百科小叢書

算學的性質

來斯著
殷佩斯譯

王雲五主編

商務印書館發行

四二四四上

中華民國二十三年四月初版
八月再版

（一一九七五）

百科小叢書 算學的性質一冊
The Nature of Mathematics

每冊定價大洋貳角伍分
外埠酌加運費匯費

原著者 James Rice

譯述者 殷佩斯

主編兼發行人 王雲五 上海河南路

印刷所 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

（本書校對者朱應福）

綱　要

引言：　算學與人類的實際需要——算學與計算及測量之技術有別——埃及人，希臘人，印度人及阿拉伯人之貢獻。

數：　數的演算之定律——應用於數之交換定律，綜合定律，及分配定律——加號，減號，及括弧之使用——代數記號——整數——分數與小數——無理數——正數與負數——關於人類實際活動每一階段之數的意義之普遍化。

代數學：問題與代數記號——公式——代數演算之基本定律，——代數式之因子分解——代數記號非僅爲"縮寫"——論理的原理與算學的原理——方程式——"algebra"名稱之原始——二次

方程式之解法及雙根——方程式與實用問題——虛數——一數之"冪"的觀念之普遍化——代數學開始是普遍化的算術，後來變成處理自然現象之變量的有力的武器——函數。

幾何學：空間物體之展伸——面，線，及點是物體的眞實性之抽象——幾何學是論此類抽象的——歐幾里得的大著：其內容之簡略的概論——公理與假設——作圖與證法——歐幾里得關於平行線的著名的假設——歐氏的一切結論悉依賴此假設——旁涉於我們的物理空間之實際觀察的事物。

極限，微積分，週期數：由觀察運動物體而引起的極限之觀念——宇宙是事象之流而不是靜的佈置——微分：對於物理學的定律之重要——應用於曲線之長的的觀念——積分：——會聚級數與發散級數——三角術與週期函數。

算學的性質

引　言

科學的研究起源於人類的實際需要，算學雖然是科學中之最抽象的，但在這方面也不能例外。在人類的原始需要中我們能見到算術的計算之開始，即人在交換物品或均分其獵獲品的時候，不得不計算到能維持其均分或交換之約略的公平。在較安定的境况中，耕田代替了畋獵，成爲一民族的生命之活動時，必需把墾過的面積分成適當的部份派給各個家族，因此便逼迫着他們生出些測量的初步觀念來。到現在，一提及"算學"這名詞時，在尋常的男人或女人的心中所引起的第一個觀念，便關聯到算術計算的技術，或解決幾何學問題的技巧。這是眞確

的，我們學校中的教育已發展到如此，以致代數學這題目，呈現到聽講者的心上，正和三角術及微積分學一樣。但對於受過善良的中等教育之尋常的男女學生，代數學仍是“普遍化的算術”(Generalised arithmetic) 其中的計算是用字母來代替“眞實數目”的；三角術是代數學或算術與幾何學之混合；微積分學是一種特別的研求“好像”是代數學，所不同的是它有一種希奇的運算，可以由充分的實習與精勤而得專門的熟練，但論到它的理由和目的，迄今仍多少保留着些神秘。因此，不管我們的一切曲解，“算學”這名稱構成的些觀念，與其說是關聯到“科學”，毋寧說是清楚地關聯到“技術”，它的養成是人類原始需要之一，當任何社會生活之形式，無論是根據食物之取得，或食物之產生，現實的時候。

我們人類的些初期的天才者，誰首先識認“一”“二”與“許多”之間的差別，誰又進一步把“許多”區分成“三”“五”“十”等等，於是誰又知道，一隻手或兩隻手上手指的數目，及脚上脚趾的數目是幫助計數的一種極方便的機械；或者誰採集了些火石或石子，將它們一個一個

