ZU HE SHU XUE

组合数学

（第三版）

孙世新　编著

14	20	41	05	32	53
30	15	04	51	23	42
21	03	12	40	54	35
02	31	50	13	45	24
43	52	25	34	10	01
55	44	33	22	11	00

UESTCP
电子科技大学出版社

组合数学

（第三版）

孙世新　编著

电子科技大学出版社

内容提要

本书主要内容分为三个层次：一、组合数学的基础理论——系统地介绍了组合数学中最主要的知识，包括鸽笼原理、容斥原理、母函数、递归关系等必须掌握的基本内容。二、组合优化——侧重论述了网络流、线性规划和动态规划的基本原理、方法及其应用。三、组合设计——初步阐述了有关区组设计的基本知识以及作者在该领域所做的一些研究工作。

本书叙述详尽，由浅入深，层次分明，并配有大量的实例和难易程度不同的习题，适合于计算机专业及非数学专业的理科、工科专业的本科生、研究生作为教材或参考书，也可作为工程技术人员自学的教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

组合数学/孙世新编著．—3版．—成都：电子科技大学出版社，2003.8
ISBN 7-81016-365-5

Ⅰ．组… Ⅱ．孙… Ⅲ．组合数学—高等学校—教材 Ⅳ．O157

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 067305 号

组合数学

(第三版)

孙世新 编著

出 版：电子科技大学出版社 (成都建设北路二段四号，邮编：610054)
责任编辑：许宣伟
发 行：新华书店
印 刷：西南冶金地质印刷厂
开 本：787×1092 1/16 印张 18.25 字数 460 千字
版 次：2003 年 8 月第三版
印 次：2003 年 8 月第三次
书 号：ISBN 7—81016—365—5/O·11
印 数：6001—10000 册
定 价：22.00 元

前　言

组合数学又称为组合分析或组合论。它所研究的中心问题是根据一定的规则来安排某些事物的有关数学问题。这些问题包括这种安排是否存在？如果符合要求的安排是存在的，那么，这样的安排又有多少？怎样构造这种安排？如果给出了最优化标准，又怎样去得到最优安排？

当今，组合数学中的许多问题是数学中的精华。组合数学的应用也涉及到自然科学和社会科学的许多领域。比如，它在计算机科学、编码理论、通信网络、电子工程、实验设计、交通运输、社会经济学、管理科学等领域中都有着广泛的使用价值，特别是在计算机科学中有着重要的应用。这不仅因为它是这门学科的重要基础，更为主要的原因是计算机科学的核心是算法的研究，而组合算法是算法的重要组成部分。没有组合数学的理论基础，组合算法的深入研究和分析是不可能的。由于以上原因，组合数学在当今世界中受到普遍的高度重视。

组合数学具有悠久的历史。但是，它的发展壮大还是近几十年的事情，特别是计算机的问世以及计算机的广泛应用，促使了组合数学的蓬勃发展。反过来，由于组合数学的发展壮大，又推动了计算机科学日新月异的进步。可以说，组合数学是计算机科学发展的一个不可分割的组成部分。

本书内容分为三个层次：

1. 组合理论（第一至六章）：系统地介绍了组合数学中最主要的基础知识，包括鸽笼原理、容斥原理、母函数、递归关系等必须掌握的基本内容。

2. 组合优化（第七至九章）：侧重论述了网络流、线性规划、动态规划的基本原理、方法及其应用。

3. 组合设计（第十章至第十一章）：初步阐述了有关区组设计的基本知识以及编者在区组设计领域所作的一些研究工作。组合设计是组合数学中发展很快的一个方面。它有着广泛的应用价值。例如，有关实验设计的理论就属于这方面的内容。

全书较为全面地介绍了组合数学的基本问题、基本理论、所使用的方法及其应用。

本书叙述详尽，由浅入深，层次分明。每章均配有大量的实例和难易程度不同的习题。教师可以根据教学要求、课时多少、授课对象（本科生、研究生）灵活选取授课内容，适合于计算机专业及非数学专业的理科、工科专业的本科生、研究生作为教材或参考书，也可作为工程技术人员自学的教材或参考书。

