$$A_i A_j = \varnothing, \quad i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n$$

成立，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥. 对于无限可列多个事件，也可仿此建立两两互斥的概念.

5. 事件的差与逆(对立)

"事件 A 发生而 B 不发生"是一个事件，称为事件 A 与 B 的差，记为 $A-B$. 若事件 A 与 B 满足 $AB=\varnothing$，且 $A\cup B=\Omega$，则称事件 A 与 B 是对立(互逆)事件.事件 A 与 B 对立意味着它们无公有样本点，而所有样本点又恰好充满样本空间 Ω. A 的对立事件记为 $\overline{A}$. 两事件对立一定互斥，反之则不一定成立.

为了便于理解，人们把事件间的关系和运算用图形示意出来(见图 1.1)，这种图称为文氏图(Venn).

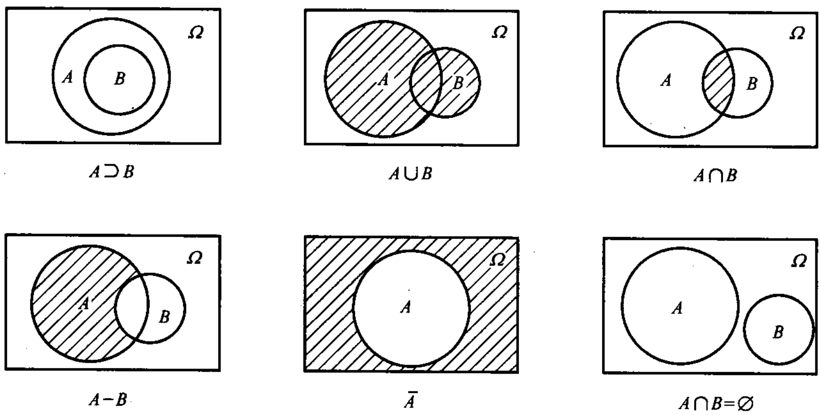

图 1.1 文氏图(Venn)

由上述定义可以推出，事件间具有以下基本关系：

(1) $A\overline{A}=\varnothing$，$A\cup\overline{A}=\Omega$；

(2) 若 $A\supset B$，则 $A\cup B=A$，$AB=B$；

(3) $\overline{\overline{A}}=A$，$A-B=A\overline{B}=A-AB$；

(4) $A\cup B=A\cup\overline{A}B=A\cup(B-A)$；

(5) $AB\subset A\subset A\cup B$，$AB\subset B\subset A\cup B$.

6. 完备事件组

若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足 $A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n$，且 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$，则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成了一个完备事件组，或称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是样本空间 Ω 的一个划分. 显然，A 和 $\overline{A}$ 构成了一个完备事件组.

由集合的运算规律，可以给出事件间的运算规律.设 A,B,C 是同一随机试验 E 中的三个随机事件. 则有以下定律：

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) 分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(4) 对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$；$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$，$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$，$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$.

对于上述运算律的证明，需用严格的集合论证明手法.

由于事件是集合，因而事件的运算即是集合运算. 表 1.1 给出了概率论中事件及其运算与集合论中集合及其运算的术语.

表 1.1　术语对照表

记　号	概 率 论	集 合 论
Ω	样本空间，必然事件	空间(全集)
$\varnothing$	不可能事件	空集
ω	样本点	元素
A	随机事件	子集
$\overline{A}$	事件 A 的对立事件	A 的补集
$A\subset B$	事件 A 发生必然导致事件 B 发生	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	A 集合与 B 集合相等
$A\cup B$	事件 A 与事件 B 的和	A 集合与 B 集合的并集
$A\cap B$	事件 A 与 B 的积事件	A 集合与 B 集合的交集
$A-B$	事件 A 与事件 B 的差	A 与 B 两集合的差集
$A\cap B=\varnothing$	事件 A 与 B 事件互不相容	A 与 B 两集合中没有相同的元素

例 1.10　设 A, B, C 为三个事件，则：

(1) A, B, C 都发生可表示为 ABC.

(2) A, B 发生而 C 不发生可表示为 $AB\overline{C}=AB-C$.

(3) A, B, C 都不发生可表示为 $\overline{ABC}$.

