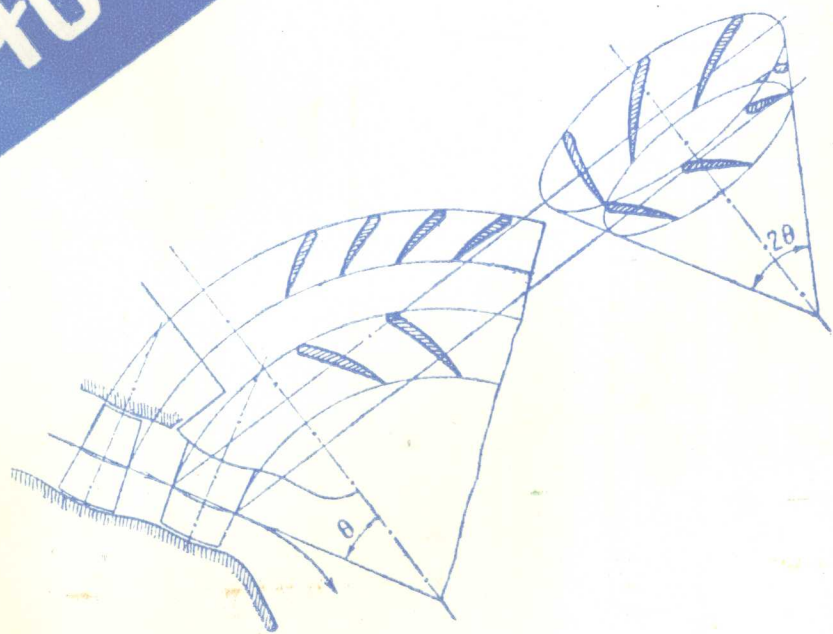


童建栋 编

水轮机水力设计基础



河海大学出版社

水轮机丛书之一

水轮机水力设计基础

童建栋 编

江苏工业学院图书馆
藏书章

河海大学出版社

主 审：刘大恺

责任编辑：谢业保

责任校对：孔长才

水轮机丛书之一

水轮机水力设计基础

童建栋 编

*

河海大学出版社出版

河海大学出版社发行

浙江良渚印刷厂印装

开本787×1092 1/16 印张 15.125 字数 350千字

1991年10月第一版

1991年10月第一次印刷

印数0001—1000

ISBN 7-5630-0414-9/TK·16

定价10.00元

序

这是一套技术改造丛书。我国目前有大中小水电站近六万座,但约有三分之一左右的机组由于投产年代较早,设备老化现象十分普遍,造成效率低下,气蚀严重,影响到农村的用电水平,也降低了水电企业的效益。由于水电机组一般是不宜返厂修理的,因此,保证机组正常运行既取决于设备的设计制造质量,也靠运行管理人员的尽心尽力及对专业知识的掌握程度。为了提高我国水电设备的设计、制造与运行管理水平,促进水轮机技术改造工作,编写这样的一套丛书是很必要的。

专门在水轮机的技术改造编写一套丛书是一种新的尝试。迄今为止,国内已出版过不少水轮机专业的教科书,内中也不乏好书,有的还阐述得相当精彩。但是,它们都有一个共同的特点,即是在不同阶段的同一教育大纲的指导下编写出来的,故不少教材的深度与广度及其阐述方法常常是非常的一致,以至一些基本内容都是被“经典”化了的。这对于学生掌握基础知识是十分合适的,但对设备的技术改造而言,尚须补充一些专门知识。因此,作为一种选择,编写一套“专著”式的丛书,对于开拓思路,提高水平,也许不失为是一种有益的尝试。

其实,这种“专著”式的丛书本身也可以看作是一种选修课教材。因此,这是一套本来不应由象笔者那样没有什么教育经验的人所编写的丛书。只是由于我国水电设备技术改造的现实需要,才迫出来的。据我们近年来对全国20多个中小电站的现场测试,发现原型水轮机的效率都远远低于模型效率,而且,一旦偏离设计工况点,还会造成效率的急剧下降。气蚀现象也非常普遍,曾经发现有的电站运行三个月后就要更换工作轮的。这样的设备不改造是不行的。因此,近年来水电设备的技术改造问题已成了一个很热门的话题。

中小水电设备的技术改造是一项很复杂的工作。老电站改造一般可作出加强维护继续运行、改进设备提高性能、彻底重建使之现代化及报废退役等四种决策,需要具备较多经验和资料,正是由于这样一种需要,使笔者感到有一种难以推卸的责任感,觉得要为从事农村中小水电设备技术改造的朋友们写一点东西,以弥补资料的不足。基于这样的考虑,笔者打算以后几年陆续的出一些集子。根据初步的安排,这套丛书的前几卷以讲理论为主,加大深度,介绍一些分析问题的方法,后部分多介绍国内外技术改造的实际经验,增强读者解决实际问题的能力。