本书承蒙四川大学数学系姚志坚教授、白苏华研究员审阅，并提出了许多宝贵意见。电子科技大学数学系张先迪教授为本书的修订作了大量的工作，他在百忙之中，抽出宝贵时间，为本书增添了§3.5节和第六章的全部内容。在此一并向他们表示最衷心、最诚挚的谢意。

本书在1999年5月第二版的基础上进行了修订并增加了部分章节。由于编者水平有限，书中难免存在不少错误和缺点，恳请读者批评指正。

编　者

2003年5月

于电子科技大学

目　　录

第六章 Pólya 定理

第七章 网络流

第八章 线性规划

第九章 动 态 规 划

第十章 区 组 设 计

第十一章 优美区组设计

第一章 排列、组合与二项式定理

§1.1 加法规则和乘法规则

组合数学研究的主要问题之一就是计数问题，而加法规则和乘法规则又是解决计数问题的有力工具。这两个规则是直观的，形式上的验证可以用数学归纳法得到。

1. **加法规则** 设 S 是有限集合，若 $S_i \subseteq S$，$S=\bigcup_{i=1}^{m} S_i$，且当 $i \neq j$ 时，$S_i \cap S_j=\phi$，则有

$$|S| = |\bigcup_{i=1}^{m} S_i| = \sum_{i=1}^{m} |S_i| \tag{1.1}$$

特别，当 $m=2$ 时，有

$$|S| = |S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2|$$

换言之，加法规则可以叙述为：若集合 S 可以分解为互不相交的子集 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ 之和，则确定 S 中的事物个数，可以先求出各子集 S_i 中的事物个数，然后相加。

［例 1］ 有一所学校给一名物理竞赛优胜者发奖，奖品有三类：第一类是三种不同版本的法汉词典；第二类是四种不同类型的物理参考书；第三类是两种不同的奖杯。这位优胜者只能挑选一样奖品。那么，这位优胜者挑选奖品的方法有多少种？

解：设 S 是所有这些奖品的集合，S_i 是第 i 类奖品的集合（$i=1,2,3$）。显然 $S_i \cap S_j = \phi(i \neq j)$，于是由加法规则有

$$|S| = |\bigcup_{i=1}^{3} S_i| = |S_1| + |S_2| + |S_3| = 3 + 4 + 2 = 9$$

也就是说这位优胜者挑选奖品的方法共有 9 种。

避开集合这个名词，只利用实际生活中容易理解的字眼，对 $m=2$，加法规则的另一种叙述为：假若有互相独立的两个事件 X 和 Y 分别有 k 种和 l 种方法产生，则产生 X 和 Y 的方法数有 $k+l$ 种。

2. **乘法规则** 若 $S_i(i=1,2,\cdots,m)$ 为有限集，且 $S=S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m = \{(a_1, a_2, \cdots, a_m) \mid a_i \in S_i, i=1,2,\cdots,m\}$，则有

$$|S| = |S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m| = \prod_{i=1}^{m} |S_i| \tag{1.2}$$

特别，当 $m=2$ 时，有

$$|S| = |S_1 \times S_2| = |S_1| \cdot |S_2|$$

换言之，乘法规则可以叙述为：若集合 S 是集合 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ 的直积，则确定 S 中的事物个数，可以先求出各个集合 S_i 中的事物个数，然后相乘。应当注意，对于 S 中的元 $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$，它的各分量是相互独立的。

［例 2］ 从 A 地到 B 地有两条不同的道路，从 B 地到 C 地有四条不同的道路，而从 C 地到 D 地有三条不同的道路。求从 A 地经 B、C 两地到达 D 地的道路数。

图 1-1

解：设 S 为由 A 地经 B、C 两地到达 D 地的道路集合(如图 1-1)，并设 S_1 为由 A 地到 B 地的道路集合，S_2 为由 B 地到 C 地的道路集合，S_3 为由 C 地到 D 地的道路集合，则有 $|S_1|=2$，$|S_2|=4$，$|S_3|=3$，而 $S=S_1\times S_2\times S_3$，由乘法规则有

$$|S| = |S_1| \times |S_2| \times |S_3| = 2 \times 4 \times 3 = 24$$

即由 A 地经 B、C 两地到达 D 地的道路数为 24。

同样，避开集合这个名词，使用在实际生活中容易理解的字眼，对 $m=2$，乘法规则可以叙述为：若有互相独立的两个事件 X 和 Y 分别有 k 种和 l 种方法产生，则同时产生事件 X 与事件 Y 的方法数为 $k\times l$。

