有限元素法導論

Finite Element Method

原作者：Oktay Ural

譯述者：陳　俊　豪

科技圖書股份有限公司

有限元素法導論

Finite Element Method

原作者：Oktay Ural

譯述者：陳　俊　豪

科技圖書股份有限公司

原序

由於高效率電算機之使用，以及日益需要快速而精確的分析複結構問題，導致了結構分析中的有限元素法的發展與應用。有關此種方法的數學基礎，大抵依據矩陣結構分析法。不但問題中的公式表達，均以矩陣符號表示，而其解法亦由矩陣運算求得。

兼顧理論及實用兩個目的。作者嘗試使本書能適合於工科學生及實際工程人員的閱讀，更希望能啓發作進一步廣泛的應用。閱讀本書之前，須具備一些基本彈性力學及結構分析知識。

有限元素法最有利的特性，是將複雜的聯體幾何形狀，以網格狀相接合的元素表示。分析各個元素的工程性質，以代替分析整個結構系統。而由各個元素相疊加，即可表示整個結構系統的情況。採取矩陣運算適合電算機之應用；更可應用於各種工程的領域。

矩陣理論知識以及電算機的運用，是近十五年來工程教育上的兩大要求，亦爲了解及應用有限元素法的基礎。此法的適應性、有效性及一般性，大大的增進工程師們解答問題的能力。

編寫本書，計有六項主要目標：

1. 利用基本的數學運算及符號，儘可能簡易的將有限元素法理論邏輯，完全推導。
2. 討論某些有限元素型態的特性，以及其在工程上的不同應用。
3. 用某些簡單分析問題用的手算解法爲例，在理論推導外，兼顧實際應用的了解。
4. 應用已準備的電算機程式，強調有限元素法運用的簡易與有效。
5. 利用電算機程式推導問題的公式並作解答，以便有全盤完整的了解，並列出由各個不同電算機程式所得的結果並比較之
6. 激發工程師們將有限元素法，應用到其他可能的領域以解決工程問題。

本書前兩章介紹矩陣理論與結構矩陣分析方法的基本知識。第三至第五章所討論的爲，應用位移有限元素法及簡單平面應力問題的普

通解法，以幫助讀者了解有限元素法。

第六章係討論軸對稱性固體的有限元素分析法。既然吾人經常處理的實際工程問題，均可分類成為軸對稱性，因此本章用三角形環面元素分析，頗具實用上的價值。

除了前幾章介紹的各種元素外（常－應變三角形及三角形環面元素）。在第七章另外介紹一些新型態的元素（常－應變長方形元素、線性應變三角形元素、長方形板彎矩元素、三角形板彎矩元素等）。

在第八章中給讀者介紹一般性目標及特殊性目標的電算機程式，使讀者熟知計算機程式的型態及其特性。讀者可循個人的興趣選擇其適當者用之。

在第九章中，研究 ICES - STRUDL 的基本定義。ICES - STRUDL - 為一般性目標的電算機程式。使讀者至少熟知一種常用的電算機程式，以補助普通解法的不足以達到實際應用的目的。在第十章中討論有限元素法對於土木工程問題的其他領域的應用。

感謝辭略

Oktay Ural　烏拉爾

目　　錄

第一章

有限元素法用之矩陣運算

Matrix Operations Related to Finite Element Method

1·1 引言

結構工程，包括設計與分析兩項範疇，愈來愈要依賴數位電算機作其工具。其中設計工作須具經驗與預料（ foresight ） 能力，而分析運算則循一定的步驟與理論。後者更能達到自動化（ automation）計算程序。在本書一方面使讀者熟悉結構分析問題，更期能實際應用於同一結構系統的設計方面。

數位電算機性能，能迅速而有效運用矩陣以作結構分析問題的運算。因此，吾人首先將結構分析問題，寫成矩陣公式形式。對結構分析負有責任的工程師，自須熟知矩陣理論（ matrix theory ）及矩陣運算（ matrix operation）。由於本書所討論的有限元素法（ finite element method)，無論其理論研究，或是實際應用與矩陣符號（matrix notation）及其運算不可分離。因此更需要矩陣的知識。

