依照教育部修正課程標準編輯

復興高級中學教科書

平面幾何學

胡敦復　榮方舟編著

商務印書館發行

編輯大意

1. 本書依照民國二十五年部頒修正高中算學課程標準編著.

2. 本書共分十一編四十六章.分訂平面幾何學立體幾何學二册,其編章之程序分配,完全以學者進修之便適為標準.

3. 幾何學為最謹嚴之學.一語不可隨便,語語須有根據.本書一方面將一切需用定理從頭依次證明不令遺漏,一方面將學者於初中幾何中已習知之定理用最簡括之法述之.使學者既收複習之功而又不感重複乏味.

4. 本書於第一編之末分別詳述證題之方法,加以各種例題.學者至此,初中時所覺幾何之困難蓋可釋然矣.

5. 軌跡作圖題,學者最視為畏途.本書至第二編之末始詳論之.並舉種種例題詳述其解法.務使學者有所依據,不致茫然.

6. 關於面積之定理除等積形外常可歸納於比例中.故幾何學教科書往往先論比例而於面積則甚略.然如此則將使學者失去面積之觀念,幾視矩形為兩線分之相乘積,不復知其為一二向度之平面部分之量矣.故本書特在未講比例之前先專編論面積.且開始特定"面分"一名詞,先論等積異形面分,次論正方形及矩形,如此,學者對於面積之眞意義,庶幾明瞭無遺矣.

7. 量與數學者務宜辨別清楚,本書至比例之末第二十五章,始論單位及數.在此章之前,一切圖形,不定單位,皆爲一獨立量.不羼入一毫數之意義.至二十五章比例之末,此時學者於幾何中各量已一再研究深印腦際,方論單位及數,即以避免學者對於量及數之混淆不淸也,故圓心角,圓周角與弧之關係,亦至此始論及之.

8. 根軸,相似中心,調和線束,極大極小等,爲初中幾何所或未涉及者.本書集爲一編,學者至此雖未可云窺見初等幾何之全豹,然已可覺得圖形之變化莫測,愈鑽研愈精深而有味也.

9. 作圖題爲幾何學中最難解者,在未論比例之前作圖題之範圍尙狹,多數作圖題,須賴面積比例之定理方得解,第十六章所論僅爲作圖題之意義及初步解法,故於平面幾何學之終再專編分類論之.

10. 普通幾何學教科書對於立體幾何學,常專重面積體積之計算,對於理論方面幾付闕如,本書依據最近部頒課程標準立體幾何學專爲高中理組修習故對於理論較多,並於第十一編雜舉各例以示各種解法之一斑.

11. 本書對於例題之選擇非常注意,凡過於艱澀及無甚意義者,概不選入.故習題爲數雖少而精彩特多,學者務須按題演習,定收事半功倍之效也.

12. 本書編著怱促,難免錯誤,希高明正之.

民國二十五年二月編者識

目　錄

平面幾何學

緒　論

§1. **幾何學之目的**　學者於幾何學，在初中已涉獵得其大概．然常有"幾何學究有何用"之疑問．蓋幾何學所論者爲虛空圖形，不着實際，故其爲用不著．夫吾人之思想必須整理，猶筋肉之必須操練然．體操之爲用，盡人知之．在操場上作一小時之步行，結果未出操場一步．蓋其目的固不在乎路程之走得而在乎筋肉之操練．幾何之爲用亦然．在課室中作一小時之習題，結果並無何等實用．蓋其目的亦不在乎問題之解決而在乎思想之整理．顧筋肉之操練易，思想之整理難．因思想爲空虛的，必有所依着，方可作有秩序之練習．幾何學實爲整理吾人思想之唯一工具．依據圖形，推求眞理，以整理吾人之思想，使有條不紊，此幾何學之主要目的也．

§2. **幾何學之要素　體面線點**　幾何學爲研究圖形之學．圖形之要素，不外乎體，面，線，點．學者於初中幾何已習知之．玆不嫌重複再分別述之．

空間有限部分曰體(solid)．體有形象，有大小，有位置．但非實

質,故與物體不同.物體於形象之外尙有性質,有色有味,或堅或柔.幾何中所謂體,則舍形象、大小、位置外,絕無他物.體有三個向度(dimensions),爲長(length),廣(breadth)及高(height).

體之分界曰面(surface).面有兩個向度,爲長及廣.面無高,故面不占有空間位置.

面之分界曰線(line).線有一個向度,爲長

線之分界曰點(point).點無向度

體,面,線,點,或分或合,統稱曰圖形(figure).