［例 3］ 由数字 1,2,3,4,5 可以构成多少个所有数字互不相同的四位偶数。

解：由于所组成的四位数是偶数，故个位数只能选取数字 2 或 4，因此个位数只有两种选择方法。

又由于要求四位数字互不相同，故当个位数选定后，在剩下的 4 位数字中，选十位数就只有 4 种方法。当个位数和十位数选定后，在剩下的 3 位数字中，选择百位数就只有 3 种方法。当个位、十位和百位数选定后，在剩下的二位数字中选择千位只有两种方法。于是，由乘法规则知，四位数字互不相同的偶数个数是

$$2 \times 4 \times 3 \times 2 = 48$$

通常，乘法规则比加法规则更加复杂，但乘法规则更加有用。一般情况下，加法规则和乘法规则同时使用在同一个问题中。

［例 4］ 求出从 7 个数学系的学生，8 个化学系的学生，105 个经济系的学生和 21 个物理系的学生中选出两个不同专业的学生的方法数。

解：由乘法规则有

选一个数学系和一个化学系的学生的方法数为 $7\times 8=56$。

选一个数学系和一个经济系的学生的方法数为 $7\times 105=735$。

选一个数学系和一个物理系的学生的方法数为 $7\times 21=147$。

选一个化学系和一个经济系的学生的方法数为 $8\times 105=840$。

选一个化学系和一个物理系的学生的方法数为 $8\times 21=168$。

选一个经济系和一个物理系的学生的方法数为 $105\times 21=2205$。

又由加法规则得

$$56 + 735 + 147 + 840 + 2205 + 168 = 4151$$

因此，符合题目要求的方法数为 4151 种。

在实际中，大量的计数问题分为两大类：

1. 计算事物的有序安排或有序选择数。这又分为如下两种情况：

a. 不允许任何事物重复

b. 允许事物重复

2. 计算事物的无序安排或无序选择数。这又分为如下两种情况：

a. 不允许任何事物重复

b. 允许事物重复

第一类就是§1.2节要讨论的排列问题，第二类就是在§1.3节中要讨论的组合问题。

如何区别事物的重复和不重复呢？通常采用集合和重集的安排或选择的说法来加以区别。

集合的概念大家都很熟悉，它的元素一定是不相同的。而重集也类似于集合，只是它的元素可以是相同的。如集合 $A=\{a,b,c,d\}$ 具有四个不同的元素，但重集 $B=\{a,a,b,b,b,c,d,d,d,d,d\}$ 则有 11 个元素，2 个 a，3 个 b，1 个 c 和 5 个 d。通常把 B 简记为 $B=\{2\cdot a,3\cdot b,1\cdot c,5\cdot d\}$。一般有

$$B=\{k_1\cdot b_1,k_2\cdot b_2,\cdots,k_n\cdot b_n\}$$

式中，k_i 表示重集 B 的元素 b_i 的重复数，当没有关于元素重复数的限制时，可以允许重集中的元素出现无限多次，即 k_i 可以是∞。

§1.2 排　　列

研究排列问题的主要目的是求出根据已知的条件所能作出的不同排列的种数。

排列按照元素的排列方式可分为三种排列：(1)线排列；(2)圆排列；(3)重排列。

一、线排列

定义 1.1　设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 是具有 n 个元素的集合，r 是正整数。从这 n 个不同的元素中取 r 个按照一定的次序排列起来($r\leqslant n$)，称为集合 A 的 r-排列。其排列数记为 $P(n,r)$。换言之，A 的 r-排列为 A 的 r 有序子集。