(4) A, B 中至少有一个发生而 C 不发生可表示为 $(A\cup B)\overline{C}=A\cup B-C$.

(5) A, B, C 中至少有一个发生可表示为 $A\cup B\cup C$.

或 $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC$.

(6) 事件 A, B, C 中至多有一个发生可表示为 $\overline{AB}C\cup\overline{A}B\overline{C}\cup A\overline{BC}\cup\overline{ABC}$.

例 1.11　将两颗均匀的骰子各掷一次，若以 (x,y) 表示其结果，其中 x 表示第一颗骰子出现的点数，y 表示第二颗骰子出现的点数，则样本空间为

$$\Omega=\{(x,y):x,y=1,2,3,4,5,6\}$$

若以 A,B,C,D 分别表示事件“点数之和等于 2”、“点数之和等于 5”、“点数之和超过 9”，“点数之和不小于 4 也不超过 6”. 则

$A=\{(1,1)\}$，$B=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$，$C=\{(4,6),(5,5),(6,4),(5,6),(6,5),(6,6)\}$；

$D=\{(1,3),(2,3),(3,1),(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$.

1.3 随机事件的概率

随机事件在一次试验中可能发生，也可能不发生，其结果往往事先无法预言. 但是，在做大量重复试验时，随机事件发生的可能性大小是客观存在的，是事件本身的固有属性. 对此，人们试图用一个数加以度量. 通俗地说，把度量事件 A 在试验中发生的可能性大小的数叫做概率，并记为 $P(A)$. 这样，较大的概率 $P(A)$预示着相应事件 A 发生的可能性较大；反之，则可能性较小.

对于给定的随机事件，如何定义和获得该事件发生的概率，通常与试验条件有关. 下面只给出在实际中用得较多的两个定义；概率的统计定义和古典概型定义. 至于几何定义与公理化定义本书不再涉及.

1.3.1 概率的统计定义

统计定义是以大量重复试验为前提的. 为此，首先引入频率的概念，它描述了事件发生的频繁程度. 进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率及其稳定性概念.

定义 1.2 在 N 次重复试验中，事件 A 发生的次数 M(频数)与试验次数 N 的比$\dfrac{M}{N}$，称为事件 A 的频率，并记为$f_N(A)$，即$f_N(A)=\dfrac{M}{N}$.

容易验证，频率$f_N(A)$具有如下性质：

(1) 对于任一事件 A，有 $0\leqslant f_N(A)\leqslant 1$.

(2) $f_N(\Omega)=1$，$f_N(\varnothing)=0$.

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件，则

$$f_N(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = f_N(A_1) + f_N(A_2) + \cdots + f_N(A_n)$$

实践表明，当试验次数 N 逐渐增大时，频率 $f_N(A)$虽然不尽相同，但却稳定在某个实数附近，这种性质称为频率的稳定性. 表 1.2 中给出了掷硬币试验的结果，其中 N 表示重复投掷次数，M 表示“正面朝上”(设为事件 A)出现的次数，$f_N(A)$表示 N 次试验中事件 A 出现的频率.

$f_N(A)$呈现出来的稳定趋势充分说明频率具有稳定性.

频率的稳定性为概率概念的量化提供了可行性途径. 所谓统计概型就是以大量重复试验为前提，以频率的稳定性事实为依据给概率以数量刻画的随机试验模型.

定义 1.3 (概率的统计定义) 在相同条件下重复进行 N 次随机试验，如果事件 A 的频率 $f_N(A)$随着试验次数 N 的增加而稳定地在某个常数 $p(0\leqslant p\leqslant 1)$ 附近摆动，则称 p 为事件 A 的概率，记为 $P(A)$.

由统计定义求得的概率简称为统计概率.

定义中的大量试验往往难以办到，实际操作时只是根据需要和可能，用一定数量试验下的频率作为频率的近似. 例如，在表 1.2 中给出的硬币投掷试验，由于当 N=500 时，频率出现了稳定的趋势，于是便可认定 $P(A)$=0.5.