的放下；於是指示給他的同伴以他們所要運去的數目，於是又知道這樣互相傳達意見的方法太笨，便發明了聲音和符號，把數目的觀念傳送給聽者。——對於這些天才者我們誠然沒有什麼記載。但是，僅僅計數，畢竟缺少一種特性使算術成為算學的科學之一，並且是其中最基本的。我們很難確實知道，在人類思想中從計數至認"數"的本身之研究為一種興趣之對象，這樣巨大的進步，卽何時我們開始知道，六塊石子，六枝箭，六個人，六棵樹，其中有一些共同的東西，不是石子，不是箭，不是人，不是樹，只是那個"六"；何時人類的心上開始明白，"數"離開被數的物體而有其本身的興趣，並且在一切計數的情態中呈現一統一的行為（這便是一切可用科學的方法總結算的事實之特性）。六隻羊與四隻羊合成十隻羊的一羣，六塊石子與四塊石子合成十塊石子的一堆，實則六與四總是合成"十"不管那些對象是什麼，這便是一種科學的綜合，這一定費了原始時代的那位牛頓先生的許多心力，並且使他博得他的些天稟較低的同伴們之讚許與尊敬。我們可以假定，他是一位宣教士或醫生。當我們研究到埃及與巴

比倫人之文明時，便有些記載表明這樣純理智的研究是教士階級之特殊的領域。但是卽在這些大國裏，儘管有它們的一切財富文物及豪華，而算學知識之眞實本性却沒有被認識出來。這陳述可以用一簡單的說明給讀者以證明。測量是埃及人的一種必需的技術。尼羅河每年的泛濫把它兩岸的耕地間之界線通統掃蕩去了。水退下去之後，各民族間土地之重新劃分必得要實行，於是大家以實地經驗而知道了一大組的測量命題，卽如何求得一個三角形的面積。但這對於埃及人只是"土地測量"。要想離開田畝而知道些形式或圖形，猶如離開物質的事物而另知道一些，這種欲望顯然從沒有發生在他們的心中。首先使它作精神上之發揚的是希臘人，雖然他仍謙遜地保留埃及的名稱"幾何學""Geometry,"這字字面上的意義是"土地之測量"，而實際當它為一種心智的訓練，其不復像埃及的原型，猶如交響樂之與村俗調。再者，埃及人有他們的金字塔及廟宇之精巧的建築者，他們的些工具中有一種是一根繩用結分成十二等分。他們用這個做成一個三角形的三邊，各邊之長是 3，4，及 5，並且他們知

道較短的兩邊之間所夾的一個角是直角。但是離開了線，繩，及特別的大小而思考那直角三角形本身的，却是一位希臘人，而不是埃及人，這位希臘人並且發見了一條偉大的定理，卽弦的平方等於兩短邊的平方之和。尋常人或許不知道，這條定理，卽著名的畢達哥拉斯(Pythagoras)的發見，確實走進了我們對於物理的空間之一切觀念中，並且由於它的近世的展伸，形成一個出發點，用以介紹任何測量的方法到近世思想之幼兒，卽相對論者的"時空"中。

為知識而愛知識，成為黃金時代的希臘人的一種熱情；所以這是很自然的，算學這字之適當意義的初期發展便是他們的天才之表現。在他們看來，數是一個動人的題目，完全離開計算的技巧或被計數的物品之特別性質；於是圖形的一般定律運用了他們的知力完全離開我們日常生活中所習見的實物之無窮的形態。

"Mathematics"這字發見在柏拉圖時代的希臘文字中，但沒有特別形成它後來所取得的意義。對於那位大哲學家 Mathema（這字字面的意義是"一件學習的事物"）

這字的意義是任何教授或研究的科目。可是他在"定律"中確說,三個科目是特別適合於自由人的;那三個科目是算術,測量的科學(意即我們現在的幾何學),及天文學。他的注重這三個科目才逐漸使 mathema 這字專門用於這三種及其類似的對象之研究,因此在亞里斯多德時代,這爭論很是激烈,亞氏的些信徒說明這字的特殊用處,指出修辭學,詩學,音樂或文學這類科目,一個人卽使沒有學習過,也能了解它們,但是那些統括在 Mathemata 這名詞之下的科目決不會爲任何人所能了解,除非他對於它們受過有定程的教授。Mathematike 這字的第一次應用是在畢達哥拉斯時代,約在柏拉圖以前一世紀以上,並且在畢達哥拉斯派看來,這字似乎實際上已有些爲後來衆所公認的歸屬於它的專門意義;雖然如此,在亞理斯多德時代,Mathematics 這詞,字面的意義是"適合於學習的事物",曾確定其本身是關於算術,幾何學,天文學,光學等類科目的,這些科目被認爲是超出其他科目以上的些事物,最適合於文明人於其內領受敎育。