本书是丛书之一,主要介绍叶片式机械的流体动力学理论及设计方法。承蒙刘大恺教授审阅原稿并提出宝贵意见,作者在此表示衷心的感谢。河海大学出版社的查一民副教授、谢业保及孙红星同志大力促成,及孔长才工程师帮助校对了原稿,并绘制了部分插图,减少了书中的错误与疏漏之处,谨对他们认真过细的工作表示深刻的谢意。

由于作者学识有限,谬误和不妥之处在所难免,恳请读者批评指正。

作者

一九九一年九月于杭州

目 录

第一章 叶栅理论研究基础	
第一节 概论	(1)
第二节 叶栅中的环量关系	(14)
第三节 水流对叶栅的作用	(26)
第四节 速度、升力及力矩的一般表达式	(32)
第二章 叶栅理论研究的正问题	(43)
第一节 单翼理论	(43)
第二节 单列叶栅	(62)
第三节 双列叶栅	(83)
第四节 积分方程方法	(91)
第五节 由涡源诱导流动的单翼绕流	(102)
第六节 解环列叶栅的保形变换方法	(128)
第七节 解环列叶栅的积分方程方法	(131)
第八节 解变层厚轴对称问题的解析函数	(137)
第九节 解析函数的应用	(151)
第三章 叶栅理论反问题	(162)
第一节 单翼绕流	(162)
第二节 直列叶栅	(183)
第三节 环列叶栅	(191)
第四节 变层厚轴对称表面上的叶栅	(200)
第四章 应用叶栅理论进行水轮机的水力设计	(207)
第一节 反击式水轮机的流体动力学特性	(207)
第二节 用升力法设计轴流式工作轮叶片系统的原理	(218)
第三节 用奇点分布法进行水轮机设计的步骤	(223)
第四节 水轮机通流部件计算的有限元方法	(227)
第五节 水轮机水力设计的一般步骤	(230)

第一章 叶栅理论研究基础

第一节 概 论

1. 叶 栅

水力机械中最基本的工作机构是工作轮。在工作轮中由于叶片与液体的互相作用改变了液体的能量。例如，在水轮机中液体的能量传给工作轮叶片，转化为工作轮的机械旋转运动。在水泵中这一情况正好相反，由于泵轮的机械运动，对液体作功而提高了液体的位能。因此，原则上叶片式水力机械都可以在相反工况下工作。一种设计良好的可逆式工作轮在两种工况下都具有较好的特性，如随着抽水蓄能电站发展而出现的水泵水轮机，它既在水轮机工况下具有较好的特性，又能在水泵工况下以较高的效率及良好的气蚀性能运行。这些可逆式工作轮的设计给叶栅理论的研究提供了一个新的领域。

通常，工作轮是由一系列沿圆周均匀分布的同一形状的叶片组成的。这些叶片一般具有复杂的空间形状，在水力机械中人们常把这种叶片系统称为流体动力学叶栅，或简称为叶栅。

在水力机械中，除工作轮以外的其它机构都是辅助性的，它们的作用是保证工作轮运行的最优条件，并提高整个机械工作的有效性。水轮机、液力联轴器及水泵中的导水机构即是一种辅助机构，它不直接参与能量交换，而仅仅改变水流的方向。由导水机构形成的这种叶片系统称为不动叶栅，而工作轮中的叶片处于旋转状态，故将其叶片系统称为运动叶栅。

叶栅理论研究的任务是要确定任意形状叶栅内的流动状况。由于任意形状叶栅内流动状态的复杂性，要给出一般的解十分困难，故常常将叶栅进行简化分类，归结为一些典型问题进行研究。在工程计算中还可根据不同的要求，采用不同的近似方法而求得不同精度的解。

例如，可将水力机械的叶栅分为低比速水轮机叶栅（图1.1 a）、低比速水泵工作轮叶

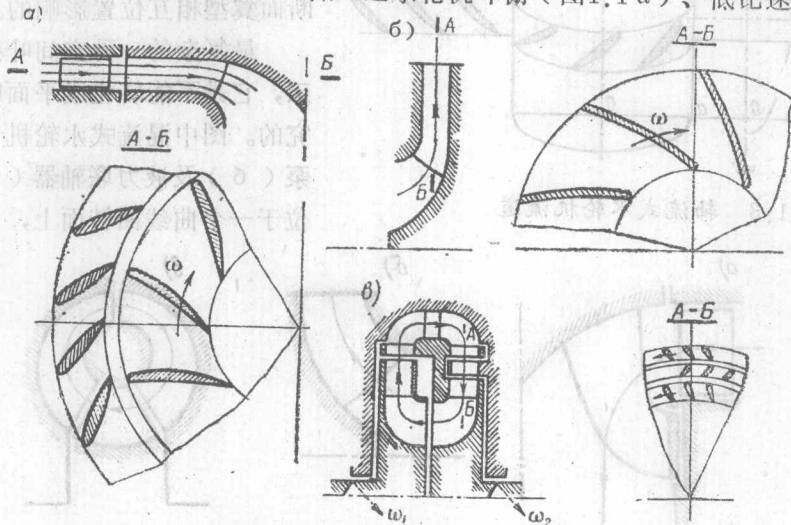


图1.1 水力机械工作轮的叶栅

栅(б)、液力联轴器多级叶栅(в)等,研究时若采用第一次近似,则可认为这些叶片均是平板,每个平板都与旋转轴垂直布置,且认为板上不同表面的流动状况是一样的。这样假设的叶栅是呈圆柱状分布的,当然在水轮机出口(а)及水泵进口处(б)会有某些偏差。