矩陣觀念，首由阿瑟·加萊（Arthur Cayley)（見本章參攷書1）於1858年提出。在本書的第一章中將與有限元素法有關的矩陣觀念及運算法全部提出。

矩陣（matrix），謂將數字安排成行（row）與列（column）的矩形排列（rectangular array)，適合於解答線性方程組問題（system of linear equations）。下述爲一典型的線性方程組n個表示式

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
\tag{1-1}
$$

如用矩陣形式表之，公式1-1可寫成

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & & & & \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \\ x_n \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \\ b_n \end{Bmatrix}
\tag{1-2}
$$

公式（1-2），亦可用大寫字母來表示矩陣形式

$$[A][X] = [B]$$

其中〔A〕爲係數矩陣（coefficient matrix)，〔X〕爲未知矩陣（nuknown matrix)；〔B〕爲常數矩陣（constant matrix)。

將矩陣次序稍加變化排列，即可得其未知量，表示如下

$$[X] = [A]^{-1}[B] \tag{1-3}$$

矩陣系由各行列元素所構成。元素數字與其在矩陣內位置座標，

均以右下角註標（ subscripts ）表之。第一個註標用以定義元素之行（ row ），第二個註標用以定義元素之列（ column ）例如，元素a_{59}表示在矩陣內第五行及第九列相交位置的元素值。此項註標符號對於矩陣運算非常便利。矩陣僅有一行者，稱爲行矩陣（ row matrix）。反之，矩陣僅包括一列者，稱爲列矩陣（ column matrix ）。由上述說明，吾們知道矩陣是由其行數及列數兩定義的長方形排列。矩陣內的元素可以爲數值，數學式或字母等。通常矩陣，可按照行、列元素的各種情況而分類。現將其介紹如下：

定義：

(1)零矩陣（ nuli matrix）：在矩陣中之所有元素值均爲零。

$$[N] = [0]$$

所有矩陣與零矩陣之乘積，皆爲零矩陣。

(2)方矩陣（ square matrix ）：矩陣的列數與行數相等者。這是一種特種型式，只有此方矩陣，存在行列式（ determinant ）值的。

(3)同一矩陣（ identity matrix ）：方矩陣中，僅在對角線上各元素值爲 1 。其餘元素皆爲零。又稱爲單位矩陣（ unit matrix ）。任何矩陣與單位矩陣之乘積，仍爲原矩陣（ initial matrix ）：

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1-4}$$

$$[A] = [I] \quad \text{if} \quad a_{ij} = 1 \quad \text{for} \quad i = j$$
$$a_{ij} = 0 \quad \text{for} \quad i \neq j$$

(4)對稱矩陣（ symmetric matrix ）：矩陣中的元素依對角線成對稱者，亦即 $i \neq j$，而 $a_{ij} = a_{ji}$ ，則矩陣 A 稱爲對稱矩陣。

(5)歪對稱矩陣（ skew-symmetric matrix ）：矩陣中的元素依對角線成對稱，但其爲符號相反者。（即絕對值相同）。亦即 $i \neq j$ 而 $a_{ij} = -a_{ji}$ ，則矩陣 A 稱爲歪對稱矩陣。

⑹對角矩陣（diagonal matrix）：方矩陣中僅對角線上的各元素有值，其餘元素皆爲零者。單位矩陣，亦爲對角矩中的一特例。亦即 $i \neq j$ 而 $a_{ij}=0$ 者。則矩陣 A 稱爲對角矩陣。

⑺三角矩陣（triangular matrix）：在方矩陣中，對角線之上方或下方其値皆爲零者。三角矩陣可區分爲上三角矩陣（upper triangular matrix）及下三角矩陣（lower triangular matrix）