表 1.2　均匀硬币在历次投掷中的频率表

试验号	N=5		N=50		N=500	
	M	$f_N(A)$	M	$f_N(A)$	M	$f_N(A)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.5	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1	25	0.5	253	0.506
5	2	0.4	21	0.42	246	0.492
6	4	0.8	18	0.36	244	0.488

在统计概型下，概率是作为频率的稳定值而引入的，因而，概率也应当具备频率的基本性质.

性质 1.1　(概率统计定义的性质)

(1)　对于任意事件 A，$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

(2)　$P(\Omega)=1$；$P(\varnothing)=0$.

(3)　若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

1.3.2　概率的古典定义

概率的统计定义直观地描述了事件发生的可能性大小，反映了概率的本质内容，但也有明显的不足，即在统计定义下求概率要求试验量很大，这在实际中往往很难办到，为此引入另一个常用概型——古典概型.

古典概型是古典概率模型的简称. 一般称具有下列两个特征的随机试验模型为古典概型.

(1)　随机试验只有有限个可能的结果，即有限个样本点(有限性).

(2)　每一个样本点发生的可能性相等(等可能性).

古典概型又称为等可能性概型. 在概率论产生和发展的过程中，它是最早的研究对象，在实际应用中它也是最常用的一种概率模型.

对于古典概型，以 $\Omega=\{\omega_1,\cdots,\omega_n\}$ 表示样本空间，$\omega_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 表示样本点，对于任

一随机事件 $A=\{\omega_{i1},\cdots,\omega_{in}\}$，下面给出古典概型的定义.

定义 1.4 (概率的古典概型定义)

对于给定的古典概型，若样本空间中有 n 个样本点，事件 A 含有 m 个样本点，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{事件}A\text{所含样本点的个数}}{\text{样本空间}\Omega\text{所含样本点的个数}} \tag{1.1}$$

显然，凡属古典概型的问题只需运用式(1.1)，并依据乘法原理或加法原理的思路，借助排列组合为工具，直接计算其概率. 由古典定义求得的概率简称为古典概率.

性质 1.2 (古典概率的性质)

(1) 对于任意事件 A，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

(2) $P(\Omega)=1$，$P(\varnothing)=0$.

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

例 1.12 某种产品共有 30 件，其中含正品 23 件，次品 7 件，从中任取 5 件. 试求被取出的 5 件中恰好有 2 件是次品的概率.

解：设 A=“被取出的 5 件中恰好有 2 件是次品”.由题设“从中任取 5 件”应理解为“一次取出 5 件”，故样本点总数 $n=C_{30}^5$. 事件 A 包含的样本点数 $m=C_7^2C_{23}^3$，则所求概率为

$$P(A)=\frac{C_7^2C_{23}^3}{C_{30}^5}=0.261\,0.$$

本例的一般情形为：某件产品共 N 件，其中含次品 M 件，从中任取 n 件，其中恰有 m 件次品(设为事件 A) 的概率为

$$P(A)=\frac{C_M^mC_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \tag{1.2}$$

式中 $m=0,2,\cdots,\min\{M,n\}$. 在概率论中式(1.2)被称为超几何公式.

例 1.13 某口袋中有 6 只球，其中 4 只白球，两只红球，从袋中取球两次，每次随机地取一只. 考虑两种取球方式.

① 第一次取一只球，观察其颜色后放回袋中，搅匀后再取一球. 这种取球方式叫做有放回取球.

② 第一次取一只球不放回袋中，第二次从剩余的球中再取一只球. 这种取球方式叫做无放回取球.

试分别就上面两种情况求：

(1) 取到的两只球都是白球的概率；

(2) 取到的两只球颜色相同的概率.

解：(1) 令 A_1 表示事件"取到的两只球都是白球"，则

有放回取球：$P(A_1)=\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{9}$

无放回取球：$P(A_1)=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

(2) 令 A_2 表示事件"取到的两只球颜色相同"，则

有放回取球：$P(A_2)=\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{5}{9}$

无放回取球：$P(A_2)=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{7}{15}$

例 1.14　将含有 3 名优秀生的 15 名学生平均地分成 5 人小组，求下列事件的概率：

(1) A：每个小组各有一名优秀生.

(2) B：3 名优秀生被分到一个小组.

(3) C：3 名优秀生中有 2 名被分到一个小组，另一名分到另一个小组.