根据上述假设,可认为叶栅在不同流面的绕流状况是一样的。这样就可把一个复杂的空间问题转化为平面问题来处理,如图1.1中的A-B剖面,它形成了一个平面环列叶栅。

图1.2中水轮机的空间叶栅也可转为一个平面环列叶栅。图中斜流式水轮机中工作轮与导

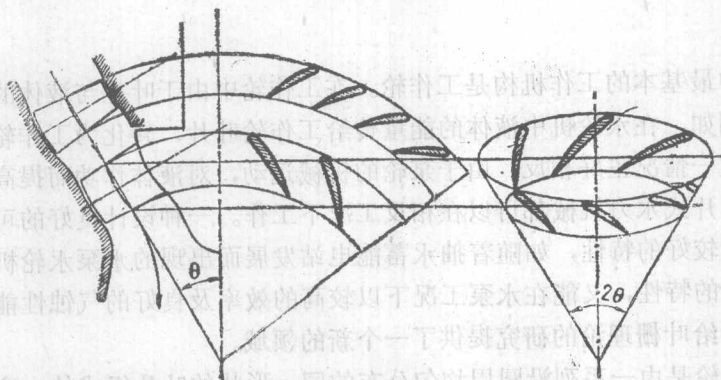


图1.2 空间叶栅变换为平面环列叶栅

水机构形成的旋转流面可近似看作是一个圆锥面,因此可将空间叶栅内的复杂流动分解为一系列互相无关的不同圆锥面上的流动。

图1.3是轴流式水轮机的流道,可以认为工作轮区域内的流动是接近圆柱状的,因此可得

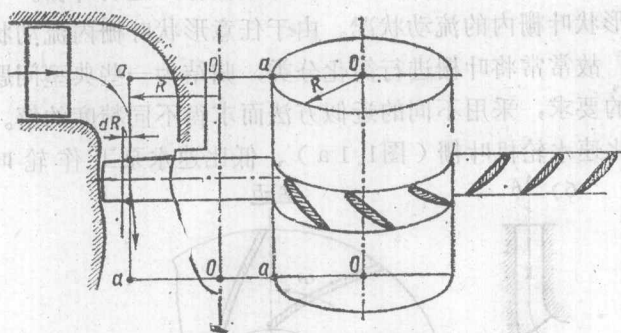


图1.3 轴流式水轮机流道

到半径为R的圆柱形叶栅。将此圆柱形叶栅展开,即可得到平面无穷直列叶栅。当然,将复杂的空间叶栅近似转化成平面叶栅进行研究时是不能考虑不同断面翼型相互位置影响的。

最复杂的一种空间叶栅如图1.4所示,它是不能转化成平面叶栅来进行研究的。图中混流式水轮机(а)、混流泵(б)及液力联轴器(в)中的流线位于一个曲线回转面上,工作轮内水流

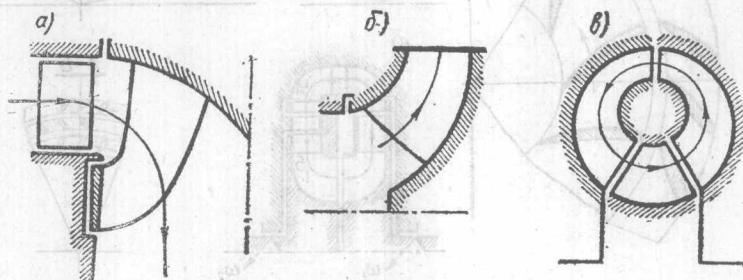


图1.4 位于曲线回转面上的流动

呈空间三元流动, 因此需要采用更复杂的方法求解。

2. 叶栅理论研究的任务

叶栅理论研究的首要任务是要确定工作轮叶片与液体间的能量关系。工作轮产生的力矩应等于水流动量矩的变化, 而动量矩的变化常可由水流方向的改变或叶栅特性变化来确定。例如, 导水机构的作用之一就是改变水流的方向, 故为了确定工作轮上的力矩及出力, 就必须确定水流的运动参数。

因此, 叶栅理论研究的第一个任务也可表达为在已知叶栅前流动参数情况下如何确定叶栅后水流的运动参数。若叶栅的几何参数是已知的, 则确定水流运动参数的问题称为叶栅理论的正问题。反之, 为了求得叶栅的几何参数, 并保证叶栅前后给定的水流参数, 则称此为叶栅理论的反问题。

水力机械制造行业中都会遇到叶栅理论的正问题与反问题。在设计新的叶片系统时就要解反问题。当然, 反问题的解不是唯一的, 即在给定的水流参数情况下可能有无穷多个解, 因此还要加上附加的限制条件。