⑻列矩陣（column matrix）：矩陣中僅有一列者。

⑼行矩陣（row matrix）：矩陣中僅有一行者。

⑽矩陣倒置（to transpose a matrix）：將矩陣之列改爲行，行改成列，經倒置後所成的矩陣，稱爲原矩陣的倒置矩陣。二矩陣乘積之倒置矩陣，結果相同於第二個矩陣的倒置矩陣乘以第一個矩陣的倒置矩陣。

$$[A\cdot B]^T = [B]^T\cdot[A]^T$$

⑾反矩陣（to invert a matrix）：反矩陣運算求法，將於本章後節討論之。若一新矩陣與原矩陣之乘積爲單位矩陣，則此新矩陣稱爲原矩陣之反矩陣。

⑿矩陣之行列式（determinant of a matrix）：與方矩陣相關的數值。定義矩陣〔A〕行列式計算之一般表示式爲：

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\cdot(\mathrm{cof}\, a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot(\mathrm{cof}\, a_{ij})$$

公式的討論，詳見公式（1-10）。

⒀奇矩陣（singular matrix）：方陣之行列式値爲零者。

⒁正交矩陣（orthogonal matrix）：矩陣的倒置矩陣與反矩陣相等者。亦即 $[A]^T=[A]^{-1}$ 時，矩陣〔A〕稱爲正交矩陣。

矩陣運算：

利用有限元素法分析結構問題時，首須明瞭矩陣加法、乘法、反矩陣、矩陣相等諸數學的運算。此種數學運算，玆分別作定義如下：

⑴矩陣相等（matrix equality）：所謂兩矩陣相等，係指兩矩陣有相同因次且其各對應元素均爲相同。若兩矩陣的行數及列數相同

，則稱兩矩陣有相同因次（ same dimensions ）。且就任意 i 與 j 而言，〔A〕矩陣中之元素 a_{ij} ，等於〔B〕矩陣中之元素 b_{ij}。則此兩矩陣爲相等。

(2)矩陣加法及減法：兩個或多個矩陣相加，必須在各個矩陣有相同因次時，始能成立。

$$[A] + [B] + [C] = [D]$$
$$(a_{ij}) + (b_{ij}) + (c_{ij}) = (d_{ij})$$

矩陣加法與減法運算，均能滿足結合律及交換律。

(3)矩陣乘法：兩矩陣相乘時，必須第一個矩陣的列數，等於第二個矩陣的行數爲條件。

$$[A]_{m\times n}\cdot[B]_{p\times r} = [C]_{m\times r}$$

上列之矩陣乘積運算，當 n 等於 p 時始能成立。矩陣乘積的數學運算（ mathematical process ）用下列表示之

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \tag{1-5}$$

吾們以下例來說明此式

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2\times 1)+(5\times 4) & (2\times 0)+(5\times 3) \\ (9\times 1)+(7\times 4) & (9\times 0)+(7\times 3) \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 2+20 & 0+15 \\ 9+28 & 0+21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 15 \\ 37 & 21 \end{bmatrix}$$

矩陣之乘積運算，均能滿足結合律及交換率。

$$[A\cdot B]\cdot[C] = [A]\cdot[B\cdot C]$$
$$[A]\cdot[B + C] = [A]\cdot[B] + [A]\cdot[C]$$

矩陣之乘積運算，不能滿足交換律：

$$[A]\cdot[B] \neq [B]\cdot[A] \tag{1-6}$$

在討論求反矩陣法之前，首將用作反運算的行 列式及伴隨（ adjoint 矩陣等基本觀念分別給予定義。

1·2 方矩陣之行列式

方矩陣之行列式，乃爲對應於該矩陣的一個數值。此數值可循一定的數學運算求得之。

(a)就 n 大於或等於 3 的任意 $n \times n$ 方矩陣，其行列式值，可循餘因式展開方法（expansion by cofactors）求之。

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot (\operatorname{cof} a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (\operatorname{cof} a_{ij}) \tag{1-7}$$

矩陣〔A〕中的元素 a_{ij} 之餘因子（cofactor，cof a_{ij}）被定義爲

$$(\operatorname{cof} a_{ij}) = (-1)^{i+j} (\operatorname{minor} a_{ij})$$

而元素 a_{ij} 的子行列式（minor a_{ij}）被定義爲，將行列式A中第 i 行及第 j 列刪除後所剩餘的行列式。吾人用下例說明之：

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= (a_{11})(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (a_{21})(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&\quad + (a_{31})(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \\
&\quad - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})
\end{aligned} \tag{1-8}$$