試就運動觀察體、面、線、點之關係.點在空間只有位置而無向度.設點在空間移動,從一個位置移至他一位置,其所經空間之跡,便有一個向度,長.故點移動成線.線有一個向度,若在空間移動,則其所經空間之跡,便又添一向度,廣.故線移動成面.面若在空間移動,則其所經空間之跡,便又添一向度,高.故面移動成體.體占有了空間一部分,設體之三個向度遞減,減小至無,此時已不復有向度,即已不復占有空間部分.然其位置固仍存在.此即所謂點也.

§3. **定義** 用特殊名詞表特殊圖形曰定義(definition).

§4. **定義一 直線 曲線** 固定一線上任意兩點之位置將此線旋轉.若此全線之位置一無改變,則此線曰直線(straight line)一線中無一部分爲直線者曰曲線(curve).

直線常簡稱曰線.故以下若但云線時,常指直線而言.

§5. **定義二　平面　曲面**　過面中任意兩點之直線若全在此面中，則此面曰**平面** (plane). 一面無一部分爲平面者曰**曲面** (curved surface).

§6. **定義三　半射線　線分　折線**　一端有界，一端無界之直線部分曰**半射線** (half ray). 半射線一端之界曰**原點** (origin). 兩端均有界之直線部分曰**線分** (line-segment). 諸線分連接所成之非直線曰**折線** (broken line).

§7. **定義四　角**　共一原點之兩半射線分此兩半射線所在之平面爲兩部分，此各部分皆曰**角** (angle). 兩半射線曰角之兩**邊** (side). 所共原點曰角之**頂點** (vertex). 試就運動觀察半射線與角之關係. 設一半射線固定其原點在平面中旋轉，從一個位置轉至他一位置，其所經平面上之迹便是角. 半射線不占有平面，角則占有平面一部分. 設一角之頂點不動，而減少其所占平面部分，減至於無. 此時角之兩邊合而爲一，即爲一半射線.

§8. **線分大小之比較　角大小之比較**　線分與角爲幾何學中兩個重要之量. 凡同類量可比較大小. 故兩線分可比較大小，兩角可比較大小. 幾何學中關於量之比較，重直接，常不假助於單位. 設有甲乙兩線分欲比較其孰大孰小. 將甲合置於乙上，使甲之第一端合於乙之第一端，然後觀察其第二端之關係. 若甲之第二端亦合於乙之第二端，則此二線分相等. 若甲之第二端在乙之外，則甲大

於乙.若甲之第二端在乙之內,則甲小於乙.設有甲乙兩角,欲比較其孰大孰小.將甲之頂點合於乙之頂點上,且令其一邊相重,然後觀察其第二邊之關係.若甲之第二邊亦合於乙之第二邊上,則此二角相等.若甲之第二邊在乙之外,則甲大於乙.若甲之第二邊在乙之內,則甲小於乙.

§9. **合同圖** 兩個圖形,位置不同.然當第一圖形移置於第二圖形上,而二圖能完全密合時,則此二圖曰合同圖 (congruent figures).

合同圖亦稱**全等形**.合同圖之重合部分曰**對應部分**.等線分及等角皆爲合同圖.

§10. **公理** 凡公衆認爲眞確而毫無疑義之眞理無待證明者曰**公理** (axiom).

公理分二類 不專屬於幾何圖形的公理曰**普通公理** (general axiom).專屬於幾何圖形的公理曰**幾何公理** (geometric axiom).

§11. **普通公理**

1. 全量等於其各部分之和;全量比其任何一部分大.
2. 等量加等量,和相等.
3. 等量減等量,差相等.
4. 等量的同倍數量相等.
5. 等量的同分數量相等.

6. 不等量加等量和不等,原大者和亦大.

7. 不等量減等量差不等,原大者差亦大.

8. 等量減不等量差不等,所減者大差小

9. 不等量之同倍數量不等,大量之倍量大.

10. 不等量之同分數量不等,大量之分量大.

11. 若甲量大於乙量,乙量大於丙量,則甲量大於丙量

12. 若甲量大於乙量,丙量大於丁量,則甲、丙二量之和大於乙、丁二量之和.

13. 若甲量大於乙量,丙量小於丁量,則甲量減丙量之差大於乙量減丁量之差.

14. 等式中任何量以其等量代之,此等式依舊成立(等於等量之量相等).

15. 不等式中任何量以其等量代之,此不等式依舊成立.

16. 諸量相加,若改換其加時先後次序,其和不變.