另外，为了处理问题的方便，我们定义

$$P(n,r)=\begin{cases}1 & n\geqslant r=0\\ 0 & n<r\end{cases}$$

例如，集合 $A=\{a,b,c\}$，则集合 A 有 6 个 2-排列：ab,ac,ba,ca,bc,cb 和 6 个 3-排列：abc,acb,bac,bca,cab,cba，故有

$$P(3,2)=6,\quad P(3,3)=6$$

定理 1.1　对于正整数 $n,r,r\leqslant n$，有

$$P(n,r)=n(n-1)\cdots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}\tag{1.3}$$

证明：在构造集合 A 的 r-排列时，可以从集合 A 的 n 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中任选一个元素作为排列的第一项，这可以有 n 种选法。当第一项选定后，又可以从剩下的 $n-1$ 个元素中任选一个元素作为排列的第二项，这又有 $n-1$ 种选法。照此下去，只要选定了前 $r-1$ 项，则就有 $n-r+1$ 种选法来选择排列的第 r 项。由乘法规则，这 r 个项可以有 $n\cdot(n-1)\cdots(n-$

$r+1$)种选法。故有

$$P(n,r) = n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

证毕。

注意，当 $r=n$ 时，则称 A 的 n-排列为全排列，于是由公式(1.3)有

$$P(n,n) = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

推论 1 当 $n \geqslant r \geqslant 2$ 时，有

$$P(n,r) = nP(n-1,r-1) \tag{1.4}$$

证明：在集合 A 的 n 个元素中，任何一个元素都可以排在它的 r-排列的首位，故首元有 n 种取法。当首元取定后，其他位置上的元正好是从 A 的另 $n-1$ 个元素中取 $r-1$ 个的排列，因此有 $P(n-1,r-1)$种取法。由乘法规则知有

$$P(n,r) = nP(n-1,r-1)$$

证毕。

推论 2 当 $n \geqslant r \geqslant 2$ 时，有

$$P(n,r) = rP(n-1,r-1) + P(n-1,r) \tag{1.5}$$

证明：$r \geqslant 2$ 时，把集合 A 的 r-排列分为两大类：一类含有 A 中的某固定元。比如是 a_1；另一类不含 a_1。如果先从 $A \backslash \{a_1\}$ 中选取 $r-1$ 个元进行排列，共有 $P(n-1,r-1)$个这样的排列。对于每一个上述排列，可将 a_1 放入而得到第一类排列。由于对任一上述排列，a_1 都有 r 种放入方法，因此第一类排列共有 $r \cdot P(n-1,r-1)$个，第二类排列实质上是 $A \backslash \{a_1\}$的 r-排列，因此共有 $P(n-1,r)$个，再由加法规则有

$$P(n,r) = r \cdot P(n-1,r-1) + P(n-1,r)$$

证毕。

[例 1] 由数字 1,2,3,4,5,6 可以构成多少个数字互不相同的四位数。

解：由于所有的四位数字互不相同，故一个四位数就是集合{1,2,3,4,5,6}的一个 4-排列，因而符合题目要求的四位数个数是

$$P(6,4) = \frac{6!}{(6-4)!} = 360$$

[例 2] 将具有 9 个字母的单词 FRAGMENTS 进行排列，要求字母 A 总是紧跟在字母 R 的右边，问有多少种这样的排法？

解：由于 A 总在 R 的右边，故这样的排列可以看成是具有 8 个元素的集合{F,RA,G,M,E,N,T,S}的一个全排列，其个数为

$$P(8,8) = 8! = 40320$$

[例 3] 求有多少个 5 位数，每位数字都不相同，不能取 0，且数字 7 和 9 不相邻？

解：由于所有的 5 位数字互不相同，且不能为 0，故一个 5 位数就是集合{1,2,…,9}的

一个 5-排列，其排列数为 $P(9,5)$，其中 7 和 9 相邻排列数为 $4\times2\times P(7,3)$，故满足题设要求的 5 位数个数为

$$P(9,5)-4\times2\times P(7,3)=15120-1680=13440$$

由于上面的排列是把一些元素排成一条直线，因此，通常把这种排列也叫做线排列。区别于线排列的圆排列，它是把一些元素排成一个圆圈的排列。

二、圆排列

定义 1.2 从集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的 n 个不同元素中取出 r 个元素按照某种顺序（如逆时针）排成一个圆圈，称这样的排列为圆排列（或称循环排列）。