希臘思想家的心中對於這些事件很是清楚,所以他

們用完全不同的字來分別這些高尚的心之訓練與那些日常生活及事務上的技術和實用。例如，柏拉圖用"算術"(arithmetic)這名詞，其意義和現在學校課程表上所用的正相同，但另用一個不同的字"計算法"(logistic)來表示計算的技術。因此他要論及"神速計算者"(Lightning Calculator,)和那些能合計成行的數字又快又準的人，稱他們爲天生的精通計算者，但他卻不稱他們爲"算術家""Arithmeticians,"除非他們曾表現自己能研究並握住眞確的數之理論，與計算顯然有別。他並不輕視計算法，因他承認，天性遲鈍的人可以由它而習得靈敏些，並且它是日常生活中所很必需的一種技能；但他却認爲這種計算技術的獲得，不過是爲研究眞正科學的一種預備。同樣地，在亞理斯多德時代，"幾何學"(Geometry)與"測地學"(Geodesy)之間也畫了一個清楚的區別，前者是我們現在所用的幾何學意義（雖然這字的原始意義是"土地測量"），後者我們應稱之爲"測量"，不僅是陸地測量並包括一切長度，面積及體積之實際的測量。亞理斯多德似乎是第一個指明算學間的畫分的，這種畫分

直到現在均爲一切學校及大學課程上所認可，卽普通科學之分別爲兩枝，"純粹的"與"應用的。"他認力學，光學，音調學是算學中之較物理的支派，指明這些科目中的命題之證明依賴着幾何學及算術等純粹算學的科目。

雖然算術及幾何學等名詞是導源於希臘人，但我們切不可忘記，印度人曾獨立地開發了這些科目，並且我們現在的計數法也導源於印度人。1，2，3，等字形是我們從印度人的著作中所用的各種符號抄寫而來，旣代替了希臘的用字母計數的方法，又代替了羅馬的累贅的數字 I, II, III, IV, 等等。

一提及"算學"這字，便有三個科目的名字跳到尋常人的心上，但這三者之中的第三個，代數學，我們還沒有講到。"Algebra" 這字的起源是阿拉伯文，它的第一次出現，是在第十世紀的一位阿拉伯的算學家 Al Khowarazmi 的一部著作中，但是算學中的些運算，我們所稱爲"代數的"，當然要早得多，並且，它的較幼稚的形式，竟要回溯到埃及人。一位希臘人，卽亞歷山大城的帶奧蕃塔斯 (Diophantos)，約在第四世紀之中葉，曾寫了一

部關於它的著作，算是西方的第一部代數學，並且實際上已把這科目發展得很高比之希臘人，因爲希臘人的特別天才較接近於幾何學。阿拉伯的代數學也是從印度人學習得來的，並把它帶到西方。在解釋方程式中，有一個著名的運算法，即方程式這一邊的些量可遷移到那一邊只消變一下符號。這種遷項認爲是些分離的量之復合，古人以爲是一種極重要的運算法。阿拉伯人 Al Khowarazmi 寫他的論文時，他稱這種運算法爲 "al-jabr m'wa'l muquabalah," "jabr" 這字便是指的這種復合。"muquabalah" 這字指的方程式中的另一運算法，即同一數字出現在方程式的兩邊符號相同時，可以從兩邊取消。("al" 一字是阿拉伯文中的有定冠詞）因此這論文在中世紀爲歐洲學者所熟悉的時候，他們便把它的阿拉伯文的名稱之首字歸屬於它，後來輾轉訛傳，便成爲現在的 " algebra."