正问题实际上常常在研究阶段求解。如当需确定几何参数、翼型、绕流方向等等的影

响时, 需要解正问题, 且正问题的解是唯一的。

其次, 叶栅理论研究要确定叶片的气蚀性能。这一任务要求确定叶片表面的压力分布, 并确定叶片上压力低于该液体气蚀发生时的压力的区域。此时, 正问题的解可确定叶片表面的压力分布, 而求解反问题则可在给定翼型围线上的速度、压力分布情况下确定叶片的几何形状。

第三, 叶栅理论研究要确定水流与叶片间的力作用。在进行强度计算时必须知道水流对叶片的作用力。此外, 导水机构和转浆式工作轮叶片都是转动的, 还要知道水流对叶片轴的水力矩。在确定叶片与水流相互间的力作用时一般可采用简化方法。

第四, 叶栅理论研究要确定叶栅中的水力损失。叶栅中的水力损失一般多采用工程实际中的估算值, 故本书不予研究。

3. 叶栅理论研究的物理基础

叶栅理论研究中最基本的方程是粘性不可压缩流体的纳维——斯托克斯方程:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \nabla^2 \vec{v} \quad (1.1)$$

式中 $\frac{d\vec{v}}{dt}$ 为液体质点的全加速度, $\vec{F}$ 为质量力加速度, $-\frac{1}{\rho} \text{grad} p$ 为压力加速度, $\nu \nabla^2 \vec{v}$ 为粘性力加速度。

对于二维问题来说, 上式的分量形式为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right); \\ \frac{dv_y}{dt} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

显然, 理想不可压缩流体的欧拉方程是略去 (1.1) 式右边第三项后的纳维——斯托克斯方程的一种形式:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p \quad (1.3)$$

这一方程只有当粘性力与其它几项相比非常小时才成立。它要求液体的粘性很小，即运动粘性系数很小，同时 $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$ 、 $\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}$ 也不大的情况下才可忽略粘性项。

流体机械中所采用的工作介质多是低粘度的水、油或气体，且速度变化也不大， $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ 、 $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ 很小，故可满足上述方程。

经验表明，由于液体的粘着性使得物体绕流时在其表面的切向速度等于零，在边界层内离开表面处速度急剧增大，但边界层外区域速度变化又不大。因此，在边界层外区域可以忽略粘性的影响，并可采用理想不可压缩流体的运动方程来描述流体的运动，但在边界层内应采用粘性不可压缩流体的运动方程 (1.1) 来研究。这是叶栅绕流问题研究的另一种方法。

进一步假定粘性不可压缩流体的运动是有势的，即存在着一个速度势函数 ϕ ，使得有：

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

此时，与粘性有关的式 (1.2) 中的右边第三项可写为：

$$v \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) = v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right);$$

$$v \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) = v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)$$

由于速度势函数满足拉普拉斯方程：

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

因此 (1.2) 式中的右边第三项为零，也即 (1.1) 式恒等于 (1.3) 式。

有势流动方程 (1.3) 的解是拉格朗日积分：

$$p + \rho \frac{v^2}{2} + \gamma z + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = C(t) \quad (1.4)$$

但由于不动翼型表面的法向与切向速度均为零， $v_n = 0$ ， $v_\tau = 0$ ，故式 (1.4) 的唯一解是：

$$\phi = \text{const.}$$

这表明粘性不可压缩流体的运动在任何区域内均不存在速度势。但对边界层外的流动，由于在流动区域的边界上 $v_\tau \neq 0$ ， $\phi \neq \text{const}$ ，故粘性流体的有势流动是可能的。此时，边界层外粘性流体有势流动的所有规律均与理想流体有势流动的规律是一致的。但在边界层内流动始终是有旋的。

因此，叶栅流体动力学的理论是建立在边界层外理想流体有势流动的基础上的。虽然边界层厚度是未知的，但由于边界层很薄，因此可近似认为在叶片外面的翼型围线上流体以速度 v 作有势运动。