需要注意的是把一个圆排列旋转可得另一个圆排列，这两个圆排列是相同的。

定理 1.2 集合 A 中的 n 个元素的 r 圆排列的个数为

$$P(n,r)/r=n!/(r(n-r)!) \tag{1.6}$$

证明：由于把一个圆排列旋转所得到的另一个圆排列视为相同的圆排列，因此排列 $a_1a_2\cdots a_r,a_2a_3\cdots a_ra_1,a_3a_4\cdots a_ra_1a_2,\cdots,a_ra_1a_2\cdots a_{r-1}$ 在圆排列中是同一个，即一个圆排列可以产生 r 个线排列，而总共有 $P(n,r)$ 个线排列。故圆排列的个数为

$$P(n,r)/r=n!/(r(n-r)!)$$

[例 4] 有 8 人围圆桌就餐，问有多少种就座方式？如果有两人不愿坐在一起，又有多少种就座方式？

解：由公式(1.6)知，8 人围圆桌就座一共有 $8!/8=7!$ 种就座方式。

又由于两人不愿坐在一起，设这两个人为甲和乙，当甲和乙坐在一起时，相当于 7 个人围圆桌而坐，其就座方式为 $7!/7=6!$，而甲和乙坐在一起时，又有两种情况，或者甲坐在乙的右面，或者甲坐在乙的左面，这样一来，甲和乙坐在一起时共有 $2\times6!$ 种就座方式。因此，甲和乙不坐在一起时共有就座方式的种数为

$$7!-2\times6!=5\times6!=3600$$

[例 5] 4 男 4 女围圆桌交替就座有多少种方式？

解：显然，这是一个圆排列问题。先让四个男的围圆桌而坐，由公式(1.6)共有 $4!/4$ 种就座方式。然后加入一个女的进去就座就有 4 种方式，加入第二个女的又有 3 种方式，加入第三个女的又有 2 种方式，加入第四个女的只有一种方式。由乘法规则知，4 男 4 女围圆桌交替就座的方式数为

$$(4!/4)\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=144$$

三、重排列

上面我们讨论了从集合 A(A 中的元素是互不相同的)中选 r 个元素进行排列，在每种排列中每个元素至多只出现一次的情况。现在考虑允许元素重复出现的情况，即考虑在重集 $B=\{k_1\cdot a_1,k_2\cdot a_2,\cdots,k_n\cdot a_n\}$ 中选 r 个元素进行的排列。

定义 1.3 从重集 $B=\{k_1\cdot b_1,k_2\cdot b_2,\cdots,k_n\cdot b_n\}$ 中选取 r 个元素按照一定的顺序排列起来，称这种 r-排列为重排列。

定理 1.3 重集 $B=\{\infty\cdot b_1,\infty\cdot b_2,\cdots,\infty\cdot b_n\}$ 的 r-排列的个数为 n^r。

证明：构造集合 B 的 r-排列可用如下方法：在选择 r-排列的第一项时，可以从 n 个元素中任选一个，因此有 n 种选法。在选择 r-排列的第二项时，由于可以重复选取，仍有 n 种选法。……同理，在选择这样排列的第 r 项时仍有 n 种选法。由乘法规则可求得 r-排列的数目为 n^r。

这个定理也可叙述为：在一个具有 n 个不同元素的集合 B 中，每一个元素都可以重复选取无限多次的 r-排列的个数等于 n^r。同时，B 的 n 个不同元素的重复数都至少是 r，则定理的结论仍然成立。

[例 6] 由 1,2,3,4,5,6 这六个数字能组成多少个五位数？又可组成多少大于 34500 的五位数？

解：一个五位数，数字可以重复出现，这是一个重排列问题。

由于五位数的每一位在重集 $B=\{\infty\cdot 1,\infty\cdot 2,\infty\cdot 3,\infty\cdot 4,\infty\cdot 5,\infty\cdot 6\}$ 中有 6 种选择，由定理 1.3 知，这六个数字可以组成 6^5 个五位数。