數

我們已經知道，第一位算學家便是那位離開了三粒石子，三塊肉，三隻狗，或任何三件特殊的事物，而單獨思及那"三"這數目的人。這種由計數的事物中抽出的每種物理性質之"虛物"（emptying）便是這位哲學家所稱爲"抽象"（abstraction）的例子。我們所論及的這位原始的算學家拋開事物本身的一切性質只採用其可數性。在他，三件事物是什麼，是毫無關係的，卽使三件事物不屬於同一種數也不相干：一隻狗，一棵樹，和一粒石子，也足以表現"三"的物理圖像，正和每類中的三個一樣。我承認，當他把任何三件事物加進任何四件事物之一堆中去的時候，我總得着同數目的事物之較大的一堆，卽七件。他不曾見到，四隻狗和三隻狗所組成一羣狗的數

目，與四粒石子和三粒石子所組成一堆石子的數目有什麼不同。這些說明表面是很瑣細的，但決不可蔑視，因爲它們對於了解我們所稱爲"綜合"的一種科學程序，是極關重要的。他既認爲這種情形對於一切堆或羣的相加都是眞確的，他開始以爲相加對於羣類沒有影響只影響於數目，於是他達到這樣的"同一形"

$$4+3=7$$

這當然是用我們近世的記號。古代及中世紀的人寫這結果用的是不同的記號，但從實質上說他們所加的是"數"而不是"事物"。3，4，7，這是數字是近世採用的印度人的記號；+這符號直到十五世紀時方才使用的；兩條平行線畫=代表"等於"也是晚近的出品。讀者應該記在心上，我們所用的記號與希臘人，印度人，阿拉伯人，或中世紀的歐洲人所用的記號大不相同，但這些記號所指示的程序却是一樣的。

還有一件事是古代的這位敏銳的觀察者所注意的，就是：他把四件事物的一羣加到三件事物的一羣，和把三件事的一羣加到四件事物的一羣，其得數是一樣的。這似

乎又是一件特別瑣細的事情，但這却顯示了＋號的正確的用法；我們現在將這結果寫成這樣

$$4+3=3+4$$

左邊讀作“四加三”意思是加三於四之結果；右邊讀作“三加四”意思是加四於三之結果。用任何一雙數目來代替 3 與 4，其結果都是眞確的，因此我們寫作一個普遍的結果如下：——

$$a+b=b+a$$

於是讀者立卽想到代數學。嚴格說來，這並不是代數學。現在我們用比較上面更加普遍的記號形式來作簡單的敍述，卽任何兩數相加之結果與它們所排列的次序是沒有關係的。我們使用任何方便的記號（經驗曾指示我們各種文字的字母是最方便的記號）來表示一個數，不須特別地敍述它的數值。（這種方法除了算術之外便有許多的用處。例如，化學家用一種特別的記號敍述些重要的結果，簡潔而明瞭。因此 H 代表氫的一個重量單位；O 代表氧的 16 個重量單位；Cl 代表氯的 35.5 個重量單位等等，差不多有百十個這樣的記號列成表式在任何化學著

作中。)這位算學家會有一句話是關於上面所敘述的記號的。他說加法是"可以交換的"。再來作一個瑣細的敘述。假設我們要加 4 和 3 和 5。當然,我們寫它們的次序是無關緊要的;但依它們現在的情形,我們或先加 3 於 4,然後再加 5,或先加 5 於 3,然後再加 4,也是無關緊要的。這個我們可用下式表明

$$(4+3)+5=4+(3+5)$$

這裏我們有一個用"括弧"(即兩條曲線( )的名稱)的例子。在左邊,括弧內包括着 4 與 3 表示它們先相加然後加 5 於其和;在右邊,括弧中的 3 與 5 表示它們先相加然後加其和於 4。算學家又有一句特別話來應付這件事。他說及一條"組合"定律,他完全用記號寫成下式

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

當然照他的交換定律,這些"式"的任何一個都等於 $(a+c)+b$ 或 $a+(c+b)$ 或 $(b+c)+a$,以此類推;並且最後,假使他要願意,他可以不用括弧而寫下總和,如 $a+b+c$,或 $a+c+b$,或 $b+c+a$ 等等。事實上他能創