经验表明，采用上述流动模式在解叶栅理论的问题时是适宜的，特别在确定作用在叶片

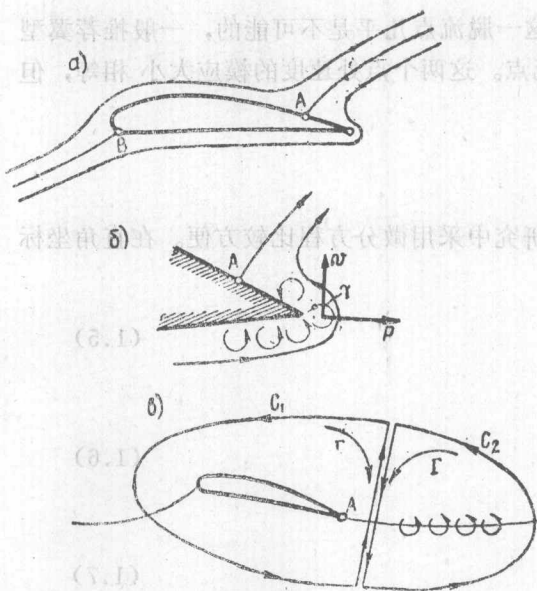


图1.5 围绕翼型的速度环量

的这种绕流是不可能的。

如上所述，在流体机械中工质的粘性是很小的，因此仅仅在边界层内考虑工质的粘性。翼型边界层内本身是一个强烈的有旋运动区域，沿翼型围线分布有一系列的旋涡，如图1.5 6所示。旋涡的强度与边界上液体的速度有关。当旋涡沿翼型围线下部绕过尾尖点进入较高压力的区域、但尚未达到临界出流点A时，它就从表面脱离了，并引起边界层的变化。这一现象可以解释为靠近尾尖点处的旋涡具有很大的强度，且绕流速度极大，旋涡产生了很大的作用力使得液体脱离表面，并引起出流点A向后移动。如此周而复始的运动，使尾尖点处的流动处于稳定状态。

若作一包括翼型及所脱落的旋涡的围线C，则根据汤姆逊定理，沿此围线的环量应为零。但若将此围线分为C₁、C₂两部分，则沿C₂围线的环量应等于所有脱落旋涡的总强度Γ，如图1.5b、而沿围线C₁的环量相应为一Γ。这种说法虽缺乏严格理论证明，但它是经过无数次的实验观察后作出的。低粘性的液体当其绕流速度不大时，可观察到图(1.5a)中的流动，此时可认为作用在边界层旋涡上的力很小，不可能引起旋涡的脱离。但当速度增加时，则可观察到出口边旋涡的脱离。

1909年苏联学者恰布雷金(С. А. Чаплыгин)根据儒可夫斯基的报告在进行学术讨论时提出了著名的恰布雷金——儒可夫斯基假定。此假定认为翼型尾尖的速度应为有限，并可单值地确定围绕翼型的速度环量。

所有上述讨论也适用于叶栅。

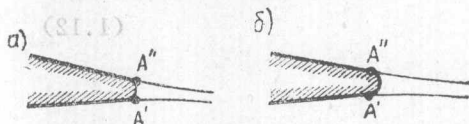


图1.6 实际翼型的出口边

上的力与力矩时具有足够的精度。但在研究阻力及叶栅中的损失等问题上，理想流体的理论是不适用的，此时必须研究边界层内的流动。

4. 围绕翼型的速度环量

叶栅绕流时通常在其周围形成速度环量Γ，现研究速度环量形成的机理。

根据流体力学理论，理想流体的有势流动沿任何闭合围线的速度环量始终是不变的。因此若在运动起始时刻无速度环量，则在以后的时间内，其环量也为零。这种流动如图(1.5a)所示，图中存在着分流点B及出流点A，其上的速度均为零。进一步可假定翼型上存在着一个尾尖点，由理论研究知液体绕经尾尖点流动时的速度为无限，但在实际流体中这又是不可能的。儒可夫斯基(Н. Е. Жуковский)通过围绕翼型速度环量的分析，从理论上论述了对于有粘性的实际液体的

实际情况下水力机械中叶片的出口边不会是一个尖点，它们常常被做成平头的，或是圆头的，如图1.6所示。这种具有两个角点的钝的出口边在绕流时不可能不脱离表面，因此在实际叶栅

绕流时在出口边会产生水流脱离。理论上要确定这一脱流点几乎是不可能的，一般推荐翼型出口边处表面急剧变化的点（A'、A''）作为脱流点。这两个点处速度的模应大小相等，但速度方向相反。

5. 流动微分方程

1) 静止平面叶栅

理想、不可压缩流体的叶栅绕流是有势的，研究中采用微分方程比较方便。在直角坐标系中有连续方程：

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (1.5)$$

相应的在柱坐标系中可表示为：

$$\frac{\partial}{\partial R}(Rv_R) + \frac{\partial v_\epsilon}{\partial \epsilon} = 0. \quad (1.6)$$

且势函数 ϕ 和流函数 ψ 符合拉普拉斯方程：

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0; \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (1.8)$$

式中：

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.9)$$

符合柯西——黎曼条件。

相应的在柱系中有：

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon^2} = 0. \quad (1.10)$$

流函数具有类似的表达式。式中速度分量可表示为：

$$v_R = \frac{\partial \phi}{\partial R} = \frac{\partial \psi}{R \partial \epsilon}; \quad v_\epsilon = \frac{\partial \phi}{R \partial \epsilon} = -\frac{\partial \psi}{\partial R}. \quad (1.11)$$

当流动边界条件和环量给定后拉普拉斯方程有唯一解。

2) 匀速运动叶栅

在匀速运动的直列叶栅中的相对运动是有势的。此时流函数 ϕ 和势函数 ψ 仍满足拉氏方程。但等速旋转的环列叶栅的有势绕流时其相对运动是有旋的，且速度应用相对速度 $\vec{w}$ 表示

$$\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}; \quad \vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{R};$$

$$\vec{\Omega} = \text{rot} \vec{w} = -\text{rot}(\vec{\omega} \times \vec{R}) = -2\vec{\omega}.$$