又大于 34500 的五位数可由下面的三种情况组成：

(1)万位上的数字是 4,5 或 6，其余四位上的数字中的每一个数字都可以从重集 B 中选取 6 个数字，由乘法规则知，共有 $3\cdot 6^4$ 个这样的数。

(2)万位数是 3，千位上是 5,6，其余三位上的数字中的每一个都可以从重集 B 中选取 6 个数字，故共有 $2\cdot 6^3$ 个这样的数。

(3)万位和千位上的数字分别是 3 和 4，百位上的数字是 5,6，其余两位上的数字中的每一个都可以从重集 B 中选取 6 个数字，故共有 $2\cdot 6^2$ 个这样的数。由加法规则知，大于 34500 的五位数的个数为

$$3\cdot 6^4+2\cdot 6^3+2\cdot 6^2=4392$$

定理 1.4 重集 $B=\{n_1\cdot b_1,n_2\cdot b_2,\cdots,n_k\cdot b_k\}$ 的全排列的个数为

$$\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdots n_k!}$$

式中 $n=\sum_{i=1}^{k}n_i$。

证明：将 B 中的 n_i 个 b_i 分别赋予上标 $1,2,\cdots,n_i$，即 $b_i^1,b_i^2,\cdots b_i^{n_i}(i=1,2,\cdots,k)$。这样一来，重集 B 就变成具有 $n_1+n_2+\cdots+n_i=n$ 个不同的元素的集合 $A=\{b_1^1,b_1^2,\cdots,b_1^{n_1},b_2^1,b_2^2,\cdots,b_2^{n_2},\cdots,b_k^1,b_k^2,\cdots,b_k^{n_k}\}$，显然，集合 A 的全排列个数为 $n!$。

又由于 n_i 个 b_i 赋予上标 $1-2,\cdots,n_i$ 的办法有 $n_i!$ 种，于是对于重集 B 的任一个全排列，都可以产生集合 A 的 $n_1!\ n_2!\ \cdots n_k!$ 个排列(由乘法规则)，故重集 B 的全排列个数为

$$\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdots n_k!}$$

证毕。

［例 7］　由四面红旗、三面蓝旗、二面黄旗、五面绿旗可以组成多少由 14 面旗子组成的一排彩旗？

解：这是一个重排列问题，它是求重集$\{4\cdot$红旗$,3\cdot$蓝旗$,2\cdot$黄旗$,5\cdot$绿旗$\}$的全排列的个数，由定理 1.4 知，组成一排彩旗的种数为

$$\frac{14!}{4!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 5!}$$

［例 8］　用字母 A、B、C 组成五个字母的符号，要求在每个符号里，A 至多出现 2 次，B 至多出现 1 次，C 至多出现 3 次，求此类符号的个数。

解：这也是一个重排列问题。根据分析，符合题目要求的符号只有三种情况：$\{2\cdot A,0\cdot B,3\cdot C\}$，$\{1\cdot A,1\cdot B,3\cdot C\}$和$\{2\cdot A,1\cdot B,2\cdot C\}$。由定理 1.4 知，各种情况对应的符号个数分别为

$$\frac{5!}{2!\cdot 0!\cdot 3!},\quad \frac{5!}{1!\cdot 1!\cdot 3!}\quad \text{和}\quad \frac{5!}{2!\cdot 1!\cdot 2!}$$

由加法规则知，此类符号的个数为

$$\frac{5!}{2!\cdot 0!\cdot 3!}+\frac{5!}{1!\cdot 1!\cdot 3!}+\frac{5!}{2!\cdot 1!\cdot 2!}=60$$

§1.3　组　　合

研究组合的主要目的之一是求出根据已知条件所能作出的不同组合的种数。

定义 1.4　设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$是具有 n 个元素的集合，r 是非负整数。从这 n 个不同的元素里取 r 个不考虑次序组合起来（$r\leqslant n$），称为集合 A 的 r-组合。换句话说，A 的 r-组合是 A 的 r-无序子集。用 $C(n,r)$或$\binom{n}{r}$表示集合 A 的 r-组合的个数。