解：15 名学生随机地分成 3 个 5 人小组所有不同的分法为 $\frac{15!}{5!5!5!}$，这是基本事件总数. 这些基本事件的发生是等可能的.

(1) A 的有利场合数：将 3 名优秀生分到 3 个小组，每人一组的分法总数为 3!；12 名其他学生分成 3 组，4 人一组的所有分法为 $\frac{12!}{4!4!4!}$，故 A 的有利场合数为 $3!\times\frac{12!}{4!4!4!}$. 于是，所求概率为 $P(A)=\frac{3!\times12!}{4!4!4!}\Big/\frac{15!}{5!5!5!}=\frac{25}{91}$.

(2) B 的有利场合数：将 12 名其他学生分成 2 人、5 人、5 人的 3 个小组的所有分法为 $\frac{12!}{2!5!5!}+\frac{12!}{5!2!5!}+\frac{12!}{5!5!2!}$，哪一组为 2 人，3 名优秀生就分到这个组，只有一种分法. 故 B 的有利场合数为 $3\times\frac{12!}{5!5!2!}$. 于是所求概率为 $P(B)=\frac{12!\times3}{2!5!5!}\Big/\frac{15!}{5!5!5!}=\frac{6}{91}$.

(3) C 的有利场合数：将 12 名其他学生分成 3 人、4 人、5 人的 3 个小组的所有分法为 $\frac{12!}{3!4!5!}\times3$，将 3 名优秀生分成 2 人、1 人的 2 个组有 C_3^2 种分法，对于每一种这样的分法将 2 名优秀生分到 3 人组的那个组里，将另一名优秀生分到 4 人组的那个组里，只有一种分法. 故 C 的有利场合数为 $\frac{12!}{3!4!5!}\times3!\times C_3^2$. 故所求概率为 $P(C)=\frac{12!\times3!\times C_3^2}{3!4!5!}\Big/\frac{15!}{5!5!5!}=\frac{60}{91}$.

例 1.15　有 n 个人，每个人都以同样的概率 $\frac{1}{N}$ 被分配在 N($n\leqslant N$)间房中的每一间中，试求下列各事件的概率：

(1) 某指定的 n 间房中各有一人.

(2) 恰有 n 间房，其中各有一人.

(3) 某指定的一间房中恰有 m ($m\leqslant n$) 人.

解：先求样本空间中所含样本点的个数.

首先，把 n 个人分到 N 间房中去共有 N^n 种分法；其次，求每种情形下事件所含的样本点个数.

(1) 某指定的 n 间房中各有一人，所含样本点的个数，即可能的分法为 $n!$.

(2) 恰有 n 间房中各有一人，所有可能的分法为 $C_N^n n!$.

(3) 某指定的一间房中恰有 m 人，可能的分法为 $C_n^m (N-1)^{n-m}$.

于是可以得到三种情形下事件的概率分别如下：

(1) $\dfrac{n!}{N^n}$.

(2) $\dfrac{C_N^n \cdot n!}{N^n}$.

(3) $\dfrac{C_n^m (N-1)^{n-m}}{N^n}$.

在上述分房问题中，若令 $N=365$， $n=30$， $m=2$ 则可演化为生日问题.

全班有学生 30 人，求下列事件的概率：

(1) 某月指定为 30 天，每位学生生日各占一天.

(2) 全班学生生日各不相同.

(3) 全年某天，恰有两人在这一天同生日.

利用上述结论可得到概率分别如下：

(1) $\dfrac{30!}{365^{30}}$.

(2) $\dfrac{C_{365}^{30} \cdot 30!}{365^{30}} \approx 0.294$.

(3) $\dfrac{C_{30}^{2} (364)^{28}}{(365)^{30}}$.

1.3.3 概率的性质

性质 1.3 根据随机事件概率的定义，可得到随机事件的概率具有以下性质：

(1) $P(\varnothing)=0$.

(2) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件，则

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

(3) $P(\overline{A})=1-P(A)$.

(4) 若 $B \subset A$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$，且 $P(B) \leqslant P(A)$.

(5) 对于任意事件 A，B， $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

证明：(1) $\Omega=\Omega+\varnothing+\varnothing+\varnothing+\cdots$