式中 u 切向速度或牵连速度， ω 旋转叶栅角速度， $\vec{\Omega}$ 相对速度涡矢量。

$$\text{这时} \frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} = \Omega = -2\omega. \quad (1.12)$$

且：

$$w_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad w_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (1.13)$$

将 w_x 、 w_y 值代入 (1.12) 式, 得:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 2\omega. \quad (1.14)$$

故可认为在以角速度 ω 旋转的环列叶栅中的相对流动的流函数 Ψ 符合泊松方程, 方程的右边是常数 2ω 。

在圆柱坐标中相对速度的旋度为:

$$\Omega = \frac{\partial(Rw_\theta)}{R\partial R} - \frac{\partial w_R}{R\partial \epsilon}.$$

考虑到式 (1.11) 和 (1.12), 则可得到圆柱坐标系中相对流动的流函数方程:

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \epsilon^2} = 2\omega. \quad (1.15)$$

若令:

$$\Psi = \psi + \frac{1}{2} \omega (x^2 + y^2) + c, \quad (1.16)$$

则可将泊松方程 (1.14) 变为拉氏方程:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - 2\omega = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

并称函数:

$$\psi = \Psi - \frac{1}{2} \omega (x^2 + y^2) + c. \quad (1.17)$$

为满足拉氏方程 (1.8) 的调和函数。解拉氏方程时应满足由式 (1.17) 确定的边界条件, 当然绝对流动的势函数是满足拉氏方程的。

3) 轴对称流面上的变厚层叶栅

空间叶栅内水流运动的计算目前实际上尚未解决, 因此, 常将复杂的三维流动近似地转化为两个二维流动来计算。

首先, 近似认为流面 F_i 是轴对称的, 如图 1.7 所示。此时, 可认为叶栅是由无穷薄、无限多的叶片组成的, 这 and 实际情况下叶片数有限的叶栅是不一致的。为此, 计算叶片数有限的

的实际叶栅内的流动需要引入质量力沿圆周均匀分布的假定。当然, 严格说来在叶片数有限时的流动不可能是轴对称的。但此问题极为复杂, 至今人们还不知道在平均轴对称表面上的流动与实际流动的差别究竟有多大。

其次, 需要解变层厚、轴对称流面上的叶栅绕流问题。

如图 1.7, 采用曲线坐标系, 有:

$$q_1 = OB, \quad q_2 = R_0 v, \quad q_3 = OC.$$

式中, v 是 A 点所在的平面和坐标起始平面间的夹角。

引入拉梅系数:

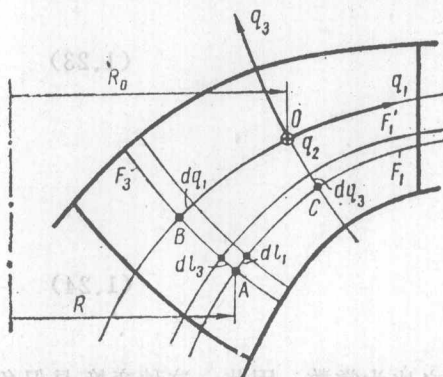


图 1.7 变厚层轴对称流面上的叶栅绕流

$$H_1 = \frac{dl_1}{dq_1}, H_2 = \frac{dl_2}{dq_2}, H_3 = \frac{dl_3}{dq_3}.$$

当流面 F_1 和坐标轴 q_1 一致时, 有 $dl_1 = dq_1$, 即有 $H_1 = 1$ 。

拉梅系数 H_3 是所研究点的微元厚度 $\delta(q_1)$ 与坐标轴 q_3 处的厚度 $\delta(o)$ 之比:

$$h = \frac{\delta(q_1)}{\delta(o)} = H_3, \quad (1.18)$$

并称 h 为层厚, 它是 $q_1 = l_1$ 的函数。

而 H_2 可表示为:

$$H_2 = \frac{R dv}{R_0 dv} = \frac{R}{R_0}. \quad (1.19)$$

其值只与半径 R 有关。因此, 上述 H_2 、 H_3 也只与 q_1 有关。

在曲线坐标系中连续方程一般可表示为:

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (c_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (c_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (c_3 H_1 H_2) = 0. \quad (1.20)$$

式中 c_1 、 c_2 、 c_3 为绝对速度 c 在 q_1 、 q_2 和 q_3 坐标上的分量。

对于变厚层、轴对称流面上的流动, 有:

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (c_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (c_2 H_3) = 0. \quad (1.21)$$

此时 $H_1 = 1$, 且没有 q_3 坐标方向上的速度分量。

同时, q_3 坐标方向的速度旋度可表示为:

$$\text{rot}_{q_3} c = \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (c_2 H_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (c_1 H_1) \right].$$

对于无旋运动, 应有

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (c_2 H_2) - \frac{\partial c_1}{\partial q_2} = 0. \quad (1.22)$$