另外，为了使用方便，我们定义：

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\begin{cases}1 & n\geqslant r=0\\ 0 & n<r\end{cases}$$

定理 1.5　对于 $r\leqslant n$，有

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\tag{1.7}$$

证明：从 n 个不相同的元素里取 r 个元素的组合个数为 $C(n,r)$。而 r 个元素可以组成 $r!$ 个 r-排列，也就是说一个 r-组合对应 $r!$ 个 r-排列。于是 $C(n,r)$个 r-组合就对应 $r!\,C(n,r)$个 r-排列，这实际上就是从 n 个元素中选取 r 个元素组成的 r-排列数 $P(n,r)$，因此有 $r!\,C(n,r)=P(n,r)$。所以

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

证毕。

推论 1 $C(n,r)=C(n,n-r)$ (1.8)

证明:事实上,从 n 个不同的元素中选出 r 个元素,就有 $n-r$ 个元素没有被选出。因此选出 r 个元素的方式数等于选出 $n-r$ 个元素的方式数,即 $C(n,r)=C(n,n-r)$,证毕。

式(1.8)的证明也可由公式(1.7)得出,事实上

$$C(n,n-r)=\frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}=C(n,r)$$

推论 2 (Pascal 公式)

$$C(n,r)=C(n-1,r)+C(n-1,r-1) \tag{1.9}$$

证明:

$$\begin{aligned}C(n,r)&=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n(n-1)!}{r!(n-r)!}\\&=\frac{(n-r)(n-1)!+r(n-1)!}{r(r-1)!(n-r)(n-r-1)!}\\&=\frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!}+\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-1-r+1)!}\\&=C(n-1,r)+C(n-1,r-1)\end{aligned}$$

证毕。

这个公式也可用组合分析的方法论证:

在集合 A 的 n 个元素中固定一个元素,不妨设为 a_1,于是,从 n 个元素中取 r 个元素的组合就有下面两种情形:

(1) r 个元素中包含 a_1。这可以从除去 a_1 的 $n-1$ 个元素中取 $r-1$ 个元素的组合,然后将 a_1 加入而得到,其组合个数为 $C(n-1,r-1)$。

(2) r 个元素中不包含 a_1。这可以从除去 a_1 的 $n-1$ 个元素中取 r 个元素的组合而得到,其组合个数为 $C(n-1,r)$。

由加法规则即得

$$C(n,r)=C(n-1,r)+C(n-1,r-1)$$

利用式(1.9)和初始值 $C(n,0)=C(n,n)=1$,对所有非负整数可计算出表 1-1 的三角形阵列,通常称这个三角阵列为杨辉三角形或 Pascal 三角形。

值得注意的是,如果仔细考察表 1-1,可以发现组合中的一些关系式及其一些有趣的性质,请读者自己做这个工作。

推论 3

$$C(n-1,r-1)+C(n-2,r-1)+\cdots+C(r-1,r-1)=C(n,r) \tag{1.10}$$

证明:反复应用 Pascal 公式容易得到式(1.10)。

[例 1] 在一个平面上有 42 个点,且没有任何三个点在同一条直线上。通过这些点可以确定多少条不相同的直线?可以构成多少个位置不相同的三角形?

表 1-1

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	…
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

解:由于没有三个点在一条线上,故每两个点可确定惟一的一条直线。故有

$$C(42,2)=\frac{42!}{2!40!}=861$$

条不同的直线。

又由于任意三点可以构成一个三角形,故有

$$C(42,3)=\frac{42!}{3!39!}=11480$$

个位置不同的三角形。

[例 2] 有 7 面红旗,6 面蓝旗,9 面黄旗,求:

(1) 从这些彩旗中,取 2 面不同颜色的旗子,共有多少种取法?

(2) 从这些彩旗中取 2 面颜色相同的旗子,又有多少种取法?

(3) 任取两面旗子,不管颜色是否相同,又有多少种取法?