(b)就一個 2 × 2 方矩陣。其行列式被定義爲：

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \tag{1-9}$$

(c)就一個 3 × 3 方矩陣，吾們可利用交叉相乘方法（cross multiplication procedure）得之。但只能適用於 3 × 3 方矩陣。

$$
|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccc} & & (+) & & (-) \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \tag{1-10}
$$

$$
\begin{aligned} |A| &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{23}a_{12} + a_{32}a_{21}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} \\ &\quad - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{aligned}
$$

(d)另外一個有效的計算具數字元(mumerical elements)行列式方法，爲樞擬(pivotal condensation)法。利用此法，可將矩陣的行列式，由 2 × 2 矩陣的次行列式(subdeterminants)值求得。

$$
|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
|A| = \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \vdots & & & \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}
$$

吾人用下列數值例題加以說明如下：

例題 1 - 1

利用樞擬法，求已知方矩陣的行列式

$$
[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
|A| = \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{vmatrix}
$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 3 + 3 = 6$$

作行列式運算時，吾人有下列六項規則可用。

(1)將方矩陣的兩列，或兩行互換，行列式值僅變換其正負號。

(2)將方矩陣中一列或一行同乘一常數，則所得新矩陣的行列式值，爲原矩陣行列式值乘該係數之所得值。

(3)假若方矩陣中有二列或二行相等，或是此二列或二行各爲常數之倍數關係，則行列式值爲零。

(4)若有一行或一列元素全爲零，則行列式值爲零。

(5)方矩陣的倒置矩陣，其行列式值不變。

(6)若方矩陣中某一列或某一行乘以常數，再加上另一列或另一行所得新矩陣的行列式其值不變。

1·3　伴隨矩陣

矩陣〔A〕的伴隨矩陣，被定義爲以〔A〕矩陣的餘因子爲元素所組成矩陣的矩陣轉置。以下列符號表示之

$$\text{adj}\,[A] = [\text{cof}\,A]^T \tag{1-11}$$

例題 1 - 2 .

試求下例〔A〕矩陣的伴隨矩陣，並寫出一般表示式

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

步驟 1　求矩陣A之餘因子矩陣。

$\text{cof}\,[A] = (-1)^{i+j}\,(\text{minor of }[A])$

$$\operatorname{cof}[a_{ij}] = \begin{bmatrix} \operatorname{cof} a_{11} & \operatorname{cof} a_{12} & \operatorname{cof} a_{13} \\ \operatorname{cof} a_{21} & \operatorname{cof} a_{22} & \operatorname{cof} a_{23} \\ \operatorname{cof} a_{31} & \operatorname{cof} a_{32} & \operatorname{cof} a_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) & -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) & (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ -(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) & (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) & -(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) \\ (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) & -(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) & (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \end{bmatrix}$$

步驟 2　求餘因子矩陣之矩陣轉置。

$$\operatorname{adj}[A] = [\operatorname{cof} A]^T = \begin{bmatrix} \operatorname{cof} a_{11} & \operatorname{cof} a_{21} & \operatorname{cof} a_{31} \\ \operatorname{cof} a_{12} & \operatorname{cof} a_{22} & \operatorname{cof} a_{32} \\ \operatorname{cof} a_{13} & \operatorname{cof} a_{23} & \operatorname{cof} a_{33} \end{bmatrix}$$

1·4 反矩陣

求反矩陣之方法很多，在此將列舉一些適用的方法。吾人須注意，只有方矩陣才有反矩陣。

(1)利用伴隨方法求反矩陣

$$[A]^{-1} = \frac{\operatorname{adj}[A]}{|A|} \tag{1-12}$$

例題 1 - 3

解下列線性方程組

$$\begin{aligned} 2x + 8y + 4z &= 1 \\ 7x + 3y + 5z &= 2 \\ x \qquad + 6z &= 3 \end{aligned}$$

以矩陣符號來表示，可得

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 7 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$$