此外, 可以将轴对称流面上的叶栅绕流问题转化为某个平面叶栅的绕流。引入变换:

$$\begin{cases} x = q_2, \\ y = \int \frac{H_1}{H_2} dq_1 = \int \frac{R_0}{R} dq_1. \end{cases} \quad (1.23)$$

式中 x 、 y 是与 q_1 、 q_2 相应的某个辅助平面的坐标轴。

由此可得:

$$\begin{cases} dx = dq_2, & dy = \frac{H_1}{H_2} dq_1, \\ \frac{dy}{dx} = \frac{H_1 dq_1}{H_2 dq_2} = \frac{dl_1}{dl_2}. \end{cases} \quad (1.24)$$

即 F_1 面与辅助平面 $z(x, y)$ 相应点处的微元正交线线段之比为常数。因此, 这种变换是保角变换, 其流层的厚度为 $h = f(y)$ 。

再寻求速度间的关系。由通过相应面积流量相等的条件可得:

由此知:

$$v_y = H_2 c_1 = \frac{R}{R_0} c_1.$$

由相应部分环量相等条件得:

$$d\Gamma = c_2 dl_2 = c_2 H_2 dq_2 = v_x dx.$$

从而有:

$$v_x = H_2 c_2 = \frac{R}{R_0} c_2. \quad (1.26)$$

式中: v_x 、 v_y 是速度 v 在 z 平面坐标轴上的投影。显然:

$$v = H_2 c$$

将式 (1.24)、(1.25)、(1.26) 代入连续方程 (1.21) 得:

$$\frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial x} (v_x H_2) + \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial y} (v_y H_2) = 0.$$

这是因为 H_2 与 x 无关, 有 $\frac{\partial}{\partial q}(\dots) = \frac{\partial}{\partial x}(\dots) \frac{\partial x}{\partial q}$ 。由此可得平面流动的连续方程:

$$\frac{\partial}{\partial x} (h v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (h v_y) = 0. \quad (1.27)$$

若考虑到 $H_2 = h = f(y)$, 则也可将上式表示为:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial y} v_y = 0, \quad (1.28)$$

而将式 (1.22) 变换后, 有:

$$\frac{1}{H_2} \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_y}{H_2} \right) = 0.$$

由此得:

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0. \quad (1.29)$$

此即为 z 平面上有势流动的条件。

对于势流, 有:

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (1.30)$$

故将式 (1.30) 代入式 (1.28) 可得

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0. \quad (1.31)$$

为 z 平面上速度势函数方程。

进一步确定流函数方程。由流体力学知流线方程为:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}.$$

或有:

$$-v_y dx + v_x dy = 0,$$

且由连续方程(1.27)可得:

$$\frac{\partial}{\partial x}(h v_x) = -\frac{\partial}{\partial y}(h v_y).$$

由此知式(1.32)左边是流函数 ψ 的全导数。并有:

$$v_x = \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v_y = -\frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.33)$$

由于:

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = -\frac{1}{h} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{h} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{h^2} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

故有:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad (1.34)$$

为 z 平面上有势流动的流函数方程。

如果流动是有旋的, 则有:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = -h \Omega. \quad (1.35)$$

比较式(1.30)和(1.33), 可得:

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{1}{h} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.36)$$

由于:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0,$$

故有:

$$\frac{1}{h} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$

此即为流线和等势线形成正交曲线的条件。

由上所述, 可将平面流动由一组椭圆方程组来描述:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{h} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} v_y; \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (1.37)$$

或:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (1.38)$$

利用上述方程组和变换(1.23)可以解轴对称表面上的流动问题。

在 z 平面上确定正交曲线坐标系 (q_1', q_2') , 原点为

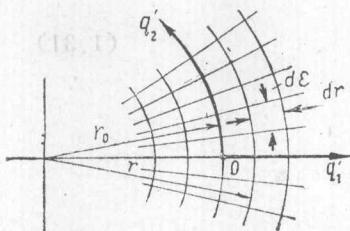


图1.8 z 平面上的正交曲线坐标系

O, 如图1.8所示。若引入以下变换;

$$\ln r = \frac{R_0}{r_0} \int \frac{dq_1}{R(q_1)}, \quad q_2' = q_2. \quad (1.39)$$

则可将轴对称表面上的叶栅转换到平面环列叶栅绕流问题。

由于:

$$\frac{r_0}{r} dr = \frac{R_0}{R} dq_1, \quad dq_2' = dq_2 \quad (R_0 dv = r_0 d\varepsilon).$$

且:

$$\frac{dl_1'}{dl_2'} = \frac{dr}{r d\varepsilon} = \frac{dq_1}{R dv} = \frac{dl_1}{dl_2}.$$

故变换(1.39)是保形变换。

如果在轴对称面上有 m 个翼型, 则在 z 平面上环列叶栅的翼型数为:

$$m' = m \frac{r_0}{R_0}, \quad (m' = m, \text{ 当 } r_0 = R_0 \text{ 时})$$

保角变换时在相应点处层厚 h 是不变的, 且 z 平面上的层厚 h 是 r 的函数, 有 $h = f(r)$ 。

再考虑速度间的关系。因为相应平面内的流量和环量在变换时保持常数, 故有:

$$|v| = \frac{r_0}{R_0} \cdot \frac{R}{r} |c| = \frac{dq_1}{dr}(r) |c|. \quad (1.40)$$