17. 甲乙二量比較大小,或甲大於乙,或甲等於乙,或甲小於乙,三者必居其一.

§ 12. 幾何公理

一. 圖形可不變其形象大小而任意變其位置.

二. 合同圖之量必相等.

三. 過二點之直線有一無二. 由此更可推得數事:

(a) 二直線有二點重合或有一部分重合，則此二直線完全重合

(b) 疊置二直線可令全線相合，且令各線上之任意一點相合

(c) 二直線只能交於一點.

四. 二點在一平面之兩旁，則其聯線必與此平面相交.

五. 在一平面內，二點在一直線之兩旁，則其聯線必與此直線相交.

六. 線分爲其兩端間之最短路徑.

幾何公理，不止以上數條. 以後隨時添補.

§ 13. **定理** 根據定義、公理等已認爲眞確之事而證明之眞理曰定理. (theorem).

定理常分爲二部分. 一曰假設 (hypothesis), 一曰終決 (conclution). 假設者，假定已知眞確之事. 終決者從假設根據公理或已證明之定理可證其爲眞確之事也.

§ 14. **系** 從已證明之定理略加推想，卽可斷定爲眞確之定理曰系 (corollary).

§ 15. **幾何學之分類** 專論同一平面中各圖形者曰平面幾何學 (plane geometry), 不專論同一平面中各圖形者曰立體幾何學 (solid geometry).

§ 16. **圖形之表法** 凡點常以 A, B, C …等大體字母表之.

直線.半射線,線分皆以二點表之,即連書二個大字母如 AB, AC, BC ····等.直線可寫其上任意二點.半射線以一原點及其上任意又一點表之.線分以兩端點表之.角以頂點冠以 $\angle$ 號表之,如 $\angle A$, $\angle B$ ···等.有時數角共一頂點時,則須連書三字母冠以$\angle$號以資區別,如 $\angle BAC$,其中 A 為頂點; B, C 為二邊上各任意一點.其他圖形之表法,下文隨時添註.

§17. **語言之符號**　凡常用之語言,為敍述簡單計,以符號代替如下:

語　言	等　於	大　於	小　於	不等於	不大於	不小於	幾等於
符　號	$=$	$>$	$<$	$\neq$	$\ngtr$	$\nless$	$\doteq$

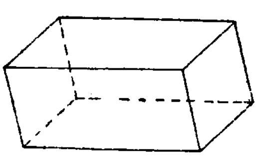
語　言	合同於即全等於	相似於	加	減	因	故	平　行	不平行
符　號	$\cong$	$\backsim$	$+$	$-$	$\because$	$\therefore$	$\parallel$	$\nparallel$

語　言	平行且等於	垂　直	即為所求	即為所證
符　號	$\stackrel{\parallel}{=}$	$\perp$	$Q.E.F$	$Q.E.D.$

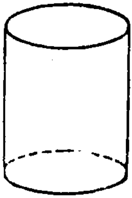
習　題　一

1. 直方體有多少面,多少線,多少點?

2. 圓柱體有多少面,多少線,多少點?



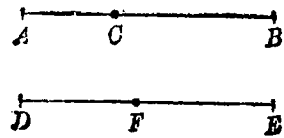
長方體



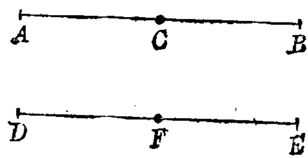
圓柱體

3. 線分 AB 上有 C,D 兩點. 若 $AC=DB$, 則 $AD=CB$. 此理合於普通公理第幾條?

4. 已知圖中 $AB=DE$, 又知 $AC<DF$. 則 CB, FE 之比較如何? 且述其根據.

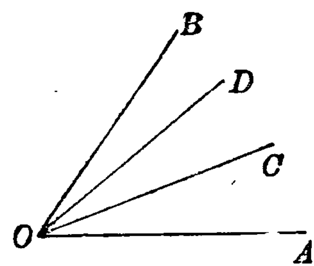


5. 已知圖中 $AB=DE$, 又知 $AC=CB$, $DF=FE$. 則 AC, DF 之比較如何? 何故?



6. 已知 $\angle AOD>\angle COB$. 則 $\angle AOC>\angle DOB$. 何故?

7. 若 $\angle AOC>\angle COD$, $\angle COD>\angle DOB$, 則 $\angle AOC>\angle DOB$. 何故?



8. 線分 AB 上有 M,N 二點. 若已知 $AM=MB$, 試說明 $AN>NB$.