解:利用加法规则和乘法规则,易见有

(1) $C(7,1)\times C(6,1)+C(7,1)\times C(9,1)+C(6,1)\times C(9,1)=7\times6+7\times9+6\times9=42+63+54=159$ 种方法

(2) $C(7,2)+C(6,2)+C(9,2)=21+15+36=72$ 种方法

(3) $C(7+6+9,2)=C(22,2)=231$ 种方法。

[例 3] 数 510510 能被多少个不同的奇数整除?

解:由于 $510510=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17$,其中除 2 是偶数外都是奇数,于是要整除 510510 的奇数只能是除 2 以外的奇素数之积,而且在一个积中一个奇数至多出现一次。奇素数之积分下面几种情况讨论:

只包含一个奇素数，一共有 $C(6,1)=6$ 个

包含二个奇素数，一共有 $C(6,2)=15$ 个

包含三个奇素数，一共有 $C(6,3)=20$ 个

包含四个奇素数，一共有 $C(6,4)=15$ 个

包含五个奇素数，一共有 $C(6,5)=6$ 个

包含六个奇素数，一共有 $C(6,6)=1$ 个

于是，由加法规则知总共有 $6+15+20+15+6+1=63$ 个。

因此，数 510510 能被 63 个不同的奇数整除(除 1 以外)。

[例 4]　从 $1,2,\cdots,1000$ 中选出三个整数，有多少种选法使得所选的三个整数的和能被 3 整除？

解：把具有 1000 个数的集合 $A=\{1,2,\cdots,1000\}$ 分成三个子集合，A_1,A_2,A_3，其中

$$A_1=\{1,4,7,\cdots,1000\}$$
$$A_2=\{2,5,8,\cdots,998\}$$
$$A_3=\{3,6,9,\cdots,999\}$$

$$|A_1|=\left\lceil\frac{1000}{3}\right\rceil=334,\quad |A_2|=\left\lceil\frac{998}{3}\right\rceil=333,\quad |A_3|=\left\lceil\frac{999}{3}\right\rceil=333$$

在 A 中选出的三个数 a_1,a_2 和 a_3，如果 $a_1+a_2+a_3$ 能被 3 整除，则只有下面两种情形：

(1) a_1,a_2 和 a_3 取自同一子集 $A_i(i=1,2,3)$ 中。

(2) a_1,a_2 和 a_3 分别取自不同的子集 A_1,A_2 和 A_3 中。

对于第一种情形，其选法的种数为

$$C(334,3)+2\cdot C(333,3)$$

对于第二种情形，其选法的种数为

$$C(334,1)\cdot C(333,1)\cdot C(333,1)=(334)\cdot(331)^2$$

由加法规则知，符合题意的选法种数为

$$C(334,3)+2\cdot C(333,3)+(334)\cdot(333)^2$$

上面，我们研究了从 n 个不同的元素中选取 r 个不同元素的组合，下面我们考虑从 n 个不同的元素中，允许重复地从中选取 r 个元素的组合，这就是重复组合。

定义 1.5　从重集 $B=\{k_1\cdot b_1,k_2\cdot b_2,\cdots,k_n\cdot b_n\}$ 中选取 r 个元素不考虑次序组合起来，称为从 B 中取 r 个元素的重复组合。用 $F(n,r)$ 表示从 B 中取 r 个元素的重复组合种数。

例如 $B=\{2\cdot a,1\cdot b,3\cdot c\}$，则 $\{a,a\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{c,c\}$ 都是 B 的 2 组合。

在集合 $B=\{k_1\cdot a_1,k_2\cdot a_2,\cdots,k_n\cdot a_n\}$ 中 $k_i=\infty(i=1,2,\cdots,n)$，则有下面的定理。

定理 1.6　$B=\{\infty\cdot b_1,\infty\cdot b_2,\cdots,\infty\cdot b_n\}$ 的 r-组合数为

$$F(n,r)=\binom{n+r-1}{r}\tag{1.11}$$

证明：设 n 个元素 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 和自然数 $1,2,\cdots,n$ 一一对应，于是所考虑的任何组合便可看成是一个 r 个数的组合 $\{c_1,c_2,\cdots,c_r\}$。由于是组合，不妨认为各 c_i 是按大小次序排列