利用上式和式(1.39)可得 z 平面上的连续方程:

$$\frac{\partial}{\partial r}(hrv_r) + \frac{\partial}{r \partial \varepsilon}(hrv_\varepsilon) = 0, \quad (1.41)$$

由此得:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_\varepsilon}{r \partial \varepsilon} = -\frac{1}{h} \cdot \frac{\partial h}{\partial r} v_r. \quad (1.42)$$

对于势流可由式(1.22)得:

$$\Omega = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_\varepsilon)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varepsilon} = 0. \quad (1.43)$$

6. 能量方程和力矩方程

如图1-9, 研究以某一等角速度 ω 旋转的任意叶栅内水流能量的变化。

假定叶栅前后无穷远处的流动是稳定的, 即断面任意点上速度与旋转叶栅的位置无关, 流动是轴对称的, 若将任意流面的1、2断面间液体比能的变化称为全压头 P , 则有:

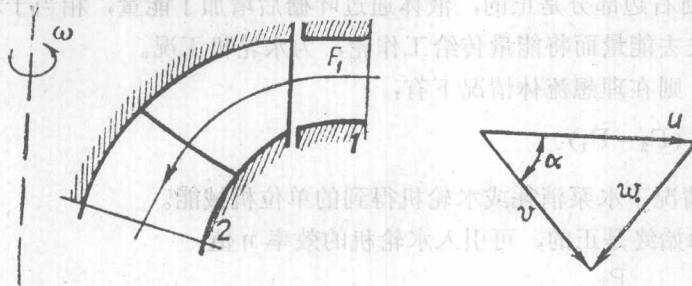


图1.9 等速旋转任意叶栅内速度三角形

$$P = \frac{dE}{dV} = (\gamma z_2 + p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2}) - (\gamma z_1 + p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2}). \quad (1.44)$$

式中: dE 液体能量的变化, dV 液体容积的变化, z 为该点高度坐标, p 压力, v 速度, γ 液体重度, ρ 液体密度。其中下标 1、2 分别代表叶栅进出口断面。

单位重量液体比能的变化称为水头:

$$H = \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \right) - \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} \right).$$

根据伯努利方程, 考虑叶栅内的相对流动, 相应有:

$$\gamma z_1 + p_1 + \rho \frac{w_1^2 - u_1^2}{2} = \gamma z_2 + p_2 + \rho \frac{w_2^2 - u_2^2}{2} + \Delta P_n. \quad (1.45)$$

式中: ΔP_n 是水力损失引起的叶栅进出口断面全压头的差值。

由式 (1.45) 得:

$$\gamma(z_2 - z_1) + (p_2 - p_1) = \rho \frac{w_2^2 - u_2^2}{2} - \rho \frac{w_1^2 - u_1^2}{2} - \Delta P_n.$$

将此式代入 (1.44) 式, 有:

$$P = \frac{\rho}{2} (v_2^2 + u_2^2 - w_2^2) - \frac{\rho}{2} (v_1^2 + u_1^2 - w_1^2) - \Delta P_n.$$

由此式可以确定任意流面上的 1、2 断面间的水流比能差值。

同时, 由速度三角形知:

$$w^2 = v^2 + u^2 - 2uv \cos \alpha,$$

故有:

$$P + \Delta P_n = \rho(u_2 v_2 \cos \alpha_2 - u_1 v_1 \cos \alpha_1).$$

且由关系式:

$$v_u = v \cos \alpha, \quad u = \omega R,$$

知:

$$P + \Delta P_n = \rho \omega (R_2 v_{2u} - R_1 v_{1u}). \quad (1.46)$$

若用速度环量表示, 则有:

$$P + \Delta P_n = \rho \frac{\omega}{2\pi} (\Gamma_2 - \Gamma_1). \quad (1.47)$$

式中环量 $\Gamma_1 = 2\pi R_1 v_{1u}$, $\Gamma_2 = 2\pi R_2 v_{2u}$

式 (1.47) 表明水流比能的变化与液体的密度、叶栅的旋转角速度及进出口的环量差成正比。若 $\Gamma_2 > \Gamma_1$, 则右边部分是正的, 液体通过叶栅后增加了能量, 相当于水流通过水泵情况, 反之, 液体失去能量而将能量传给工作轮, 为水轮机工况。

若不考虑损失, 则在理想流体情况下有:

$$P_T = \rho \frac{\omega}{2\pi} (\Gamma_2 - \Gamma_1). \quad (1.48)$$

式中 P_T 是理想流体情况下水泵消耗或水轮机得到的单位机械能。

考虑到损失 ΔP_n 始终是正的, 可引入水轮机的效率 η 值:

$$\eta = \frac{P_T}{P} = \frac{P_T}{P_T + \Delta P_n}. \quad (1.49)$$